Fahrzeugdurchsatz im Kolonnenverkehr

von Günter Schmidt

Mögliche Ausgangssituationen:

Baustelle auf der Autobahn. Der Verkehr muß einspurig geführt werden.
Man möchte einen möglichst großen "Fahrzeugdurchsatz" erreichen.

Kann man hier Empfehlungen geben?

Zur Entlastung des Autoverkehrs in der City wird ein Tunnel unter der City geplant.
Aus Kostengründen steht in diesem Tunnel in jeder Fahrtrichtung nur jeweils eine Spur zur Verfügung.
In der "Rush-Hour" ist das Verkehrsaufkommen sehr hoch.

Wie kann man einen möglichst hohen Fahrzeugdurchsatz erreichen?

Vorüberlegungen

Die erste naive Vermutung: Man muß dafür sorgen, daß die Autos möglichst schnell fahren können. "Je größer die Geschwindigkeit, umso größer der Fahrzeugdurchsatz".

In einem Leserbrief (Rhein-Sieg Rundschau, 3.4.92) findet man diese Auffassung mit Überzeugung vertreten:

Auf der Strecke

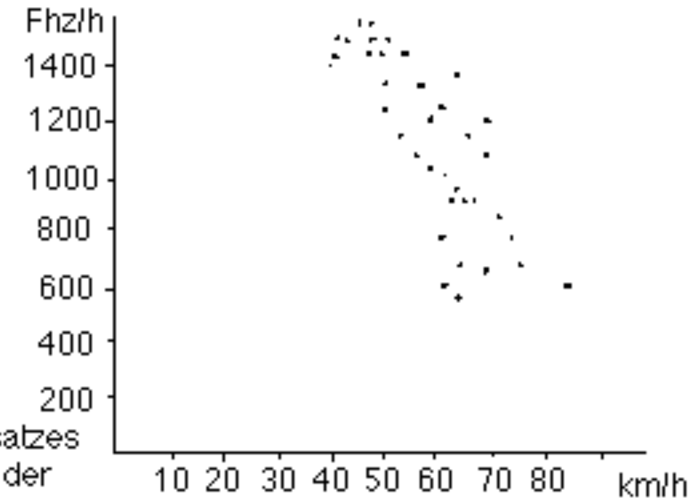
`Nach einem BGH-Urteil haftet ein Autofahrer auch für Schäden nach einem Autobahn-Unfall, wenn er unschuldig darin verwickelt wurde, aber schneller als die zulässige Richtgeschwindigkeit fuhr.`

Ich wundere mich, was in einem Rechtsstaat wie der Bundesrepublik alles möglich ist. Die Rechtsstaatlichkeit bleibt auf der Strecke. Ich verstehe die Polemik der Geschwindigkeitsgegner nicht: Auf den Autobahnen in unserem Land werden etwa 35 Prozent des Straßenverkehrs abgewickelt bei einem Unfallanteil von nur 7 Prozent. Man sollte seine verkehrspolitischen Fähigkeiten besser in die Entflechtung des Verkehrs stecken. Das heißt, die Verkehrsdichte verringern, und das bedeutet entweder mehr oder breitere Straßen oder höhere (!) Geschwindigkeiten, denn Unfallhäufigkeit ist eine Sache der Verkehrsdichte und nicht der Geschwindigkeit. Belegen die sogenannten Verkehrsexperten mal einige Semester Strömungslehre, dann kommen sie von selber dahinter: Je enger ein Rohr, desto schneller muß das Wasser hindurchfließen, damit am Ende die gleiche Menge ankommt, wie bei einem dickeren Rohr bei langsamerer Fließgeschwindigkeit.

Dies wird schnell in Frage gestellt: Bei großen Geschwindigkeiten muß ein enormer Sicherheitsabstand eingehalten werden, ansonsten wird das Unfallrisiko zu hoch. Ein Unfall bedeutet zudem Stau mit Stillstand.

Die Diskussion verdeutlicht: Die Geschwindigkeit und der Sicherheitsabstand spielen offenbar eine wichtige Rolle für den Fahrzeugdurchsatz.

Es gibt empirische Untersuchungen zum Thema. (Leutzbach 1972) Nach diesen wird der größte Durchsatz für mittlere Geschwindigkeiten um 50 km/h erreicht.



Abhängigkeit des Fahrzeugdurchsatzes von der mittleren Geschwindigkeit der Kolonne

Läßt sich dies Zusammenspiel der Größen Fahrzeugdurchsatz, Geschwindigkeit und Sicherheitsabstand durch ein mathematisches Modell beschreiben?

Modellierung

Wir gehen zunächst von folgenden (vereinfachenden) Annahmen aus, die in den gegebenen Situationen plausibel erscheinen:

1. Kolonnenfahrt. Alle Autos fahren mit gleicher Geschwindigkeit v. 2. Alle Autos halten den Sicherheitsabstand A ein.

Die Länge L einer Autokolonne, die in einer Stunde eine Meßstelle passiert, ist abhängig von der mittleren Geschwindigkeit, mit der sich diese Kolonne bewegt.

Es gilt $\text{Geschwindigkeit} = \dfrac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ und damit Weg = Geschwindigkeit • Zeit

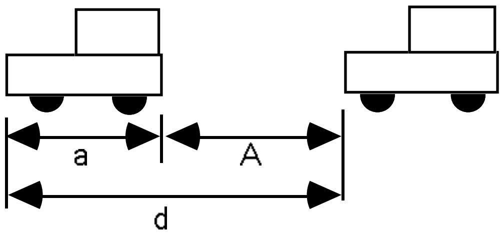
Für die Zeiteinheit 1h erhalten wir damit

$L = v \bullet 1000$

(Wenn wir v in km/h angegeben, so erhalten wir L in m)

Die Anzahl N der Autos in dieser Kolonne ist dann ein Maß für den Fahrzeug-durchsatz.

Um diese Anzahl zu bestimmen, benötigen wir den "mittleren Abstand" d zwischen zwei Autos. Dieser setzt sich zusammen aus dem Sicherheitsabstand A und der Autolänge. Auch hier setzen wir zur Vereinfachung eine "mittlere Autolänge" a ein.



Nun benötigen wir Informationen über den Sicherheitsabstand A. In den Fahrschullehrbüchern finden wir hierzu die notwendigen Angaben (ohne Physik!)

(A1) "Goldene Regel für den Sicherheitsabstand außerhalb geschlossener Ortschaften" (**2-Sekundenregel**):

> *Merken Sie sich einen festen Punkt (z.B. Baum, Kilometerstein oder ähnliches), an dem der Vorausfahrende soeben vorbeifährt. Dann zählen sie ohne Hast "21, 22". Erst dann durfen Sie diesen Punkt erreicht haben. Wird der Punkt früher erreicht, ist der Abstand zu klein.*

(A2) "**Halbe-Tacho-Regel**"

Der Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug sollte in der Regel mindestens 1/2 der Tachoanzeige betragen. (Abstand in m, Tachoanzeige in km/h).

(A3) und (A4) **Reaktionsweg** und **Bremsweg**.

Der Reaktionsweg. Vom Erkennen einer Gefahr bis zum Niedertreten des Bremspedals benötigt jeder eine gewisse Zeit. Diese Verlustzeit ist unterschiedlich und hängt vom Fahrer ab, z.B. ältere Fahrzeugführer, Übermüdung und dergl. Die Verlustzeit wird auch Reaktionszeit genannt. Sie beträgt im Durchschnitt 1 Sekunde, d.h. nachdem Sie die Gefahr erkannt haben, läuft Ihr Fahrzeug noch 1 Sekunde lang mit gleicher Geschwindigkeit weiter. In dieser Sekunde wird je nach Fahrzeuggeschwindigkeit ein bestimmter Weg zurückgelegt. Diesen Weg nennt man den Reaktionsweg.

Als Faustregel für den Reaktionsweg wird angegeben

$$\text{Reaktionsweg} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{10} \text{x3}$$

(entspricht dem Weg des Fahrzeugs (in m) in einer Sekunde. Kann nach der Tachometeranzeige (in km/h) ermittelt werden.)

Der Bremsweg. Vom Niedertreten des Bremspedals bis zum Stillstand des Fahrzeugs legt das Fahrzeug einen bestimmten Weg zurück. Dieser Weg wird der Bremsweg genannt und kann nach der Tachometeranzeige ermittelt werden.

Faustregel für den Bremsweg:

$$Bremsweg = \frac{Geschwindigkeit}{10} x \frac{Geschwindigkeit}{10}$$

Beim Einsetzen der Geschwindigkeit in km/h erhält man damit den Bremsweg in m.

Bearbeitung des Modells

Der maximale Fahrzeugdurchsatz bei den verschiedenen Regeln für den Sicherheitsabstand

Als mittlere Fahrzeuglänge wird zunächst in allen Fällen a = 6m angenommen. Dies ist eine grobe Schätzung für den gewichteten Mittelwert der vielen Pkw´s mit einer Länge zwischen 4-5 m und den Nutzfahrzeugen mit Längen von 6 - 20 m.

Der Fahrzeugdurchsatz N wird nun in Anzahl pro Stunde berechnet, er errechnet sich in jedem Fall als Quotient der Kolonnenlänge L und des mittleren Abstandes d.

$$\boxed{N = \frac{L}{d} = \frac{1000v}{A+6}}$$

Für den Sicherheitsabstand A setzen wir einen von der Geschwindigkeit v abhängigen Term ein, der sich nach der jeweiligen Faustregel bestimmt.

(A1) Im Fall der **2-Sekundenregel** erhalten wir die Formel über den Zusammenhang Weg = Geschwindigkeit • Zeit. Dabei müssen wir noch beachten, daß $1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1}{3.6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Als Formel erhalten wir damit für den Anhalteweg:

$$\boxed{A1(v) = \frac{v}{1.8}}$$

Die Formel liefert den Anhalteweg in m, wenn man v in km/h angibt.

(A2) Die **Tacho-Halbe-Regel** liefert

$$\boxed{A2(v) = \frac{v}{2}}$$

Die Formel liefert den Anhalteweg in m, wenn man v in km/h angibt.

(A3) **Nur Reaktionsweg**

Wenn man (leichtfertigerweise) davon ausgeht, daß in der Kolonnenfahrt der Vordermann in gleicher Weise bremst wie der Nachfolger, so könnte man den Bremsweg bei dem Anhalteweg vernachlässigen. Damit würde lediglich der Reaktionsweg als Sicherheitsabstand eingesetzt.

$$\boxed{A3(v) = \frac{3v}{10}}$$

Die Formel liefert den Anhalteweg in m, wenn man v in km/h angibt.

(A4) **Anhalteweg als Sicherheitsabstand**

Anhalteweg = Reaktionsweg + Bremsweg

Für Reaktions- und Bremsweg werden die oben angegebenen Faustformeln verwendet. Damit ergibt sich als Formel:

$$\boxed{A4(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}}$$

Die Formel liefert den Anhalteweg in m, wenn man v in km/h angibt.

Schließlich kann man an Stelle der bisher herangezogenen Faustregeln die physikalisch beschreibbaren Bremsbeschleunigungen der Autos in der Kolonne berücksichtigen. Dies soll im Anschluß an die Bearbeitung in einem erweiterten Modellansatz geschehen.

In dem folgenden DERIVE-Protokoll sind zunächst die verschiedenen Faustregeln für den Anhalteweg A in Formel und Graph dargestellt. Anschließend wird der jeweilige Fahrzeugdurchsatz als Funktion von der Durchschnittsgeschwindigkeit mit Funktionsgleichung und Graph angegeben.

1: "Anhalteweg"

2: "============================"

3: "2 Sekundenregel"

4: $A1(v) := \dfrac{v}{1.8}$

5: "Tacho-Halbe"

6: $A2(v) := \dfrac{v}{2}$

7: "nur Reaktionszeit (1 Sekunde)"

8: $A3(v) := \dfrac{3\,v}{10}$

9: "Faustregel Fahrschule"

10: $A4(v) := \dfrac{v^2}{100} + \dfrac{3\,v}{10}$

24: "======================"

18: "Durchsatz = Anzahl/Stunde"

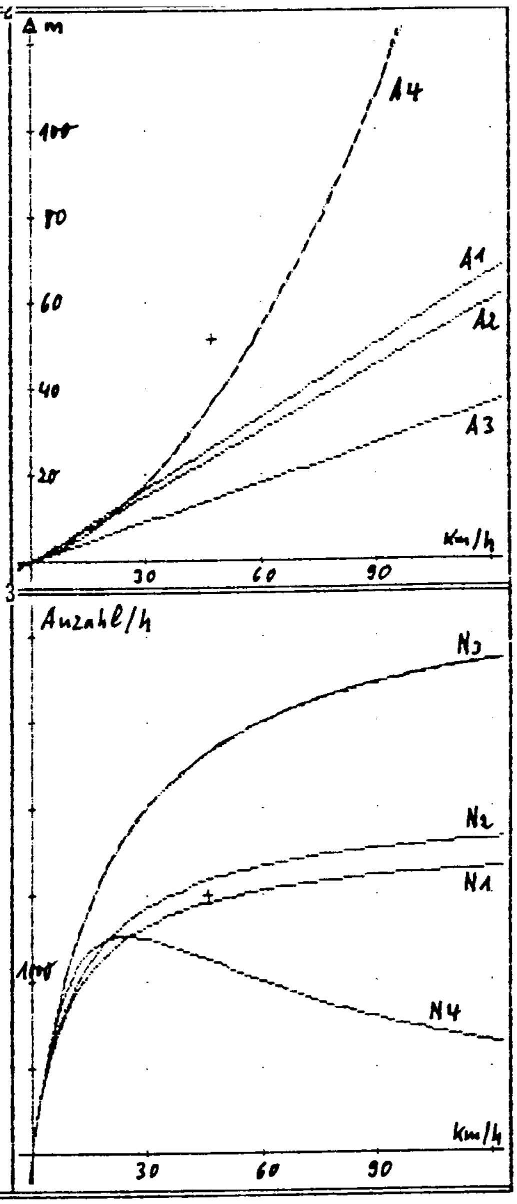
19: "======================"

20: $N1(v) := \dfrac{1000\,v}{A1(v) + 6}$

21: $N2(v) := \dfrac{1000\,v}{A2(v) + 6}$

22: $N3(v) := \dfrac{1000\,v}{A3(v) + 6}$

23: $N4(v) := \dfrac{1000\,v}{A4(v) + 6}$

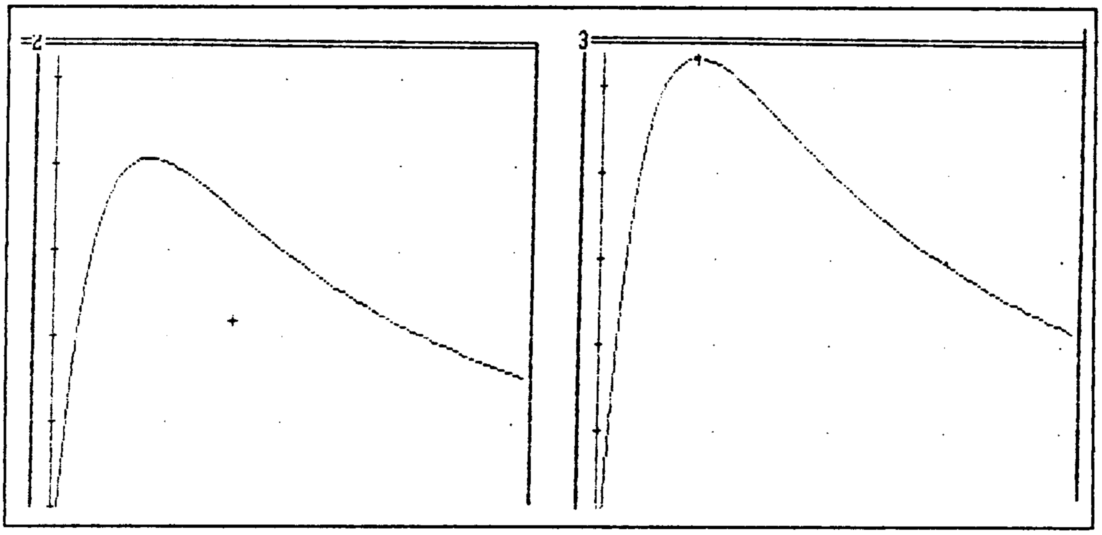


In den Fällen A1, A2 und A3 ist der Anhalteweg eine lineare Funktion der Geschwindigkeit v, nur die „Fahrschulregel“ A4 zeigt die quadratische Zunahme des Anhalteweges mit der Geschwindigkeit.

Der Fahrzeugdurchsatz nimmt nach den Modellen N1, N2 und N3 jeweils monoton mit der Geschindigkeit zu, allerdings ist diese Zunahme in allen drei Fällen bei Geschwindigkeiten über 30 km/h nur noch relativ gering und nimmt mit wachsender Geschwindigkeit weiter ab.

Die Durchsatzkurve N4 steigt zunächst steil an und erreicht ein Maximum bei etwa 25 km/h (!), danach fällt sie flacher wieder ab. Die Erklärung für diese zunächst überraschende Feststellung liegt in der vorher bereits bemerkten quadratischen Zunahme des Anhalteweges (und damit auch des Fahrzeugabstandes d) von der Geschwindigkeit.

Zur genaueren Bestimmung des Maximums wählen wir Ausschnittsver-größerungen (graphisch und Wertetabelle):



Ausschnittsvergrößerungen zu dem Graph von N4(v)

$$N4(v) := \frac{1000\ v}{A4(v) + 6}$$

VECTOR([v, N4(v)], v, 21, 26, 0.5)

21	1256.73
21.5	1259.33
22	1261.46
22.5	1263.15
23	1264.43
23.5	1265.31
24	1265.82
24.5	1265.98
25	1265.82
25.5	1265.35
26	1264.59

VECTOR([v, N4(v)], v, 24, 25, 0.1)

24	1265.82
24.1	1265.88
24.2	1265.92
24.3	1265.96
24.4	1265.98
24.5	1265.98
24.6	1265.97
24.7	1265.95
24.8	1265.92
24.9	1265.88
25	1265.82

Ausschnitte aus Wertetabellen zu N4(v)

Der maximale Fahrzeugdurchsatz wird also bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von v = 24.5 km/h erreicht, er beträgt dann etwa 1266 Fahrzeuge/h.

Wenn die Differentialrechnung bereits zur Verfügung steht, so kann man das Maximum auch mit den Nullstellen der 1.Ableitung ermitteln. Zur Information sei das entsprechende DERIVE-Protokoll kurz angegeben:

$$\frac{d}{dv}\left[N4(v) := \frac{1000\ v}{A4(v) + 6}\right]$$

$$\frac{100000\ (600 - v^2)}{(v^2 + 30\ v + 600)^2}$$

$$v = -\ 10\ \sqrt{6}$$

$$v = 10\ \sqrt{6}$$

$$v = -\infty$$

$$v = \infty$$

$$v = 24.4948$$

$$N4(24.4948)$$

$$1265.98$$

Die Ableitung wurde dabei über das Menü CALCULUS -> DIFFERENTIATE ermittelt, die Nullstellen der Ableitung mit Hilfe von SOLVE bestimmt.

Zum Vergleich die Werte bei den anderen Modellannahmen:

$$[N1(24.5),\ N2(24.5),\ N3(24.5)]$$

$$[1249.29,\ 1342.46,\ 1835.20]$$

$$[N1(100),\ N2(100),\ N3(100)]$$

$$[1624.54,\ 1785.71,\ 2777.77]$$

$$\left[\lim_{v\to\infty} N1(v),\ \lim_{v\to\infty} N2(v),\ \lim_{v\to\infty} N3(v)\right]$$

$$[1800,\ 2000,\ 3333.33]$$

Von theoretischem Interesse sind die Grenzwertbetrachtungen bei N1, N2 und N3. Sie zeigen, daß diese Kurven nach oben beschränkt sind, bei N3 ist diese Schranke mit dem Wert 3333 am größten.

Modellauswertung

Wenn wir das Unfallrisiko durch Einhalten des Sicherheitsabstandes nach A4 möglichst gering halten wollen, so entscheiden wir uns für das Modell N4 und kommen so abschließend zu der Empfehlung:

Für einen möglichst großen Fahrzeugdurchsatz im Kolonnenverkehr wird eine Richtgeschwindigkeit von 25 km/h empfohlen mit einem Fahrzeugabstand von etwa 13 m.

Bei etwas größerer Risikobereitschaft können wir bei Geschwindigkeiten von bis zu 50 km/h die Tacho-Halbe-Regel A2 heranziehen. Damit empfehlen wir dann:

Für einen möglichst großen Fahrzeugdurchsatz im Kolonnenverkehr wird eine Richtgeschwindigkeit von 50 km/h empfohlen mit einem Fahrzeugabstand von etwa 25 m.

In diesem Fall wird der Fahrzeugdurchsatz mit 1613 Fahrzeugen/h dann gegenüber der 1.Empfehlung mit 1266 Fahrzeugen/h um etwa 30% vergrößert, allerdings ist das Risiko für Auffahrunfälle auch größer.

Modellkritik

Wir haben in allen Ansätzen eine Reihe vereinfachender Annahmen gemacht und andere Bedingungen nicht berücksichtigt, z.B.

- Die Formeln für den Sicherheitsabstand sind Faustregeln;
- an verschiedenen Stellen werden “mittlere Werte“ angenommen. Nach welchen Kriterien bestimmt man solche Mittelwerte für Geschwindigkeit, Schreck-sekunde oder Autolänge?
- wir haben nicht berücksichtigt, daß auch der vorausfahrende Fahrer beim plötzlichen Abbremsen nicht sofort zum Stillstand kommt. Ist dies evtl. in manchen Faustregeln schon berücksichtigt?
- inwieweit muß individuelles oder technisches Fehlverhalten mit einbezogen werden? Wie ist die Moral der Autofahrer? Wie weit wird der empfohlene Sicherheitsabstand eingehalten, welche Risikobereitschaft muß in Ansatz gebracht werden?

Modellerweiterungen

Wir beschränken uns hier auf Erweiterungen in zwei Richtungen. Einmal wird die mittlere Autolänge a variiert, zum anderen werden wie oben angedeutet an Stelle der Faustregeln die physikalisch beschreibbaren Bremsbeschleunigungen der Autos in der Kolonne berücksichtigt. Die Darstellung erfolgt in Form von Arbeitsaufträgen und möglichen Lösungsskizzen.

Erweiterung 1: Variation der mittleren Autolänge

Bei den vorangegangenen Überlegungen haben wir recht willkürlich eine mittlere Autolänge von a = 6 m angenommen. Wir könnten dies mit Hilfe empirischer Untersuchungen (Beobachtungen der Anzahl PKW und größere Nutzfahrzeuge einer Kolonne) verbessern und untermauern. Wir können aber auch in unserem Modell den Einfluß dieses Parameters „mittlere Autolänge“ untersuchen.

Untersuche im Modell N4, wie sich die Variation der mittleren Autolänge a auf den Fahrzeugdurchsatz auswirkt. Beschreibe die Veränderung der zugehörigen Graphen v -> N4(v). Was bedeutet dies für die entsprechenden Empfehlungen?

Lösungsskizze:

Wir stellen eine Kurvenschar N(a,v) mit Variation des Parameters a dar. Der Parameter a läuft von 2 bis 10 mit Schrittweite 1.

$$A4(v) := \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10}$$

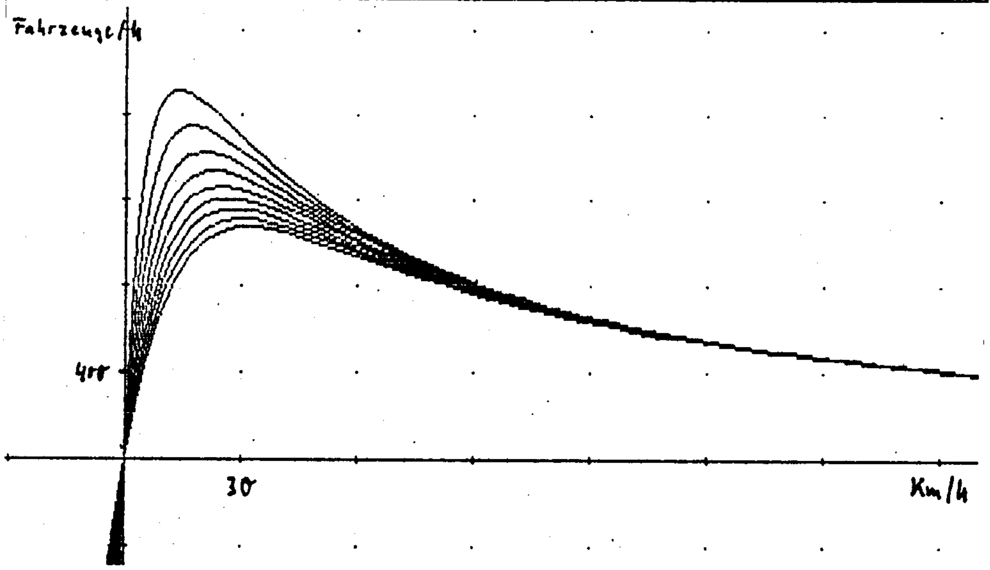
"Fahrzeugdurchsatz bei variabler Autolänge a"

$$N(a, v) := \frac{1000\,v}{A4(v) + a}$$

"Kurvenschar"

VECTOR(N(a, v), a, 2, 10)

$$\left[\frac{100000\,v}{v^2 + 30\,v + 200}, \frac{100000\,v}{v^2 + 30\,v + 300}, \frac{100000\,v}{v^2 + 30\,v + 400}, \frac{100000\,v}{v^2 + 30\,v + 50}\right.$$



Man erkennt, daß mit wachsender “mittlerer Fahrzeuglänge“ die Durchsatz-kurven immer flacher verlaufen, d.h. der Fahrzeugdurchsatz wird bei größeren Autolängen erwartungsgemäß kleiner. Die Durchsatzmaxima werden für größere Fahrzeuglängen erst bei größeren Geschwindigkeiten erreicht, die maximalen Durchsatzwerte werden kleiner. Entsprechend ändern sich die Empfehlungen, für die Nachbarwerte der Fahrzeuglänge a = 6 m lauten sie:

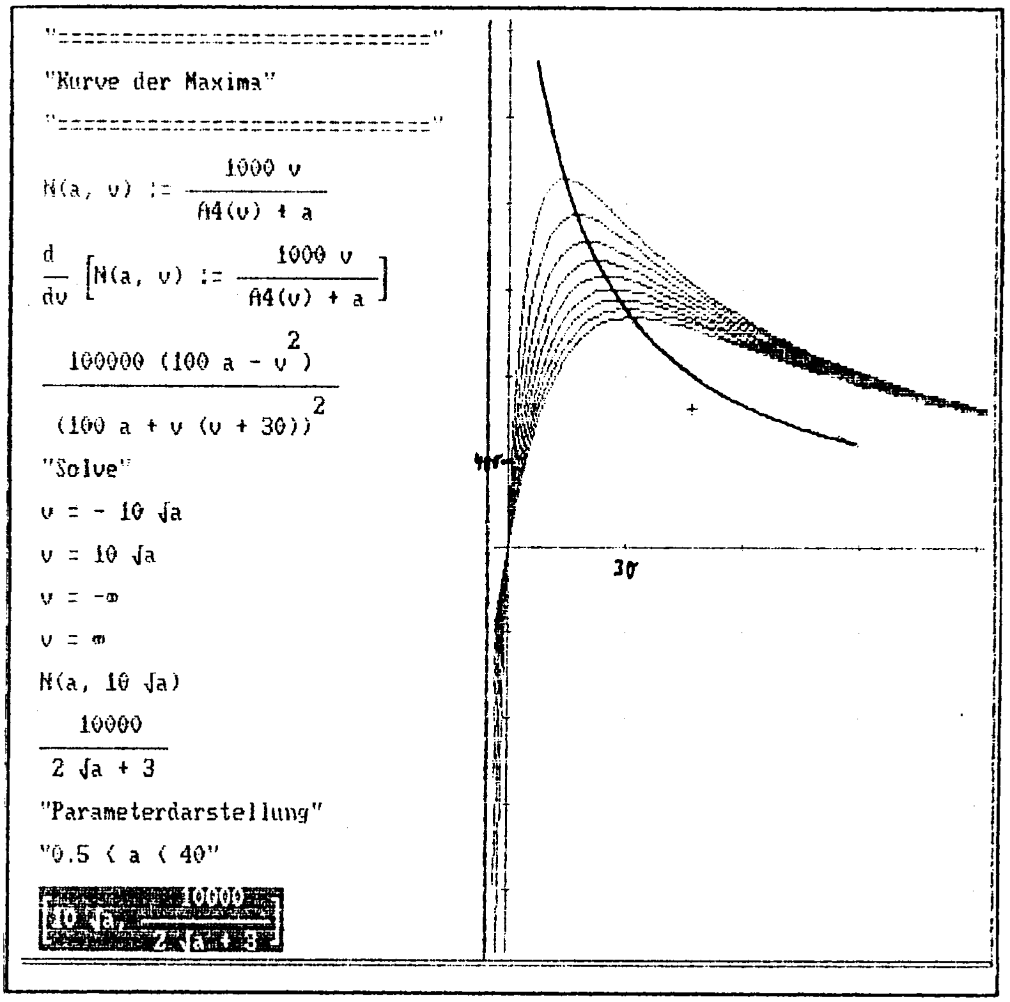
a = 5 m :	Richtgeschwindigkeit:	22.4 km/h	Fahrzeugabstand:	12 m
a = 7 m :		26.5 km/h		15 m

Eine gute Beschreibung der Veränderungen liefert die Ortskurve der Maxima in Abhängigkeit von dem Parameter a.

Einzeichnen nach Augenmaß zeigt eine Kurve, die einer Hyperbel gleicht. Durch Experimentieren und plausible Vorüberlegungen kann man die Funktions-gleichung suchen:

$$y = \frac{100000}{2x + 30}$$

Falls die Differentialrechnung schon zur Verfügung steht, kann man die Ortskurve mit Hilfe der Sätze über lokale Maxima ermitteln und mit Hilfe der Parameterdarstellung einzeichnen.



Erweiterung 2 : Berücksichtigung der Bremsbeschleunigung der Autos

Es sei v die Geschwindigkeit der Autos in der Kolonne, b_1 der maximale Betrag der Bremsbeschleunigung für das eigene Auto, b_0 die entsprechende Größe für den Vordermann. Dann läßt sich für den notwendigen Sicherheitsabstand die Formel herleiten

$$\boxed{A5(v) = r \cdot v + \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_0}\right)}$$

r ist hierbei die Reaktionszeit in s, die Geschwindigkeit wird in m/s, die Bremsbeschleunigung in m/s^2 eingesetzt, der Sicherheitsabstand ergibt sich dann in m.

Setze für b_1 den TÜV-Mindestwert von 4 m/s^2 und für b_0 einen besseren Wert zwischen b_1 und b_{max} = 8 m/s^2 (gute Bremslage bei trockener, griffiger Straße) ein und stelle damit jeweils A5(v) dar. (Reaktionszeit r = 1 s). Vergleiche die Graphen mit A4(v).
Ermittle für den Fall b_1= 4 m/s^2 und b_0 = 8 m/s^2 die Geschwindigkeit für den maximalen Fahrzeugdurchsatz (Fahrzeuglänge a=6 m).

(zur Herleitung der Formel siehe [3] oder [7]):

Lösungsskizze:

Wir zeigen ein mögliches DERIVE-Protokoll, in dem die Kurvenschar A5(v,b_0) für b_0= 4, 5, 6, 7 und 8 m/s^2 dargestellt wird.

Beim Vergleich mit A4(v) muß die entsprechende Formel für die Eingabe der Geschwindigkeit in m/s umgerechnet werden.

Bei der Formel N5(v) zur Berechnung des Fahrzeugdurchsatzes in Anzahl/h muß der Zähler nun mit 3600v angegeben werden, da die Geschwindigkeit in m/s eingegeben wird.

1: "Formel mit Bremsverzögerung"

2: $A5(v, b0) := r\, v + \frac{v^2}{2} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{b0}\right]$

3: $r := 1$

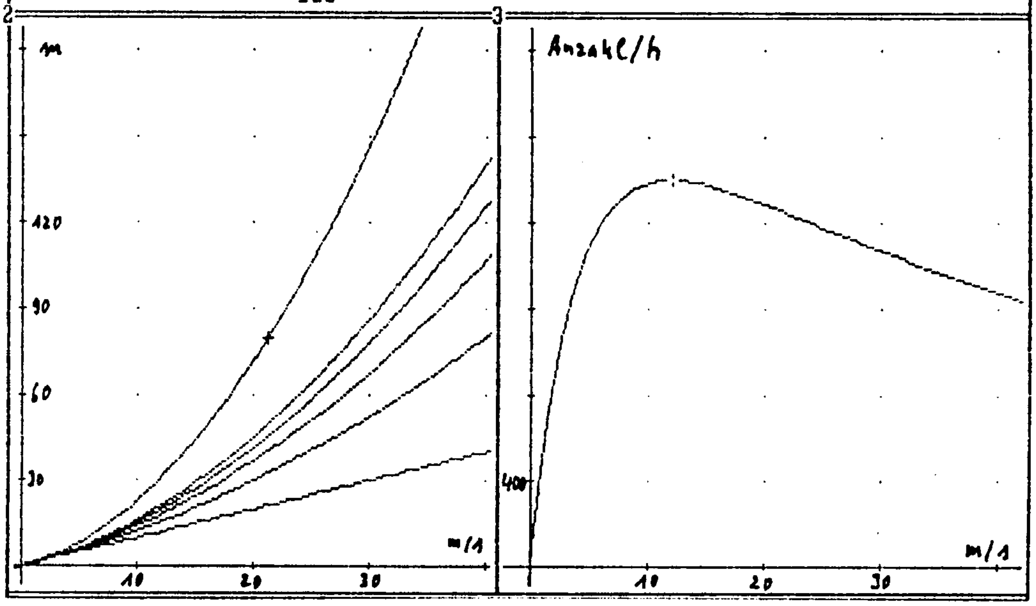
4: $[A5(v, 4), A5(v, 5), A5(v, 6), A5(v, 7), A5(v, 8)]$

5: $N5(v) := \frac{3600\, v}{A5(v, 6) + 6}$

6: "Achtung: v in m/s^2 !"

7: "Damit A5(v) in m , N5(v) in Anzahl/h"

8: $A4(v) := v + \frac{(3.6\, v)^2}{100}$



Der Vergleich der Kurvenschar A5(v) mit der Kurve zu A4(v) zeigt, daß die in A4 benutzte Fahrschulregel den Sicherheitsabstand sehr großzügig berechnet, die Berücksichtigung der einzelnen Bremsbeschleunigungen liefert selbst im günstigsten der angenommenen Fälle (b_0=4, b_1=8) noch deutlich kürzere Abstände.

Das Maximum des Fahrzeugdurchsatzes entnehmen wir mit Hilfe des Fadenkreuzes (CROSS) der graphischen darstellung von N5, es wird nun mit einem Wert von 1800 Fahrzeuge/h bei einer Geschwindigkeit von 12 m/s (= 43 km/h) erreicht.

Ausblicke

Mit Hilfe dieses Protokolls lassen sich nun gegebenenfalls weitere Fragen experimentell untersuchen, so z.B.

- die Beeinflussung des Fahrzeugdurchsatzes durch die Berücksichtigung verschiedener Reaktionszeiten (r = 0.5, 0.8, 1.2 s ?)
- wiederum die Abhängigkeit des Fahrzeugdurchsatzes von der mittleren Autolänge a

Interessant ist auch die Suche nach Paaren (b_0,b_1), für die die Kurve A5(v) der Fahrschulformel A4(v) entspricht? (<-- z.B. (2,4)).

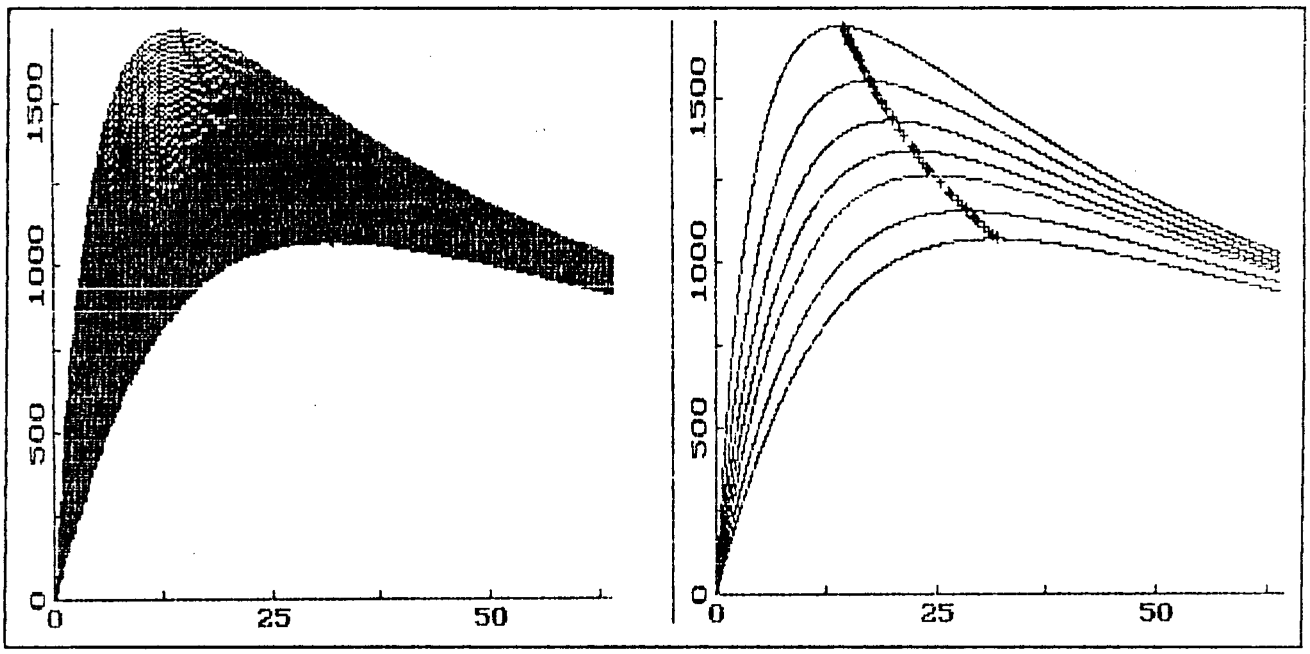
Andere Fragestellungen und evtl. auch Erweiterungen des Modells ergeben sich je nach den speziellen Vorkenntnissen des Kurses (oder der Lehrerin/des Lehrers).

Zum Computereinsatz

Bei der Bearbeitung des Modells mit Hilfe des Computers wurde DERIVE im wesentlichen als "Funktionenplotter" eingesetzt. Hier ist in gleicher Weise auch ein graphischer Taschenrechner geeignet, zumal dieser von den SchülerInnen ohne Aufwand auch im Rahmen von Hausaufgaben und Kursarbeiten benutzt werden kann. Die Präsentation von Ergebnissen kann mit Hilfe eines verfügbaren Overhead-Displays ebenso mühelos erfolgen.

Auf der folgenden Seite sind einige Auszüge für die Darstellung von N4(v), der Kurvenschar N4(v,a) für a=2, 4, 6, 8 und für die Parameterdarstellung der Ortskurve der Maxima der Kurvenschar mit dem TI 81 von TEXAS INSTRUMENTS dargestellt. Die grobe Auflösung bei der graphischen Darstellung ist für die Problembearbeitung kein Nachteil, zumal die wichtigen Koordinaten der Kurvenpunkte mit Hilfe der TRACE-Funktion und geeignetem ZOOM in beliebiger Genauigkeit ermittelt werden können.

Ästhetisch besonders ansprechende Darstellungen lassen sich mit Hilfe "dynamischer Funktionenplotter" erzeugen. Mit dem von Michael Weiß, Gifhorn, als Shareware zur Verfügung gestellten Programm PARAPLOT kann man die Funktionenschar N4(v,a) z.B. für a zwischen 2 und 10 als bewegtes Bild darstellen, gleichzeitig läßt sich über eine Option ORTSKURVEN die Kurve der Maxima erzeugen. Letzteres kann auch als Motivation für die analytische Bestimmung dieser Ortskurve eingesetzt werden.

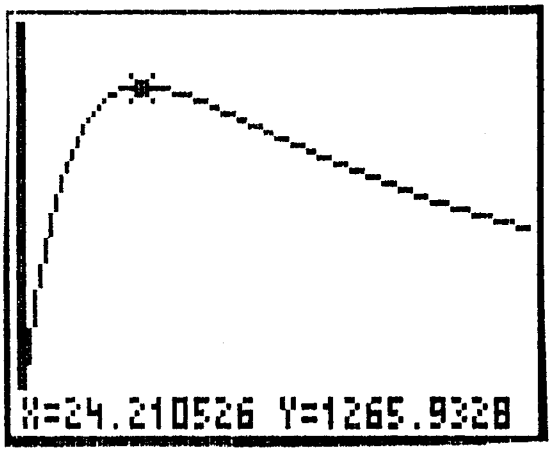


alle Scharkurven Ortskurve der Maxima

bewegte Bilder

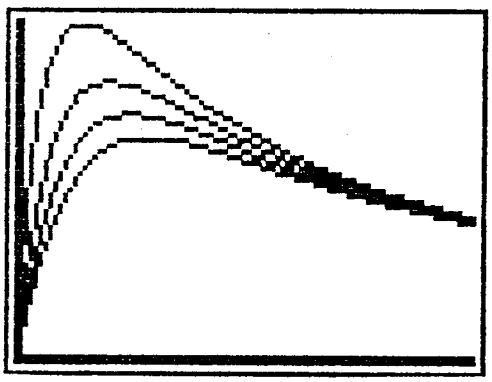
Darstellungen mit dem graphischen Taschenrechner TI 81

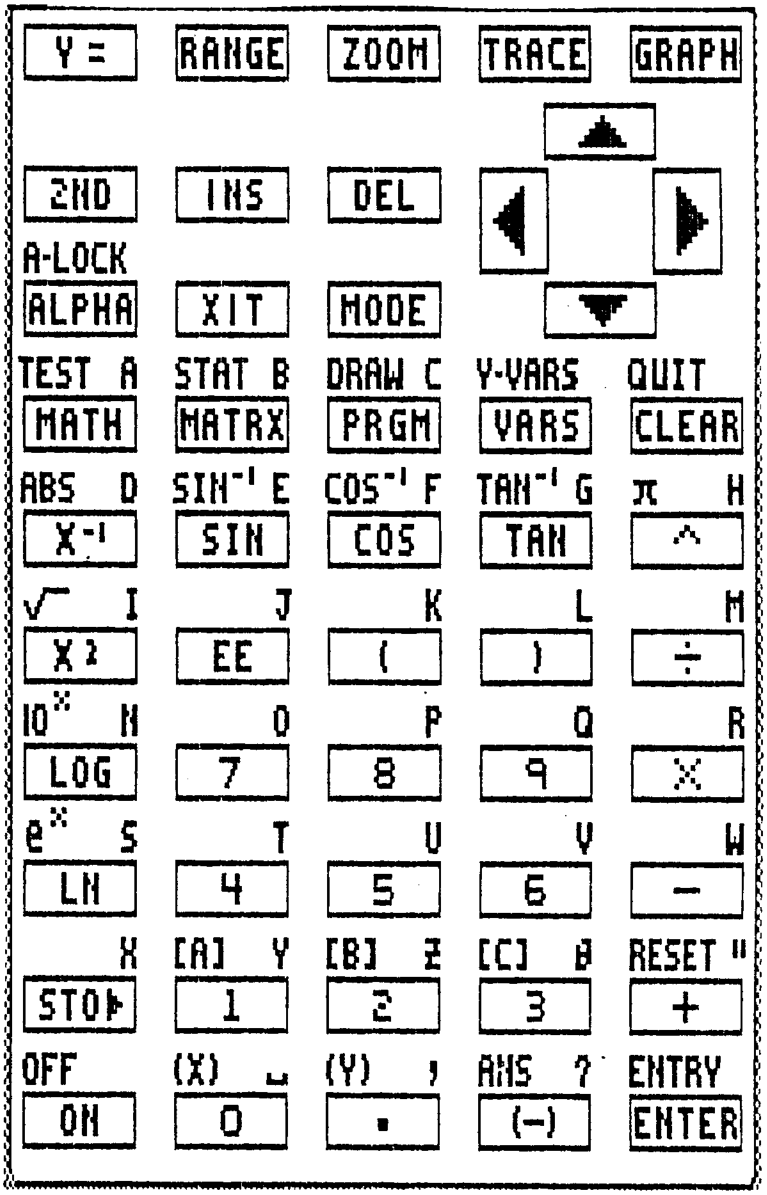
```
:Y1=1000X/(X²/10
0+X/3.6+6)
```



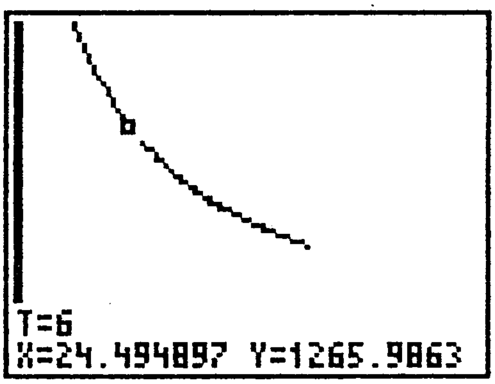

```
RANGE
Xmin=0
Xmax=100
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=1500
Yscl=1
Xres=1
```

```
:Y1=1000X/(X²/10
0+X/3.6+2)
:Y2=1000X/(X^2/1
00+X/3.6+4)
:Y3=1000X/(X^2/1
00+X/3.6+6)
:Y4=1000X/(X^2/1
00+X/3.6+8)
```






```
:X1T=10√T
:Y1T=10000/(2√T+
3)
```




```
Ranges:
  Tmin  =   .5
  Tmax  =   40
  Tstep=    .5
  Xmin  =    0
  Xmax  =  100
  Xscl  =    1
  Ymin  =    0
  Ymax  = 1800
  Yscl  =    1
```

Zur Leistungsbeurteilung

Wir gehen davon aus, daß die Problemstellung den SchülerInnen in einer offenen Form (Ausgangssituation, Seite 1) gegeben wurde und daß die Modellierung im Rahmen von Gruppenarbeit mit eigenständiger Nutzung des Computers oder des graphischen Taschenrechners erfolgte.

Eine dem Unterrichtsverlauf adäquate Leistungsbewertung erschließt sich zunächst aus der zusammenfassenden Dokumentation und Präsentation von Ergebnissen/Teilergebnissen mit der Darstellung des Lösungsweges und Begründungen. Dies kann auf der Grundlage von Protokollen und/oder Referaten erfolgen. Sinnvoll (und konsequent) dürfte hier die Bewertung der Gruppen-/Teamarbeit sein.

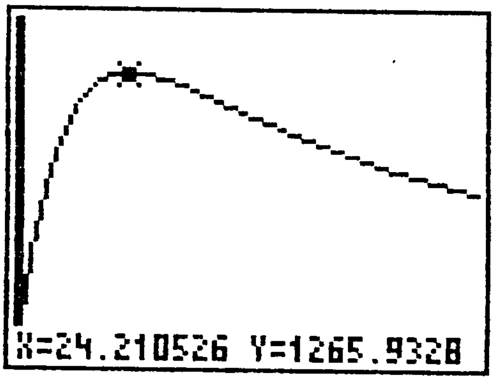
Im Rahmen des Prozesses der Modellierung und der Modellbearbeitung bringen einzelne Schülerinnen und Schüler durchaus verschiedene Leistungen ein. So wird es Experten für Sachinformationen (Fahrschule, physikalische Grundlagen u.ä) geben, andere nutzen in kompetenter Weise die (mathematischen) Möglichkeiten der verfügbaren Software. Dann gibt es SchülerInnen, die mit auffallender Kreativität weiterführende Ideen einbringen oder solche, die mit besonderer Sorgfalt Begründungen und Vertiefungen liefern. All diese Fähig-keiten können individuell als Einzelleistungen bewertet werden oder in der Epochalnote Berücksichtigung finden.

Bestimmte Arbeitsblätter (z.B. die Modellerweiterungen) eignen sich auch als Hausaufgaben, deren schriftliche oder mündliche Präsentation je nach Bearbeitung sowohl zu einer Team- als auch zu einer Einzelbewertung herangezogen werden kann. In diesem Fall ist allerdings die Verfügbarkeit der Software außerhalb des Unterrichts Voraussetzung (Computerlabor der Schule oder graphische Taschenrechner)

Schließlich können auch im Anschluß an eine solche Unterrichtseinheit geeignete Aufgaben in der Kursarbeit gestellt werden. Diese Aufgaben verlangen dann die eigenständige Zusammenfassung von Unterrichtsergebnissen unter den vorgegebenen Aspekten, können aber auch kleinere neue Erweiterungen beinhalten. In letzterem Falle ist es notwendig, ansonsten aber auch wünschenswert, daß die SchülerInnen dem Unterricht entsprechend auch während der Kursarbeit auf das geeignete Werkzeug zurückgreifen können. In bestimmtem Ausmaß wird damit auch die Kompetenz im Umgang mit dem Werkzeug (Software) bewertungsrelevant, aber dies ist eine sinnvolle aktuelle Fortschreibung von bewährten Praktiken etwa im Umgang mit Rechenstab, Tafelwerken, Taschenrechner oder auch der Formelsammlung.

Ein Beispiel für eine Aufgabe zu diesem Thema im Rahmen einer Kursarbeit wird im folgenden mit einer Skizze der erwarteten Lösung angegeben. Diese Aufgabe war eine von 5 Aufgaben im Rahmen der 1.Kursarbeit im Leistungskurs 11/2. Die SchülerInnen verfügten alle über einen eigenen graphischen Taschenrechner (TI 81), dieser wurde im vorangegangenen Unterricht neben der Software DERIVE regelmäßig eingesetzt.

Der Fahrzeugdurchsatz bei gleichmäßiger Kolonnenfahrt läßt sich mit Hilfe der folgenden Funktion beschreiben:



$$N(v) = \frac{1000v}{\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} + 6}$$

a) Erläutere den Ansatz der Funktionsgleichung

b) Interpretiere den Graph der Funktion

c) Wie ändert sich der Graph wenn man

- als mittlere Autolänge 5m anstelle 6m annimmt
- beim Anhalteweg die Faustregel "Tacho-Halbe" verwendet?

Lösungsskizze:

a) Alle Autos in der Kolonne fahren mit der gleichen Geschwindigkeit v. An einer Meßstelle bewegt sich also in einer Stunde eine Kolonne der Länge

$$L = v\frac{km}{h} \bullet 1h = vkm = 1000vm$$

Der Abstand zwischen zwei Autos beträgt $d = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} + 6$,

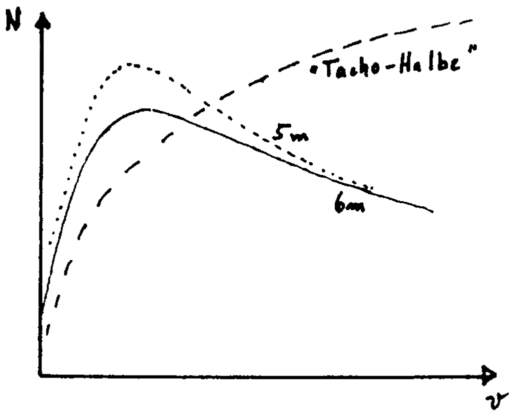
wobei $\frac{v^2}{100}$: Bremsweg, $\frac{3v}{10}$: Reaktionsweg und 6: mittlere Autolänge.

Die Anzahl Der Autos innerhalb der "Stundenkolonne" ergibt sich nun als Quotient L/d. Diese Anzahl N ist von der Geschwindigkeit v abhängig.

$$N(v) = \frac{1000v}{\frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10} + 6}$$

b) Jeder Punkt (v ; N(v)) des Graphen gibt zur Geschwindigkeit v (in km/h) den Fahrzeugdurchsatz (in Anzahl/h) an. Der Graph steigt zunächst steil an und erreicht bei v= 24.2 km/h bereits sein Maximum mit N(v)=1266. Danach fällt er flacher wieder ab. Dies bedeutet, daß bei einer Geschwindigkeit von ungefähr 24 km/h der größte Fahrzeugdurchsatz vorhanden ist.

c) Bei der kleineren Autolänge 5m verschiebt sich das Maximum nach links, d.h. der größte Fahrzeugdurchsatz wird bei einer kleineren Geschwindigkeit erreicht. Allerdings liegt dieser Maximalwert nun höher, d.h. der maximale Fahrzeugdurchsatz ist größer.



Bei der Faustregel “Tacho-Halbe“ gilt $d = \frac{v}{2} + 6$. Nun ergibt sich ein Graph, der ständig steigt, d.h. mit größerem v wird auch N(v) größer. Allerdings steigt der Graph mit zunehmender Geschwindigkeit immer weniger, der Fahrzeugdurchsatz wird nie größer als 2000.

Literatur

Zu dem hier behandelten Thema gibt es in der didaktischen Literatur eine Reihe von Abhandlungen, von denen einzelne bereits über 30 Jahre zurückliegen. Inzwischen gibt es auch bereits Darstellungen oder Aufgaben dazu in Schulbüchern zur Analysis oder zum Computereinsatz im Mathematikunterricht. In der Gesamtheit bieten sie eine Fülle von Zusatzanregungen und Erweiterungen zu der hier gewählten Darstellung.

Eine stärker physikalisch orientierte Vertiefung der Problematik ist die umfangreiche Darstellung von Rieder u.a., die viel Hintergrundwissen vermittelt. Sie kann als Grundlage zu einer projektartigen Bearbeitung des Themas oder für Facharbeiten herangezogen werden.

[1] A.Rohrberg, Das Schluckvermögen einer Straße, in Praxis der Mathematik, Heft 11/1960, Seite 296-298

[2] H.Brendl u.a., Zum Schluckvermögen einer Straße, Bemerkungen zu [1] , in Praxis der Mathematik, Heft 4/1961, Seite 100-101

[3] Rieder/Poethke/Wilms, Elementare Überlegungen über Sicherheitsabstand und Verkehrsfluß im Fernverkehr, in Studienmaterialien des Staatlichen Instituts für Lehrerfort- und -weiterbildung des Landes Rheinland Pfalz, Band 32, Speyer 1980, Seite 164 - 210.

[4] Rieder/Poethke/, Elementare Überlegungen über den Einfluß von Abstands- und Geschwindigkeitsverhalten auf den Verkehrsfluß, in Wissenschaft und Umwelt 2/1981, Seite 54-59

[5] Maximising Traffic Flow Through Tunnels, in Burghes/Huntley/McDonald: Applying Mathematics: A Course in Mathematical Modelling, New York 1982, Seite 61 - 64

[6] J. Meyer-Lerch, Verkehrsfluss und Geschwindigkeit - Ein Beitrag zur Verkehrserziehung im Rahmen des Analysis-Unterrichts der Sekundarstufe II, in: Beiträge zum Mathematikunterricht ,Hannover 1985, Seite 226-229

[7] N. Christmann, Anregungen zur Aktualisierung physikalischer Anwendungen im Eingangskurs zur Analysis (Teil I), in mathematica didacta 1985, Seite 83 ff

[8] D.Volk, Verkehrsfluss und Geschwindigkeit, MUED Schriftenreihe Unterrichtsprojekte 7, Appelhülsen-Mülheim 1986

[9] G. Schmidt, Fahrzeugdurchsatz auf Autobahnen, in Hahn/Dzewas, Analysis Grundkurse Gesamtausgabe, Braunschweig 1986, Seite 260 - 262

[10] Lergenmüller/Schmidt, Computer Zusatzband zu Lambacher/Schweizer SI, Stuttgart 1991, Seite 29/30