Auszug aus: B.Grabinger, Gullivers Reisen mit Derive, bkteachware Nr. SR-40, ISBN 3-901769-58-7

# Die Reise zu den Lilliputanern

„Lieber George, heute will ich dir eine Begebenheit von meiner Reise zu den Lilliputanern erzählen. Diese Geschichte kannst du auch bei Jonathan Swift in *Gullivers Reisen* nachlesen, worauf ich sehr stolz bin.

Die Lilliputaner haben mir damals täglich so viel Nahrungsmittel bewilligt, wie 1728 Liliputaner an einem Tage verzehren. Ich

war neugierig zu erfahren, wie man gerade auf diese Zahl verfallen sei, und ein Bekannter, den ich unter den Hofherren hatte, gab mir sogleich Aufschluss darüber. Die Mathematiker des Kaisers hatten meine Körpergröße gemessen und herausgerechnet, dass mein Leib sich zu dem eines Lilliputaners verhielt wie zwölf zu eins, und da meine Gestalt der eines Eingeborenen in allen Verhältnissen genau entsprach, so mussten in mir, mindestens 1728 Liliputaner enthalten sein. Deswegen hatte man mir jenes Nahrungsquantum zugeteilt."

Goerge rechnet kurz leise vor sich hin und erwidert:
„Die Mathematiker der Lilliputaner gingen offenbar von folgender Modellvorstellung für deinen Nahrungsumsatz aus:

Du bist den Lilliputanern von deiner Gestalt her völlig ähnlich, nur um den Faktor 12 größer. Dein Volumen, bzw. deine Masse (wenn man von konstanter Dichte ausgeht) ist dann um den Faktor $12^3 = 1728$ größer als das eines Lilliputaners.

Da die lilliputanischen Mathematiker gerade diese Zahl als Nahrungsumsatz angenommen hatten sind sie davon ausgegangen, dass der Nahrungsumsatz eines Lebewesens proportional seiner Masse sein muss“.

„Sehr scharfsinnig geschlossen, mein lieber George“, entgegne ich, aber irgend etwas war an dieser Modellvorstellung falsch, die Lilliputaner hatten mich regelrecht überfüttert, kannst du dies erklären?“

George hämmert auf seinem Laptop herum, besucht diverse Internetseiten und präsentiert nach einiger Zeit seine Untersuchungen:

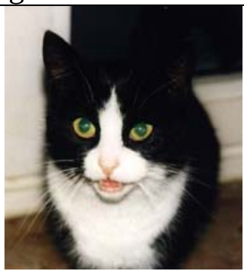
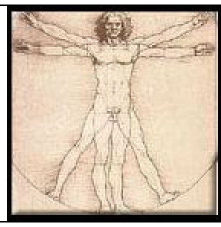
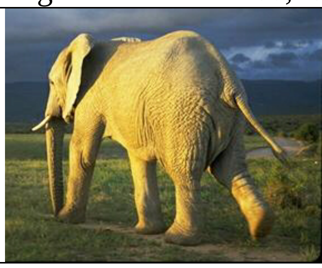
„Lieber Gulliver“, spricht George, „du kannst froh sein, dass du die Mastkur bei den Lilliputanern ohne bleibenden Schaden überstanden hast.  Sieh dir einmal die kleine Spitzmaus an:

Sie hat eine Masse etwa 4 g und verzehrt an einem Tag eine Menge, die etwa der Hälfte ihres Körpergewichtes entspricht.

Ein Blauwal hat eine Körpermasse von etwa 100 Tonnen. Welche Nahrungsmenge muss ein Blauwal pro Tag zu sich nehmen, wenn die Modellvorstellung der Lilliputaner stimmt?
25 Millionen Spitzmäuse (gibt es die überhaupt?) haben die Masse eines Blauwals und fressen täglich 50 Tonnen Nahrungsmittel. Soviel müsste der Blauwal auch an einem Tag fressen. Tatsächlich kommt er aber mit dieser Nahrungsmenge mehrere Monate aus. Das zeigt, dass dich die Lilliputaner überfüttert haben“.

„Also ist der Nahrungsumsatz eines Lebewesens gar nicht proportional zu seiner Masse“, wende ich mich leicht verwirrt an George.

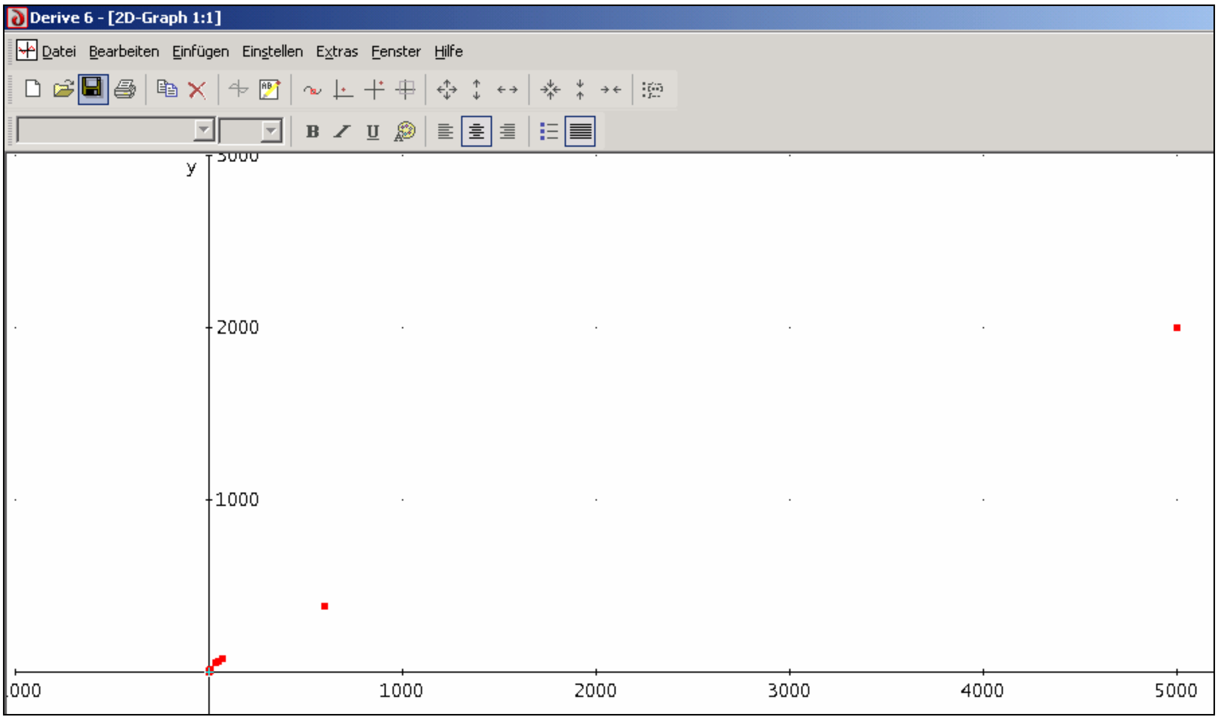
„Du sagst es“, erwidert George, „um das einmal für Säugetiere näher zu untersuchen, habe ich dir die folgenden Beispiele zusammengestellt. Zu jedem Säugetier ist die Masse in kg und die Stoffwechselintensität in Watt angegeben.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| Maus | Ratte | Meerschweinchen |
| 0,021 kg 0,17 W | 0,282 kg 1,36 W | 0,41 kg 1,7 W |
|  |  |  |
| Katze | Kaninchen | Hund |
| 3 kg 7,38 W | 4,33 kg 9,22 W | 6,6 kg 13,93 W |
|  |  |  |
| Schimpanse | Schaf | Mensch |
| 38 kg 52,82 W | 46,4 kg 60,78 W | 70 kg 80 W |
|  |  | |
| Kuh | Elefant | |
| 600 kg 384 W | 5000 kg 2000 W | |

**Daten aus: Kleiber, M.:** Der Energiehaushalt von Mensch und Haustier. Parey, Hamburg, 1967.

Stelle doch einmal die Stoffwechselintensität in Abhängigkeit von der Körpermasse graphisch dar und versuche einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen zu finden“, fordert mich George auf.

Ich greife nach dem Laptop, gebe die Daten ein und versuche diese graphisch darzustellen. „Das ist recht verzwickt“, sage ich zu George, die Daten variieren über einen so großen Bereich, dass eine vernünftige Darstellung gar nicht möglich ist. Wenn ich die Datenpunkte von Maus, Ratte und Meerschweinchen getrennt sehen will, dann sind Elefant und Kuh nicht mehr zu sehen und umgekehrt“.




„Da hast du recht“, meint George, „als mathematisch gebildeter Mensch kannst du dir aber weiterhelfen. Denke doch z.B. einmal an Erdbeben. Deren Stärke variieren über einen so großen Bereich, dass man zur Beschreibung eine logarithmische Skala, die Richterskala, verwendet.  Das kannst du auf dein Problem doch auch anwenden“.

„Du meinst also, dass ich nicht die Masse, sondern deren Logarithmus auf der x-Achse auftragen soll“, wende ich mich an George.

„Ja, aber behandle die Stoffwechselintensität genauso und trage auf der y-Achse deren Logarithmus auf“, hilft mir George weiter.

Ich berechne zuerst die Logarithmen der Massen und der zugehörigen Stoffwechselintensitäten:

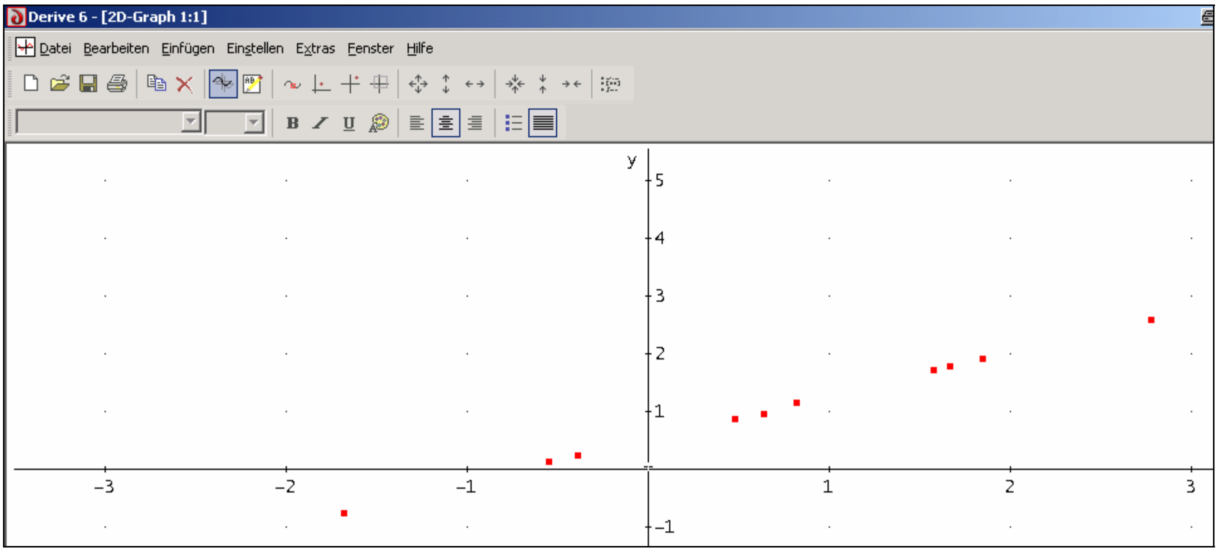
```
#1:  m := [0.021, 0.282, 0.41, 3, 4.33, 6.6, 38, 46.4, 70, 600, 5000]

#2:  I := [0.17, 1.36, 1.7, 7.38, 9.22, 13.93, 52.82, 60.78, 80, 384, 2000]

#3:  doppel_log_punkte := VECTOR([LOG(m_k, 10), LOG(I_k, 10)], k, 1, DIM(m))
```

$$
\#4:\quad \text{doppel\_log\_punkte} := \begin{bmatrix} -1.677780705 & -0.7695510786 \\ -0.5497508916 & 0.1335389083 \\ -0.3872161432 & 0.2304489213 \\ 0.4771212547 & 0.8680563618 \\ 0.6364878963 & 0.964730921 \\ 0.8195439355 & 1.143951116 \\ 1.579783596 & 1.722798396 \\ 1.66651798 & 1.783760695 \\ 1.84509804 & 1.903089986 \\ 2.77815125 & 2.584331224 \\ 3.698970004 & 3.301029995 \end{bmatrix}
$$

Dann stelle ich diese Punktmenge graphisch dar, das Resultat veranlasst mich zu einem Ausruf des Erstaunens. „Sieh nur her, George, die doppeltlogarithmisch aufgetragenen Datenpunkte liegen ungefähr auf einer Geraden“.




„Damit wissen wir schon eine ganze Menge über den Zusammenhang zwischen Masse und Stoffwechselintensität“, freut sich George, „es muss sich um eine Potenzfunktion handeln, wer hätte das gedacht“.

„Wieso denn das“, gebe ich meine Ratlosigkeit zu.

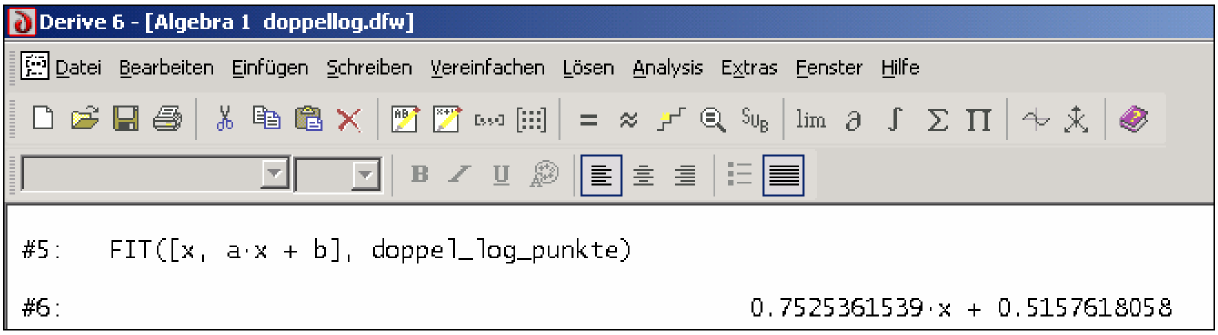
„Ganz einfach“, meint George:

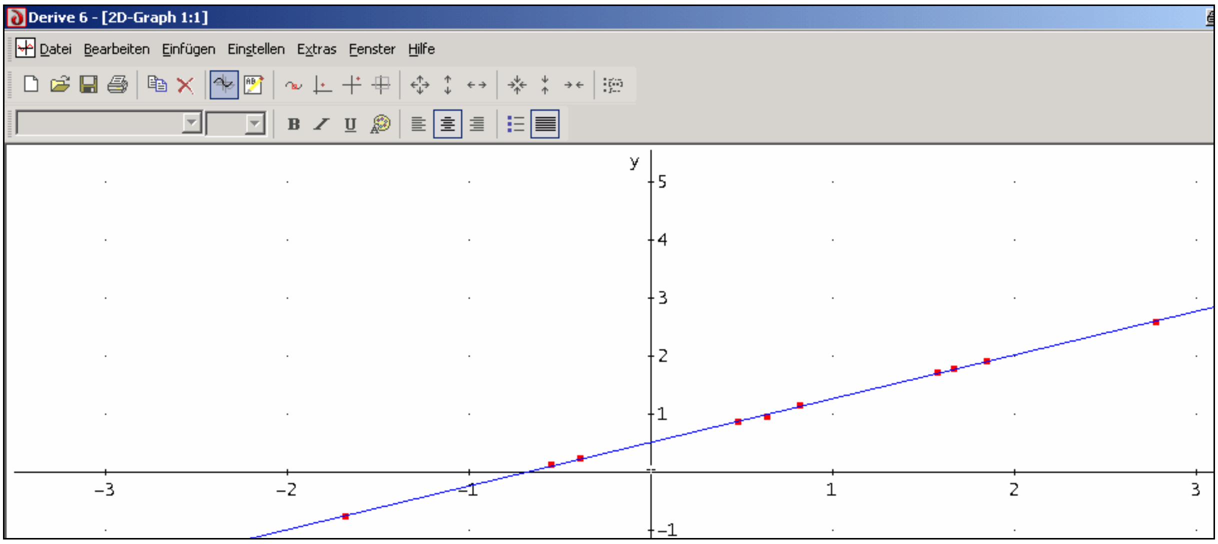
Aus $y = c \cdot x^a$ folgt durch Logarithmieren

$$\lg(y) = \lg(c) + a \cdot \lg(x)$$

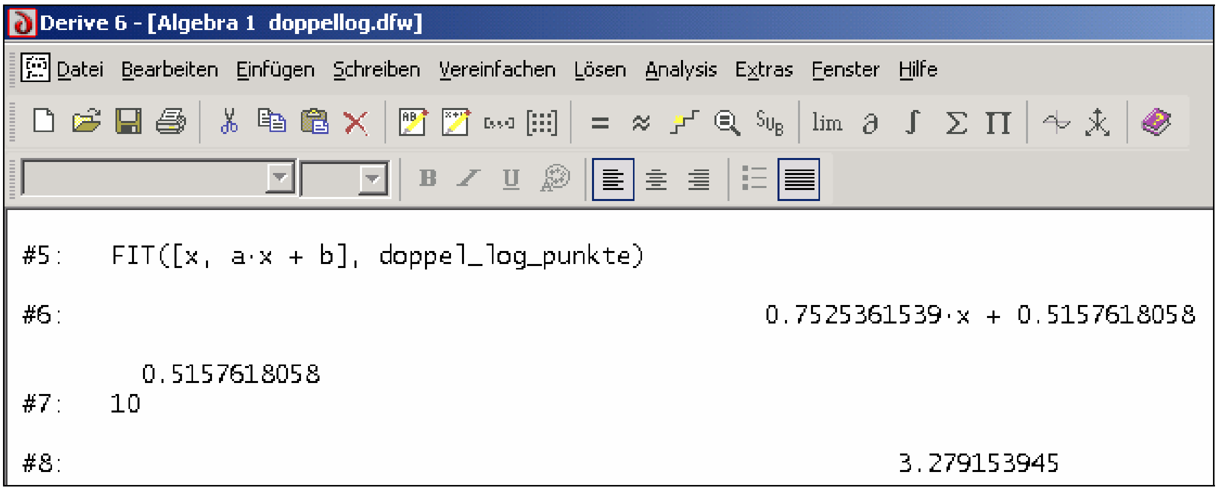
Trägt man nun lg(y) über lg(x) auf, dann ergibt sich natürlich eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt lg(c). Die Umkehrung dieser Schlussweise ist auch richtig. Wenn wir nun die Gleichung der Geraden auf der deine Datenpunkte liegen bestimmen, dann kennen wir auch zugrunde liegende  Potenzfunktion. Mit einer FIT-Funktion ist das schnell gemacht“.

George greift zum Laptop und hat sofort die Gleichung einer Geraden bestimmt, welche die doppeltlogarithmisch aufgetragenen Datenpunkte gut annähert:



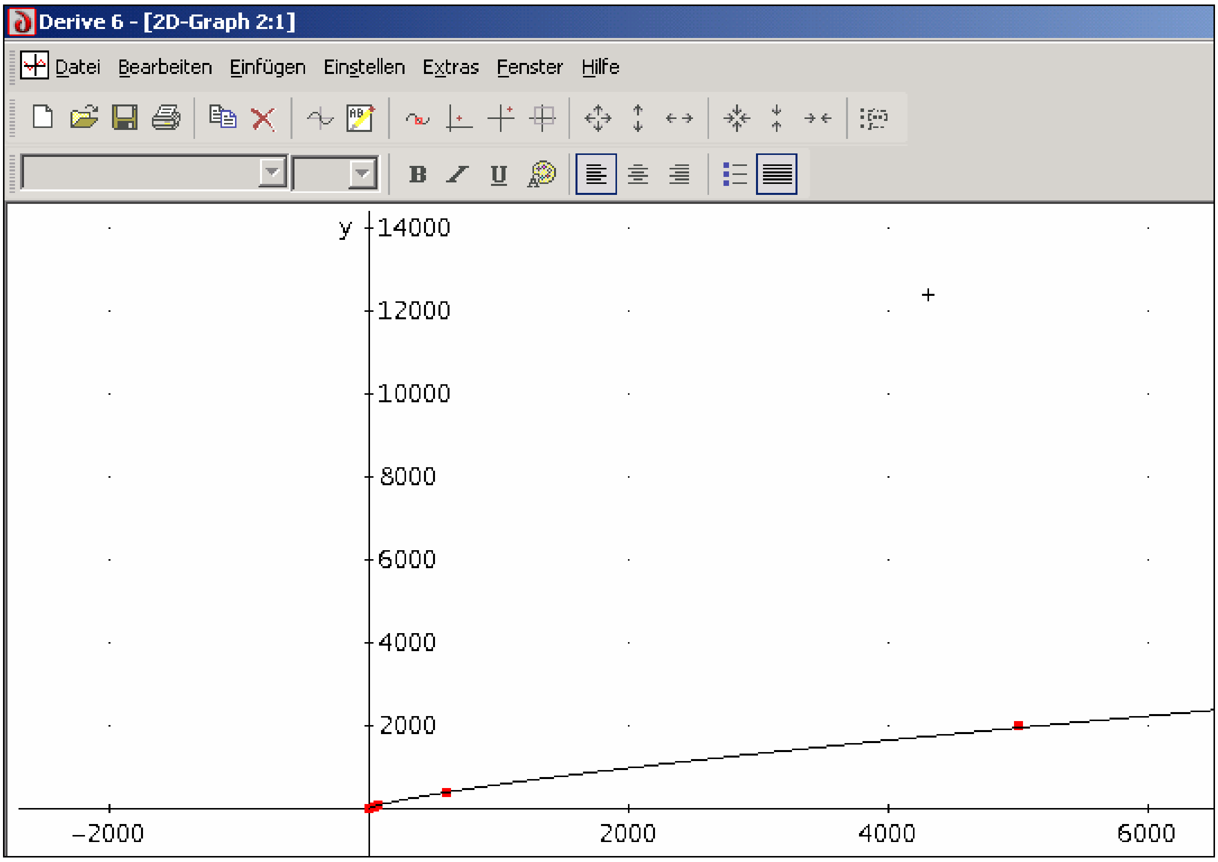

„Aus dem y-Achsenabschnitt 0,5157 = lg( c ) erhält man dann noch die Konstante c", doziert George.




„Die Potenzfunktion welche den Zusammenhang zwischen Masse und Stoffwechselintensität beschreibt ist deshalb gegeben durch

$$y = 3.28 \cdot x^{0,75}.$$

Das kann man jetzt noch einmal dadurch nachprüfen, dass man diese Funktion zusammen mit den Datenpunkten zeichnet“:




Sieh her, wie schön das passt“, freut sich George, „als Folgerung können wir festhalten:

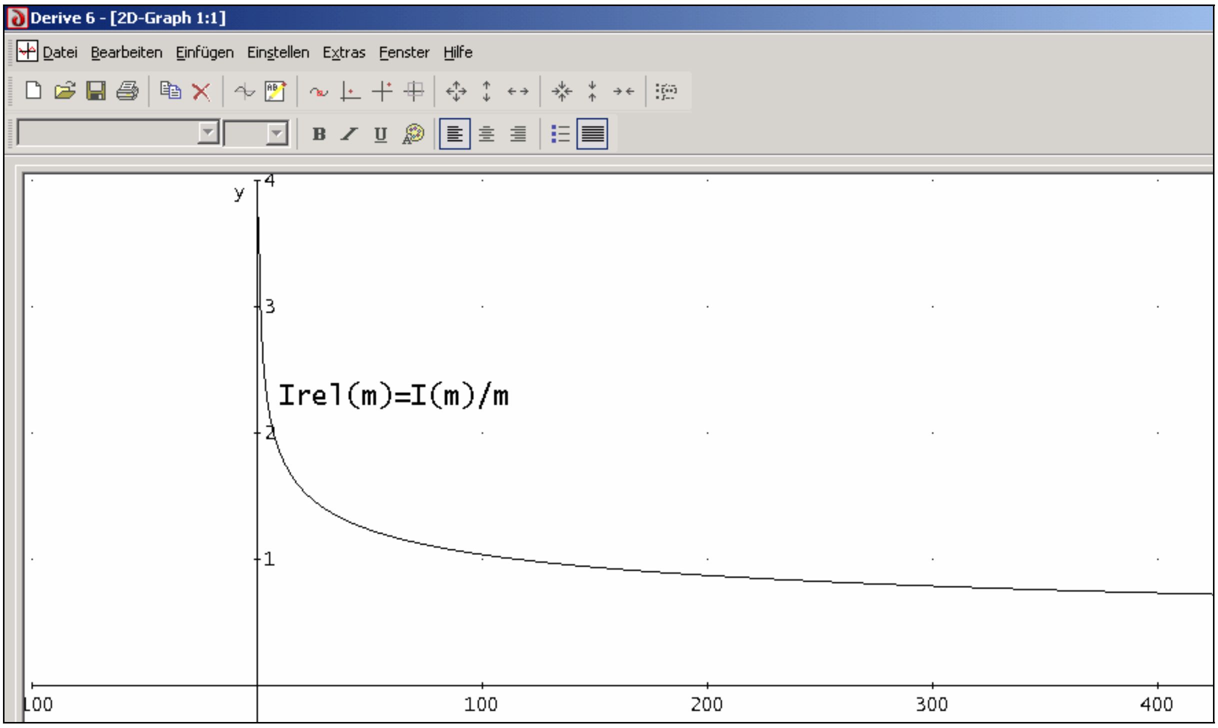
Die Stoffwechselintensität I von Säugetieren hängt von deren Masse m auf folgende Weise ab:

$$I(m) = 3{,}28 \cdot m^{\frac{3}{4}}.$$

Betrachtet man die Stoffwechselintensität pro Kilogramm des jeweiligen Lebewesens, so erhält man die relative Stoffwechselintensität:

$$I_{rel} = \frac{I(m)}{m} = 3.28 \cdot m^{-\frac{1}{4}}$$

Stellt man diese graphisch dar, so ergibt sich das folgende Bild:




Dies zeigt, dass der Wert $I_{rel}$ umso größer ist, je kleiner ein Tier ist. Das heißt, kleine Tiere brauchen im Verhältnis zu ihrer Größe mehr Nahrung als große Tiere.

Die relative Stoffwechselintensität nimmt also sehr stark mit abnehmender Körpermasse zu.

Dies führt bei kleinen Säugetieren letzlich zu so hohen Stoffwechselwerten, dass das Tier die Beschaffung und Verarbeitung der notwendigen Nahrungsmittel nicht mehr leisten kann. Kleine Spitzmäuse haben bereits eine so hohe Stoffwechselintensität, dass sie fast ununterbrochen Nahrung aufnehmen müssen.

Damit haben wir mit etwas Mathematik begründet, dass es keine kleineren Säugetiere als die Spitzmäuse geben kann“, beendet George stolz seine Ausführungen.

„Ein stolzer Erfolg“, gebe ich George recht, „ich bin beeindruckt, aber wie hat der Rechner vorhin so schnell die Gerade durch unsere Datenpunkte bestimmen können?  Was steckt hinter dieser geheimnisvollen Fit-Funktion, das würde mich interessieren“.

„Wenn dich das interessiert“, so erwidert George, „dann sollten wir unbedingt eine Reise nach Göttingen unternehmen, der Wirkungsstätte von Carl Friedrich Gauss, einem der bedeutensten aller Mathematiker. Von Gauss stammt die Methode der kleinsten Quadrate die hinter dieser Fit-Funktion steht, aber wie gesagt, das ist eine andere Reise“.

Lit.: Edeltraud Schwaiger, Grössenordnungen in der Natur

Gauß wurde 1777 in Braunschweig geboren. Seine außerordentliche mathematische Begabung zeigte sich schon im Kindesalter. Später hat er im Scherz von sich behauptet, dass er eher rechnen als sprechen gelernt hätte.