Wie lang muß eine Garage sein?

von Benno Grabinger

Für Tore aller Art - vom Garagentor bis zum Tor eines Geräteraums - gibt es verschiedene Türmechanismen. Gebräuchlich sind nach außen schwingende, nach innen schwingende sowie technisch aufwendige Sektionaltore die eine gliederförmige Unterteilung besitzen und beim Öffnen weder nach innen noch nach außen schwingen. Jede dieser Torlösungen besitzt Vor- und Nachteile:
Besitzt die Garage ein nach außen schwingendes Tor, so braucht selbst ein hoher Kleinbus nur eine Handbreite Abstand zum geschlossenen Tor. (Abb. 1)

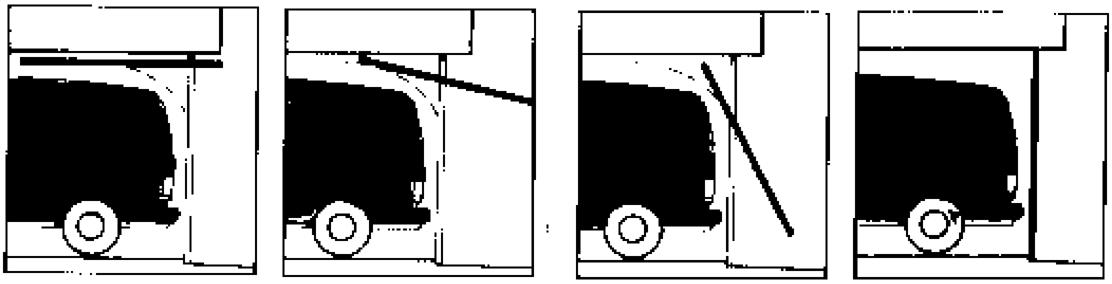


Abb. 1 (Nach: Prospekt Normstahl: Tore Türen Antriebe)

Mit dem hier benutzten Türmechanismus wird teurer Garagenraum gespart, weil das Tor beim Öffnen nicht nach innen, sondern nach außen schwingt.
Für Garagen, die direkt an öffentlich genutzte Flächen grenzen, ist ein nach außen schwingendes Tor ungeeignet. Hier sind nach innen schwingende Tore sinnvoll, bei denen das Türblatt beim Öffnen nicht über die Zarge schwingt. Die Abbildung 2 verdeutlicht den Vorteil des nach innen schwingenden Tores. Diese Lösung wird auch für Tore von Geräteräumen in Sporthallen benutzt. Ein offenstehendes Tor bildet damit keine Gefahr für herumtollende Sportler.

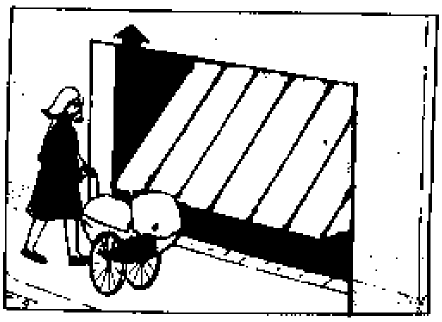


Abb. 2

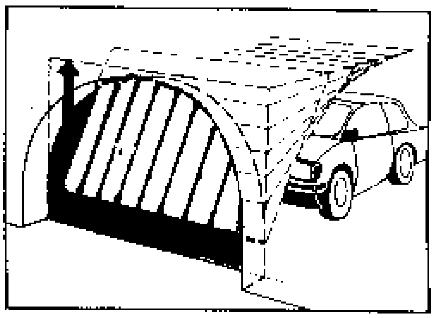


Abb. 3

(Nach: Prospekt Normstahl: Tore Türen Antriebe)

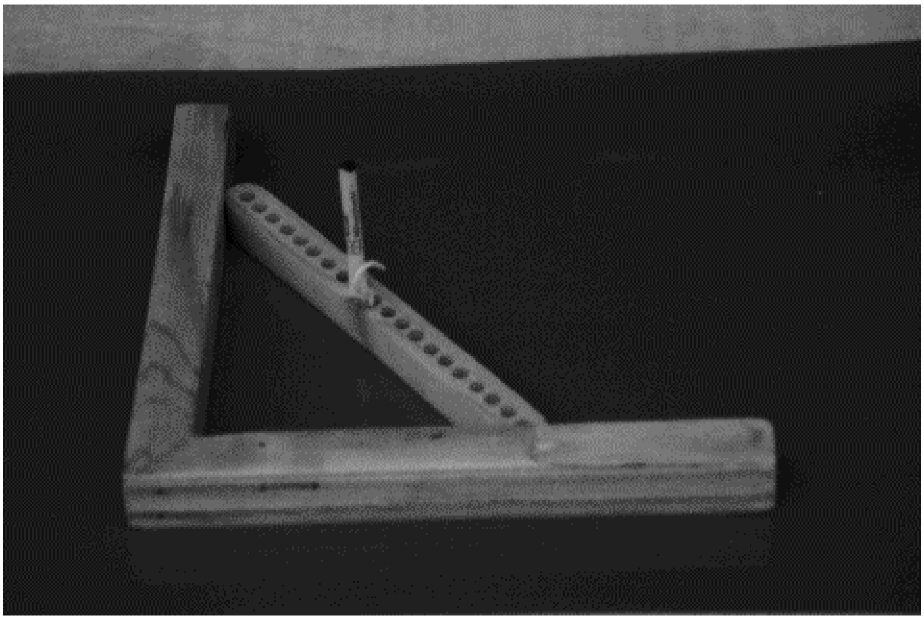
Der Nachteil eines nach innen schwingenden Tores wird in der Abbildung 3 deutlich. Das abgestellte Fahrzeug kann nicht direkt hinter der Tür stehen, die Garage muß länger als im Fall des nach außen schwingenden Tores sein.

In den folgenden Abschnitten wird ein nach innen schwingendes Tor näher untersucht.

Mit eigenen Händen

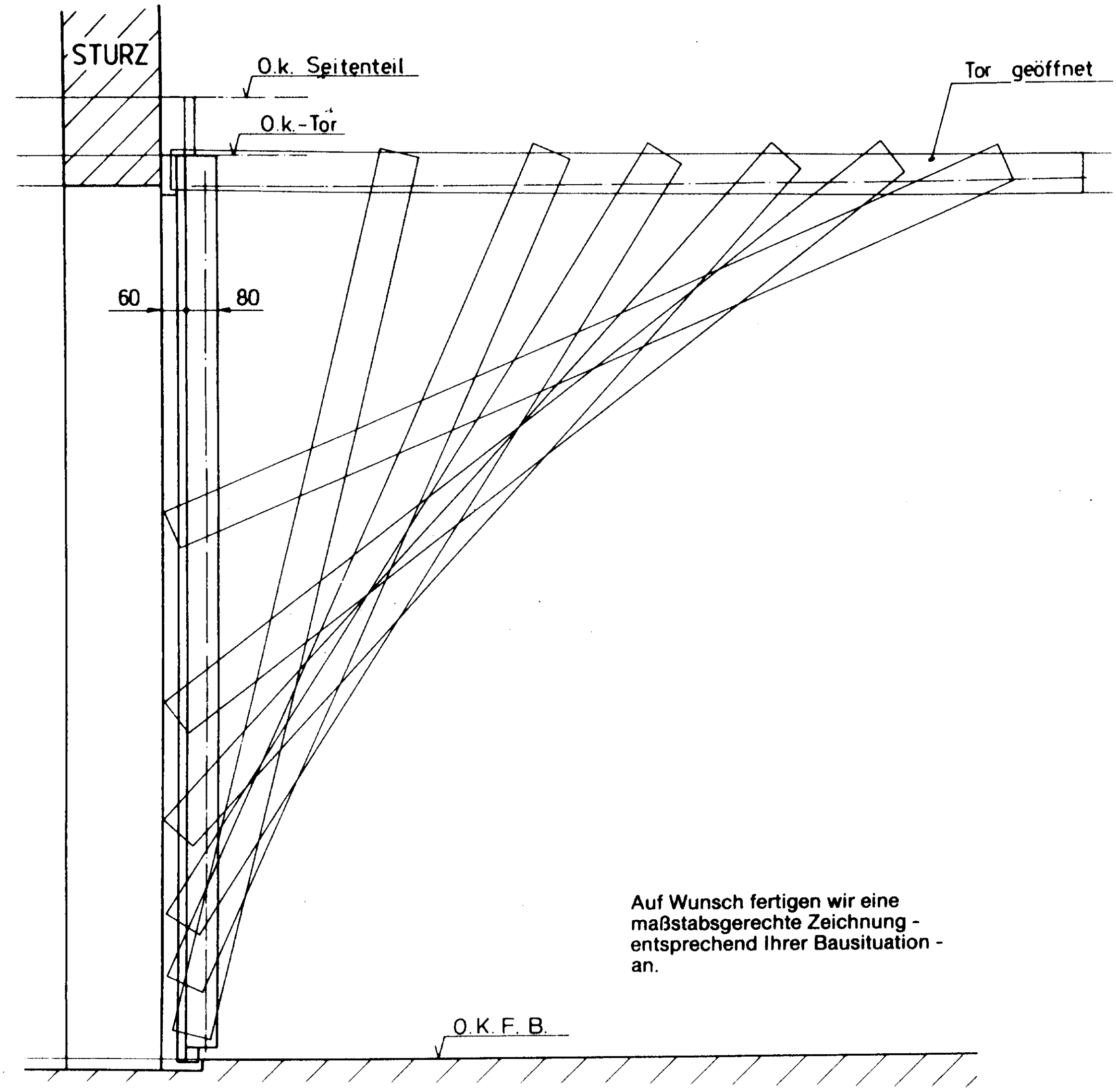
Zunächst soll ein Gefühl für die Problemstellung erworben werden. Das geht am besten dadurch, daß ein nach innen schwingendes Tor mit eigenen Händen begriffen, d.h. geöffnet wird.

Da dies sicher nicht immer möglich ist, bietet sich als Notlösung wenigstens eine eigenhändige Konstruktion an. Mit einfachsten Hilfsmitteln, einem rechten Winkel, einem Lineal (welches das Tor darstellt) und einem Blatt Papier, sollen möglichst viele Positionen des Tors eingezeichnet werden. (Abbildung)



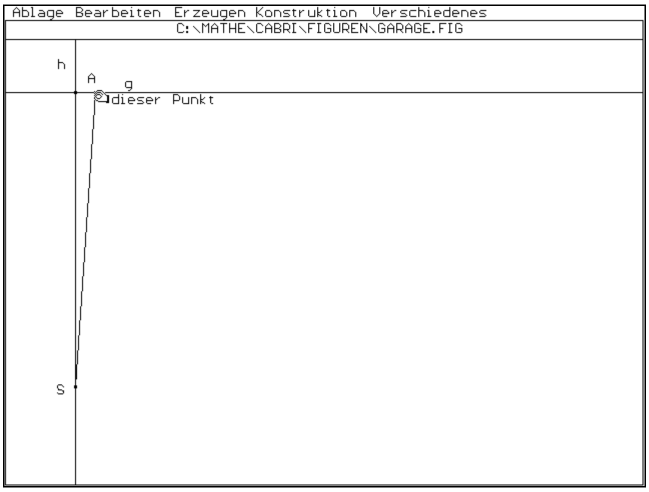
Dabei zeigt sich Interessantes. Werden hinreichend viele Torpositionen gezeichnet, so wird eine Kurve sichtbar. Man spricht von der Einhüllenden der Geraden. Die gezeichneten Geraden sind die Tangenten dieser Kurve.

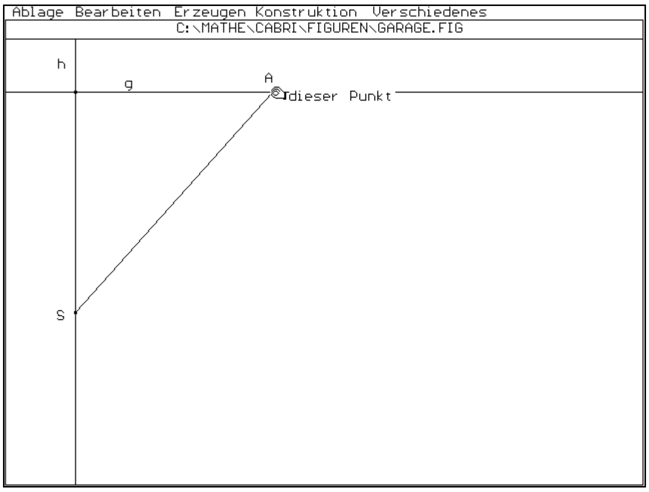
Die nächste Abbildung stammt aus der Produkt-Information Pfullendorfer Tor-Systeme, Gegengewichtstor Typ 28. Hier ist das sich öffnende Tor in verschiedenen Positionen eingezeichnet. Auch hier zeigt sich deutlich die zuvor gemachte Entdeckung. Stellt man sich das Tor für alle mögliche Positionen eingezeichnet vor, so liefert dies die Hüllkurve, die den in der Garage verfügbaren Platz bestimmt.
Außerdem verdeutlicht die Abbildung den Mechanismus eines nach innen schwingenden Tores. Das Tor besitzt eine senkrechte Führungs- und eine waagrechte Laufschiene, in denen die Torendpunkte gleiten.

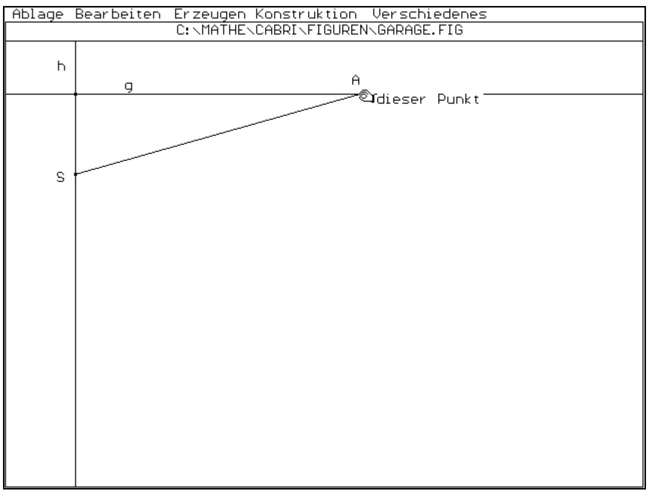


Garagenbau mit Cabri

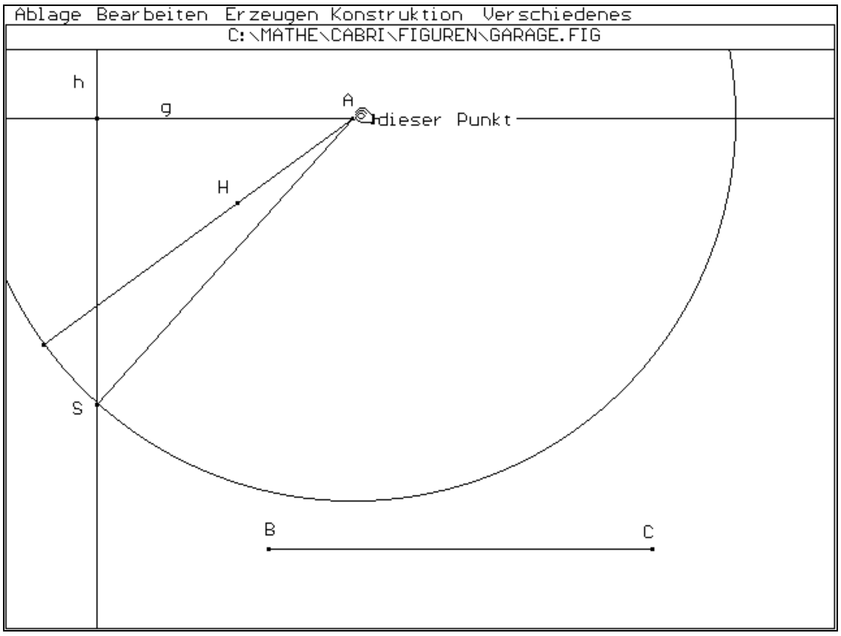
Die folgende Bildsequenz zeigt das Öffnen eines nach innen schwingenden Garagentores wie dies mit dem Programm Cabri-Geometre möglich ist. Das Bewegen des Punktes A längs der Geraden g mit Hilfe der Maus öffnet bzw. schließt das Tor.





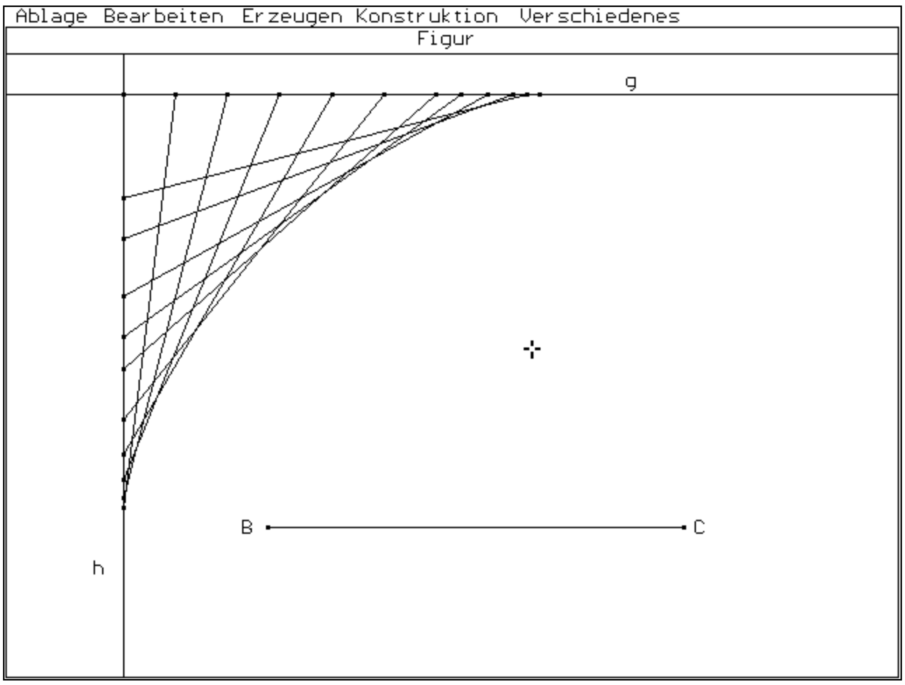


Zur Durchführung ist das in Cabri vorhandene Makro Längenübertragung hilfreich. An der folgenden Abbildung wird erläutert, wie das Garagentor gebaut wird:



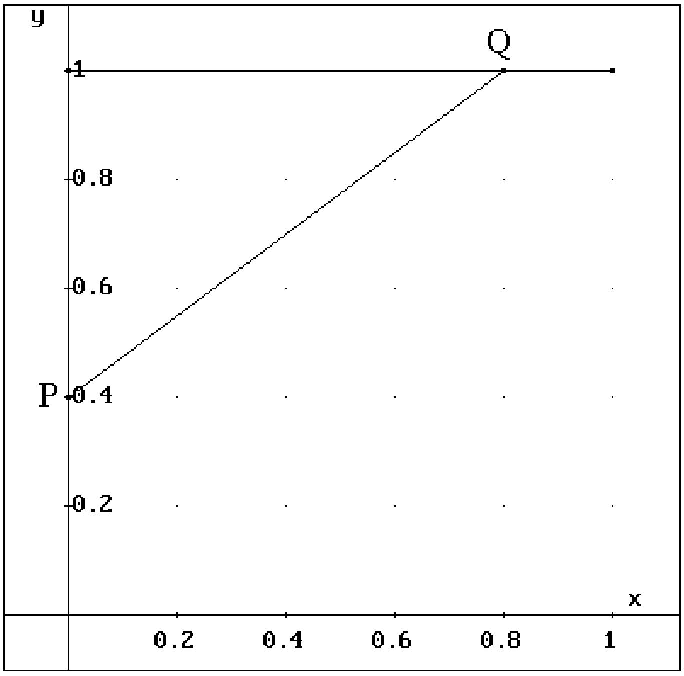
Zuerst wird die Gerade g erzeugt. Mit "Punkt auf Objekt" wird der Punkt A konstruiert. In einem weiteren Punkt der Geraden g wird das Lot h gebildet. Ein Hilfspunkt H für die später erfolgende Längenübertragung wird erzeugt. Danach erzeugt man die Strecke mit den Endpunkten B und C, deren Länge gleich der Garagentorhöhe ist. Mit dem Makro Längenübertragung wird die Länge dieser Strecke von A aus über H abgetragen. Durch den Endpunkt der Strecke wird der Kreis mit dem Mittelpunkt A erzeugt. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Lot h ist der Punkt S. Die Strecke AS gleitet längs der beiden Geraden, wenn der Punkt A bewegt wird. Die Hilfslinien der Konstruktion werden mit dem "Radierer" aus dem Menüpunkt "Objektdarstellung" verborgen.

Führt man die beschriebene Konstruktion - mittels eines Makros - mehrmals für verschiedene Punkte A der Geraden g durch, so erhält man das folgende Bild:



Jetzt wird gerechnet

Eine bestimmte Torstellung ist durch die Angabe der Koordinaten der Torendpunkte P und Q festgelegt. Die Lage des zur Beschreibung erforderlichen Koordinatensystems ist aus der Abbildung ersichtlich. Die Orientierung der x-Achse am Garagenfußboden ist naheliegend, wenngleich ein anders orientiertes Koordinatensystem die Beschreibung vereinfachen würde, davon mehr im Abschnitt "Jetzt dreht sich alles".



Aufgabe 1
Die Abbildung zeigt das Garagentor in einer Position, in der die Endpunkte des Tores durch P(0/0,4) und Q(0,8/1) gegeben sind. Für die Zeichnung wurde die Torhöhe h willkürlich gleich 1 gesetzt. Für weitere Torpositionen sind die Koordinaten der Endpunkte P und Q zu berechnen. Danach ist dann jeweils das Tor einzuzeichnen. Man überlege sich zunächst welcher formelmäßige Zusammenhang zwischen den Koordinaten der Punkte Q(a/1) und P(0/b) besteht.

Aufgabe 2
Die Zeichnung aus Aufgabe 1 soll nun mit Hilfe von DERIVE hergestellt werden.
(Hinweis: Die Strecke PQ mit P(r/s) und Q(u,v) läßt sich durch Anwendung des Plot-Befehls auf [[r , s] , [u , v]] zeichnen. Dazu muß in den "Options" die Einstellung "Connected" gewählt sein.)

Aufgabe 3
Markiere in der letzten Zeichnung von Aufgabe 2 die Schnittpunkte der Strecken, die zu "benachbarten" Torstellungen gehören.

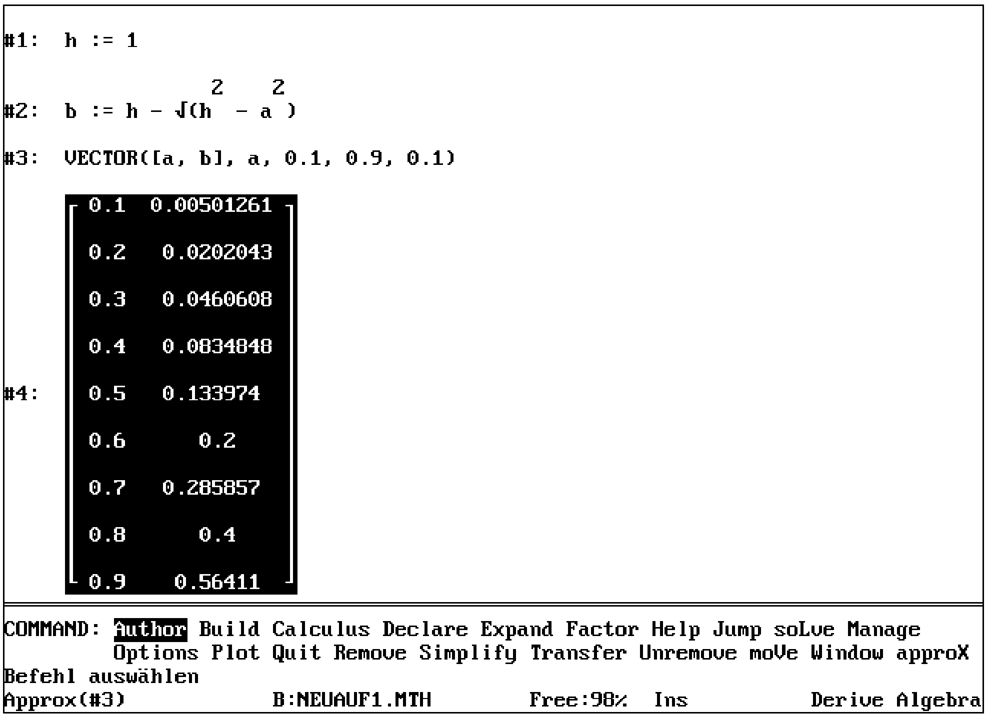
Aufgabe 4
Denkt man sich die Schnittpunktmarkierung aus Aufgabe 3 für viele Streckenpaare durchgeführt, so wird daraus die gesuchte Kurve. Skizziere den Verlauf dieser Kurve.

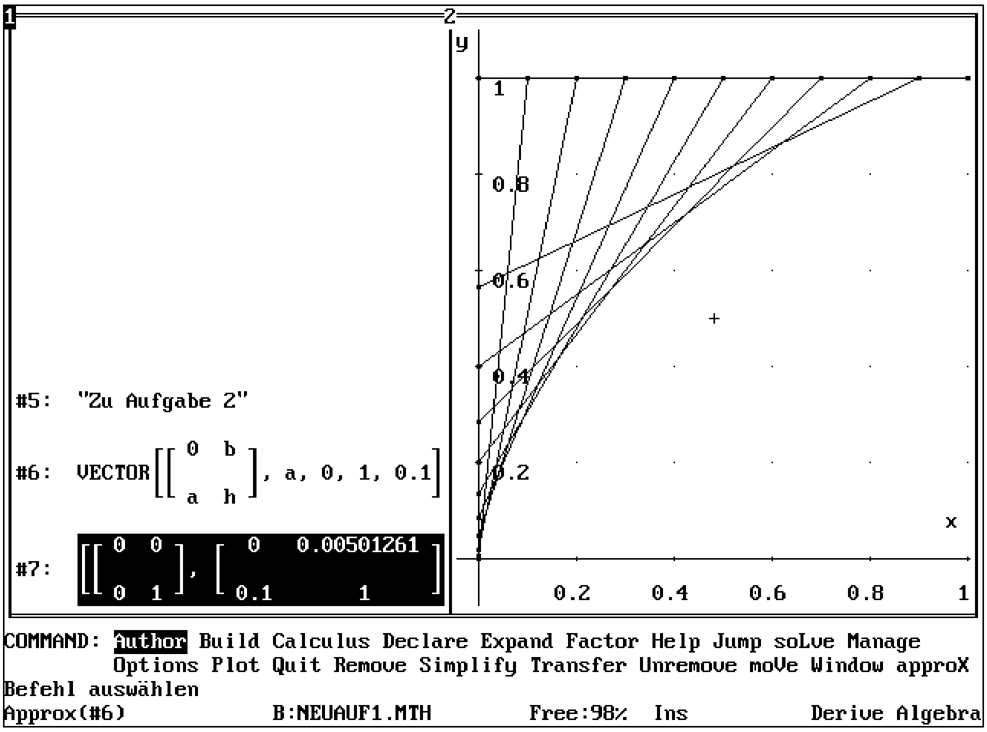
Aufgabe 5
Begründe, daß die Kurve aus Aufgabe 4 weder durch eine ganzrationale noch durch eine rationale Funktion beschreibbar ist.

zu Aufgabe 1

Für verschiedene Werte von a wird zum Punkt Q(a/1) der Punkt P(0/b) bestimmt. (Pythagoras)

Es ergibt sich $b = h - \sqrt{h^2 - a^2}$



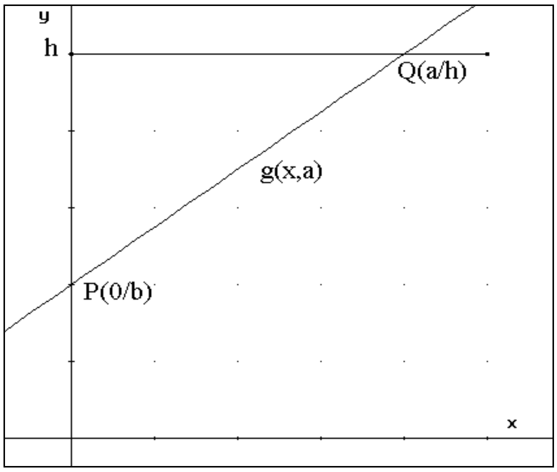


zu Aufgabe 5

Der Definitionsbereich ist D=[0,h]. Im Punkt P(0/0) ist die Funktion nicht differenzierbar. Rationale Funktionen sind dagegen in allen Punkten des Definitionsbereichs differenzierbar.

Geraden und Tore

Für weitere Untersuchungen ist es sinnvoll, nicht nur die Torendpunkte zu kennen, sondern auch alle übrigen Punkte des Tores. Das wird möglich, wenn es gelingt, die Gleichung der Geraden anzugeben, welche die Strecke PQ (d.h. das Tor) als Teil enthält.



Aufgabe 6

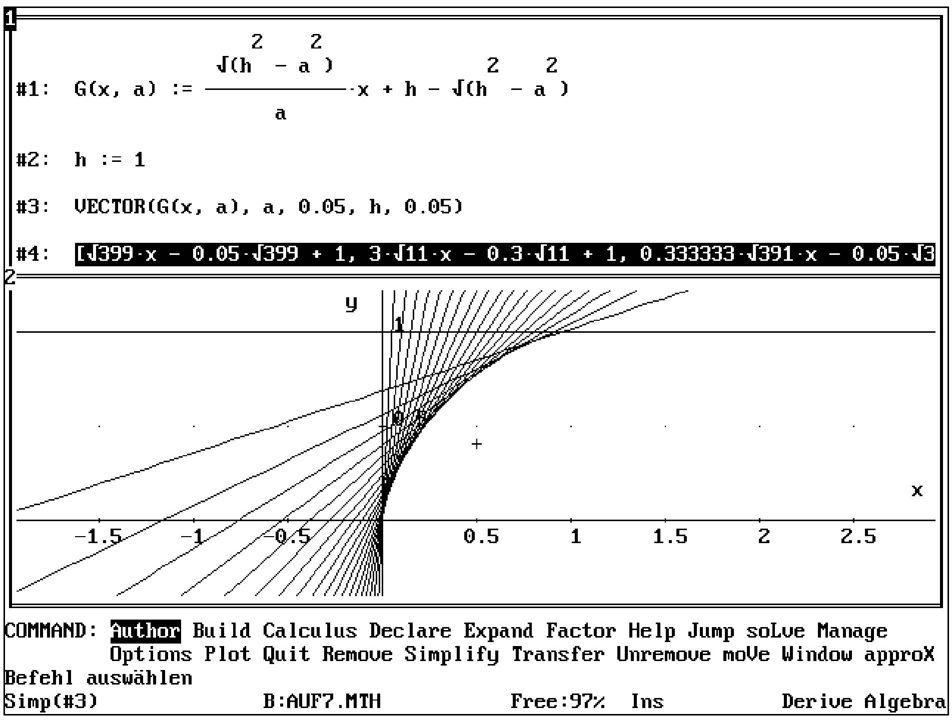
Zeige, daß die Gerade g(x,a), die durch die Punkte P(0/b) und Q(h,a) verläuft, durch die folgende Gleichung beschrieben wird. Dabei ist h die Torhöhe.

$$g(x,a) = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} x + h - \sqrt{h^2 - a^2}$$

Aufgabe 7

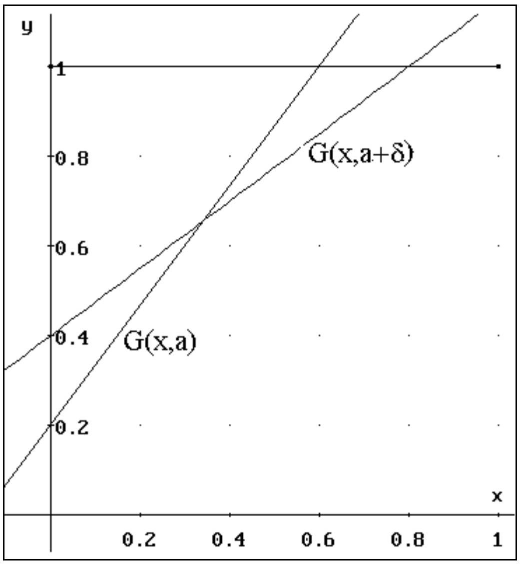
Zeichne mit Hilfe von DERIVE die Schar der Geraden g(x,a) für $a \in [0{,}05\ ;\ h]$, Schrittweite 0,05 und h=1.

zu Aufgabe 7



Des Rätsels Lösung

Die bisherigen Aufgaben lassen vermuten, daß die Schnittpunkte beliebig benachbarter Geraden die gesuchte Kurve bilden. Hier soll nun die Gleichung dieser Kurve bestimmt werden.
Eine zur Geraden g(x,a) benachbarte Geraden erhält man durch Änderung des Wertes von a. Die Abbildung zeigt zwei Geraden, die sich im Wert des Parameters um δ unterscheiden.



Aufgabe 8

Berechne mit Hilfe von DERIVE die x-Koordinate des Schnittpunktes der beiden Geraden.

Aufgabe 9

Um die gesuchte Kurve zu erhalten, muß der Wert von δ gegen Null streben. Bilde den Grenzwert für δ gegen Null von dem in Aufgabe 7 bestimmten x-Wert des Schnittpunktes.
Ermittle dann den Wert der y-Koordinate des Schnittpunktes.
Weise durch Rechnen in DERIVE nach, daß die Parameterdarstellung der gesuchten Kurve durch $\left[x(a) = \frac{a^3}{h^2},\, y(a) = h - \frac{(h^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2} \right]$ gegeben ist.

Aufgabe 10

Die x-Koordinate und die y-Koordinate des Schnittpunktes enthalten a als Parameter.
Setze für h den Wert 1 ein und lasse den Graph zeichnen. Benutze dazu die Möglichkeit, daß DERIVE den Graphen einer in Parameterdarstellung [x(a),y(a)] gegebenen Kurve zeichnen kann. Dabei muß a das Intervall [0 ; h] durchlaufen.

Aufgabe 11

Eliminiere aus der Parameterdarstellung der Kurve den Parameter a und zeige, daß sich für die Gleichung der Kurve der Ausdruck $x^{\frac{2}{3}} + (h - y)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$ ergibt.

zu Aufgabe 8

#1: $G(x, a) := \dfrac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \cdot x + h - \sqrt{h^2 - a^2}$

#2: $G(x, a) = G(x, a + \delta)$

#3: "SoLve #2:"

#4: $x = \dfrac{a \cdot (a + \delta) \cdot \left(\sqrt{- a^2 - 2 \cdot a \cdot \delta - \delta^2 + h^2} - \sqrt{h^2 - a^2}\right)}{a \cdot \sqrt{- a^2 - 2 \cdot a \cdot \delta - \delta^2 + h^2} - (a + \delta) \cdot \sqrt{h^2 - a^2}}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve

zu Aufgabe 9

#5: $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{a \cdot (a + \delta) \cdot \left(\sqrt{- a^2 - 2 \cdot a \cdot \delta - \delta^2 + h^2} - \sqrt{h^2 - a^2}\right)}{a \cdot \sqrt{- a^2 - 2 \cdot a \cdot \delta - \delta^2 + h^2} - (a + \delta) \cdot \sqrt{h^2 - a^2}}$

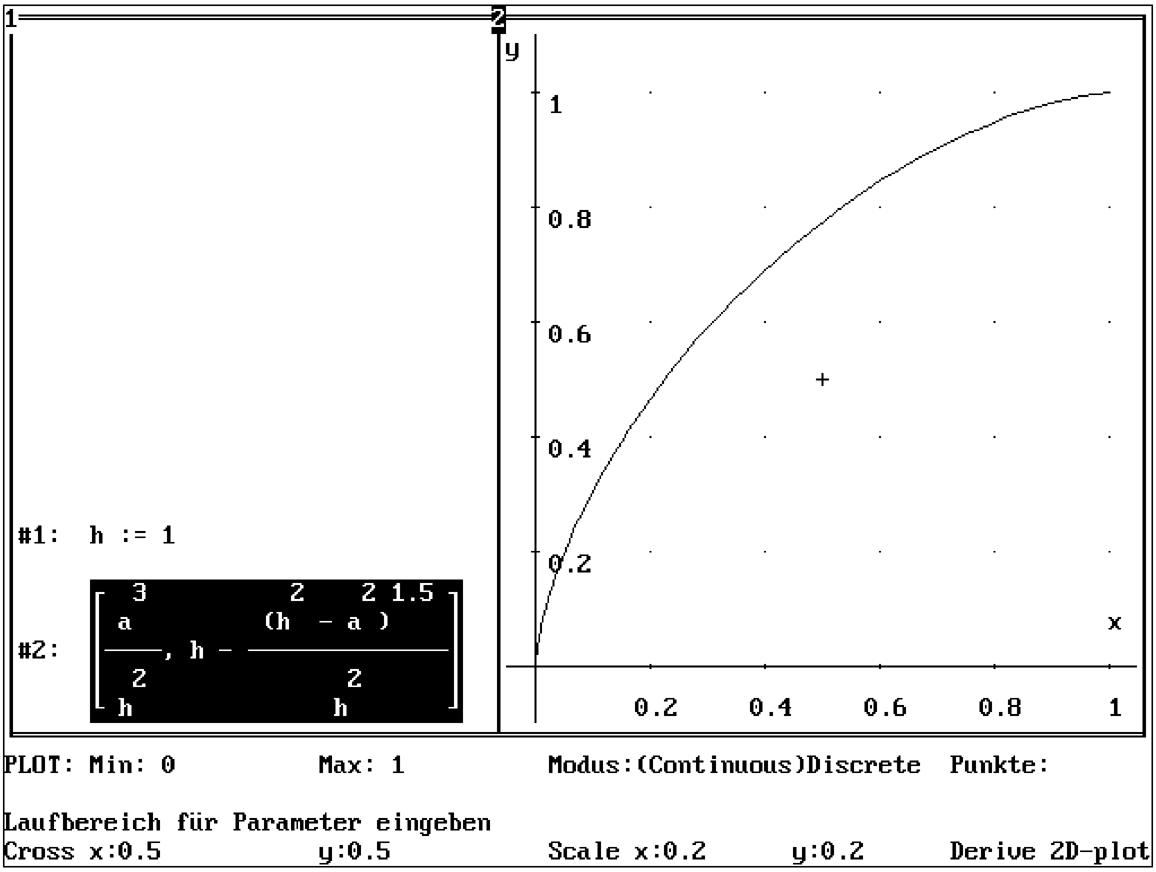
#6: $\dfrac{a^3}{h^2}$

#7: $G\left[\dfrac{a^3}{h^2}, a\right]$

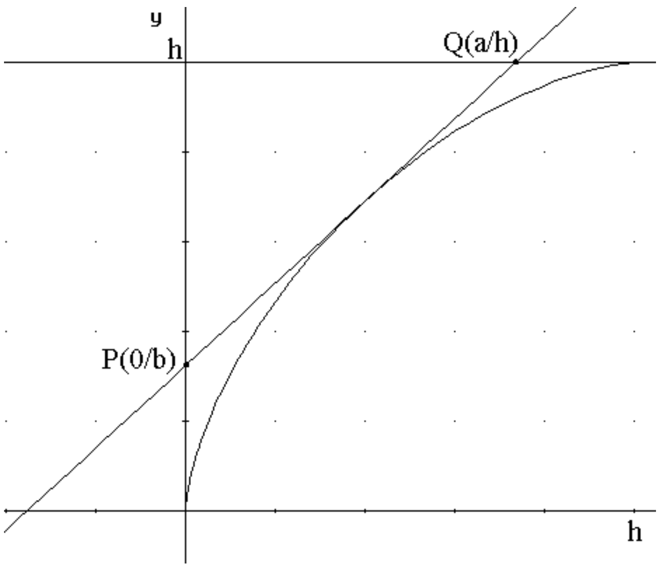
#8: $h - \dfrac{(h^2 - a^2)^{1.5}}{h^2}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Befehl auswählen
Simp(#7) B:LIMES.MTH Free:99% Ins Derive Algebra

zu Aufgabe 10



Ist auch alles richtig?



Bisher wurde noch nicht nachgeprüft, ob die durch die Schnittpunktbestimmung und den Grenzübergang gewonnene Gleichung tatsächlich auch die ursprünglich geforderte Eigenschaft besitzt, daß nämlich die y-Achse und die Gerade y=h aus den Tangenten an die Kurve stets die Strecke h ausschneiden.
Dazu muß gezeigt werden, daß für jede Tangente an die Kurve

$$x^{\frac{2}{3}} + (h-y)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$$

die Verbindungsstrecke der Punkte P(0/b) und Q(a/h) die Länge h besitzen. Das soll hier nachgewiesen werden.

Aufgabe 12

Leite her, daß die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + (h-y)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$ im Punkt $P_0(x_0/y_0)$ die Tangentensteigung

$y' = \left(\frac{h-y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}$ besitzt.

Aufgabe 13

Zeige, daß die Gleichung der Tangente im Punkt $P_0(x_0/y_0)$ an den Graph der Funktion f die

folgende Gleichung besitzt: $t(x) = \left(\frac{h-y_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{3}}(x-x_0) + y_0$

Aufgabe 14

Benutze die Ergebnisse der letzten Aufgaben, um zu zeigen:
Die Tangente an die Kurve im Punkt $P_0(x_0/y_0)$ schneidet die y-Achse im Punkt
$P(0/y_0 - x_0^{\frac{2}{3}}(h-y_0)^{\frac{1}{3}})$ und die Gerade y=h im Punkt $Q(h/x_0^{\frac{1}{3}}((h-y_0)^{\frac{2}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}))$

Aufgabe 15

Berechne mit dem Ergebnis der letzten Aufgabe die Länge der Verbindungsstrecke der Punkte P und Q und zeige, daß sich h ergibt.

zu Aufgabe 12
Die DERIVE-Hilfsdatei DIF_APPS.MTH bietet die Möglichkeit, Funktionen zu differenzieren, die in impliziter Form vorliegen:

#1: "Transfer Load Utility DIF_APPS.MTH"

#2: Notation := Rational

#3: $\text{IMP\_DIF}\left(x^{2/3} + (h - y)^{2/3} - h^{2/3},\ x,\ y,\ 1\right)$

#4: $\dfrac{(h - y)^{1/3}}{x^{1/3}}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve

zu Aufgaben 13-15
Die DERIVE-Hilfsdatei DIF_APPS.MTH gestattet die Bildung der Tangentengleichung T(x) im Punkt $P_0(x_0/y_0)$. (Zeilen #3-#5). Der Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse ergibt sich als b=T(0). (Zeilen #6-#7)

#1: "Transfer Load Utility DIF_APPS.MTH"

#2: InputMode := Word

#3: $\text{IMP\_TANGENT}\left(x^{2/3} + (h - y)^{2/3} - h^{2/3},\ x,\ y,\ x0,\ y0\right)$

#4: $\dfrac{x \cdot (h - y0)^{1/3} - x0 \cdot (h - y0)^{1/3} + y0 \cdot x0^{1/3}}{x0^{1/3}}$

#5: $T(x) := \dfrac{x \cdot (h - y0)^{1/3} - x0 \cdot (h - y0)^{1/3} + y0 \cdot x0^{1/3}}{x0^{1/3}}$

#6: b := T(0)

#7: $y0 - x0^{2/3} \cdot (h - y0)^{1/3}$

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Befehl auswählen
Simp(#6) B:NACHWEIS.MTH Free:95% Ins Derive Algebra

Den Schnittpunkt mit der Geraden y=h erhält man durch Lösen der Gleichung T(a)=h. (Zeilen #8-#10 des nächsten DERIVE-Bildschirms.)

Die Bestimmung des Abstandes der Punkte P und Q macht die Berechnung von $\sqrt{a^2+(h-b)^2}$ erforderlich. Der Radikant wird in den Zeilen #11 und #12 berechnet. Wie der Kundige sofort sieht, stellt die Zeile #12 den Ausdruck $\left(x_0^{\frac{2}{3}}+(h-y_0)^{\frac{2}{3}}\right)^3$ dar. Diese Einsicht bleibt dem DERIVE-System leider verborgen. Ein Zusammenfassen der Zeile #12 gelingt DERIVE nicht. Durch Expandieren von $\left(x_0^{\frac{2}{3}}+(h-y_0)^{\frac{2}{3}}\right)^3$ läßt sich aber die Gleichheit der Terme nachweisen.

```
#8:  T(a) = h

           1/3           2/3     2/3
#9:  a = x0   ·((h - y0)    + x0   )

            1/3           2/3     2/3
#10: a := x0   ·((h - y0)    + x0   )

      2         2
#11: a  + (h - b)

         2/3         4/3       4/3         2/3    2              2     2
#12: 3·x0   ·(h - y0)    + 3·x0   ·(h - y0)    + h  - 2·h·y0 + x0  + y0

#13: "Expandieren des nächsten Ausdrucks liefert dasselbe:"

        2/3          2/3 3
#14: (x0    + (h - y0)   )

         2/3         4/3       4/3         2/3    2              2     2
#15: 3·x0   ·(h - y0)    + 3·x0   ·(h - y0)    + h  - 2·h·y0 + x0  + y0

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Befehl auswählen
Expd(#14)             B:NACHWEIS.MTH       Free:95%  Ins          Derive Algebra
```

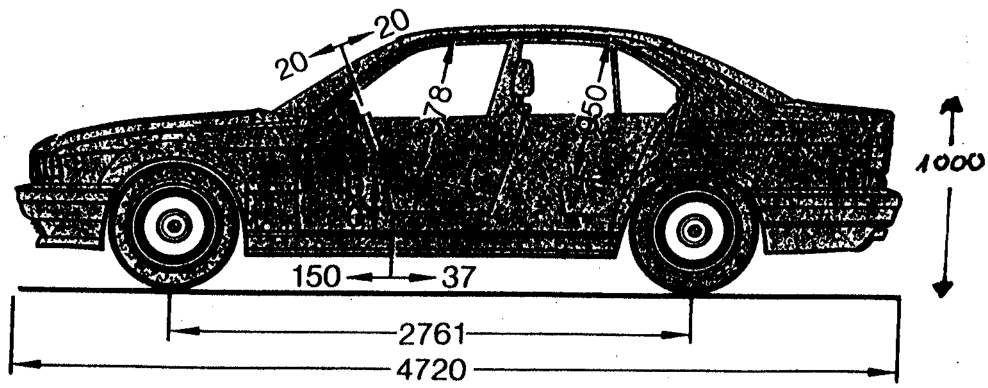
Der Abstand der Punkte P und Q ist dann: $\sqrt{\left(x_0^{\frac{2}{3}}+(h-y_0)^{\frac{2}{3}}\right)^3}=\sqrt{\left(h^{\frac{2}{3}}\right)^3}=h$

Welcher Raum geht verloren?

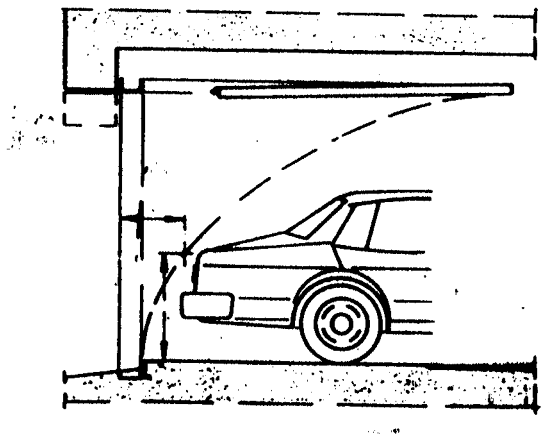
Wie bereits festgestellt, muß ein Fahrzeug bei einem sich nach innen öffnenden Tor einen Abstand vom Tor lassen. Dieser soll hier für einen konkreten Fall bestimmt werden.

Aufgabe 16

Ein deutsches Automobil (Maße in mm siehe Skizze) soll in eine Garage mit nach innen schwingendem Tor eingeparkt werden. Die Torhöhe beträgt 2,15 m.
(Abbildung aus Prospekt: „Die BMW 5er Reihe")



Wie weit muß das Fahrzeug von der Vorderkante der Garage weg stehen, damit das Tor geschlossen werden kann, ohne daß das Fahrzeug berührt wird?



Untersuche dies, falls das Fahrzeug wie gezeichnet vorwärts in die Garage eingeparkt wird.

zu Aufgabe 16

```
      2/3           2/3    2/3
#1:  x    + (h - y)    = h

#2:  "Rechnung in der Einheit Meter:"

#3:  h := 2.15

#4:  y := 1

      2/3           2/3    2/3
#5:  x    + (h - y)    = h

#6:  Notation := Rational

#7:  "soLve #5"

                      1/3              1/3
          ┌    129·22747       69·42527       33 ┐
#8:  x = √│- ───────────── + ───────────── + ────│
          └       400             400         10 ┘

#9:  x = 0.428256

COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump soLve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove moVe Window approX
Rechenzeit: 0.0 Sekunden
Approx(#8)          B:LÄNGE.MTH          Free:100% Ins          Derive Algebra
```

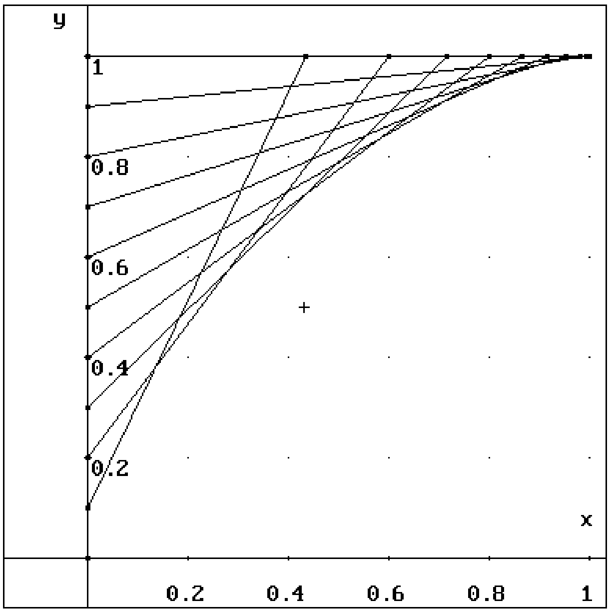
Fährt das Auto vorwärts in die Garage, dann müssen etwa 43 cm Abstand zum Tor bleiben.

Wie Punkte sich bewegen

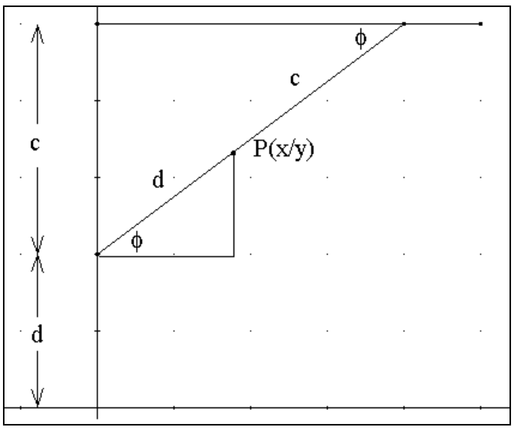
Auf welcher Bahn bewegt sich ein Punkt, z.B. der Griff des nach innen schwingenden Tors beim Öffnen? Man kann zunächst eine grobe Vorstellung für die gesuchte Bahn bekommen, wenn man einen festen Punkt des Tors in verschiedenen Torstellungen markiert.

Aufgabe 17

Markiere im folgenden Bild für jede gezeichnete Torstellung den Punkt des Tores, der sich in der Entfernung 0,2 vom unteren Torende befindet. Verbinde die markierten Punkte so, daß die gesuchte Bahn sichtbar wird. Wiederhole das Verfahren auch für andere Punkte des Tores.



Um die Gleichung der Bahnkurve zu bekommen, betrachtet man einen beliebigen Punkt P des Tors, der in geschlossener Torstellung in der Höhe d über dem Fußboden liegt. Welche Koordinaten (x/y) besitzt dieser Punkt, wenn das Tor den Winkel ϕ mit der Horizontalen einschließt?

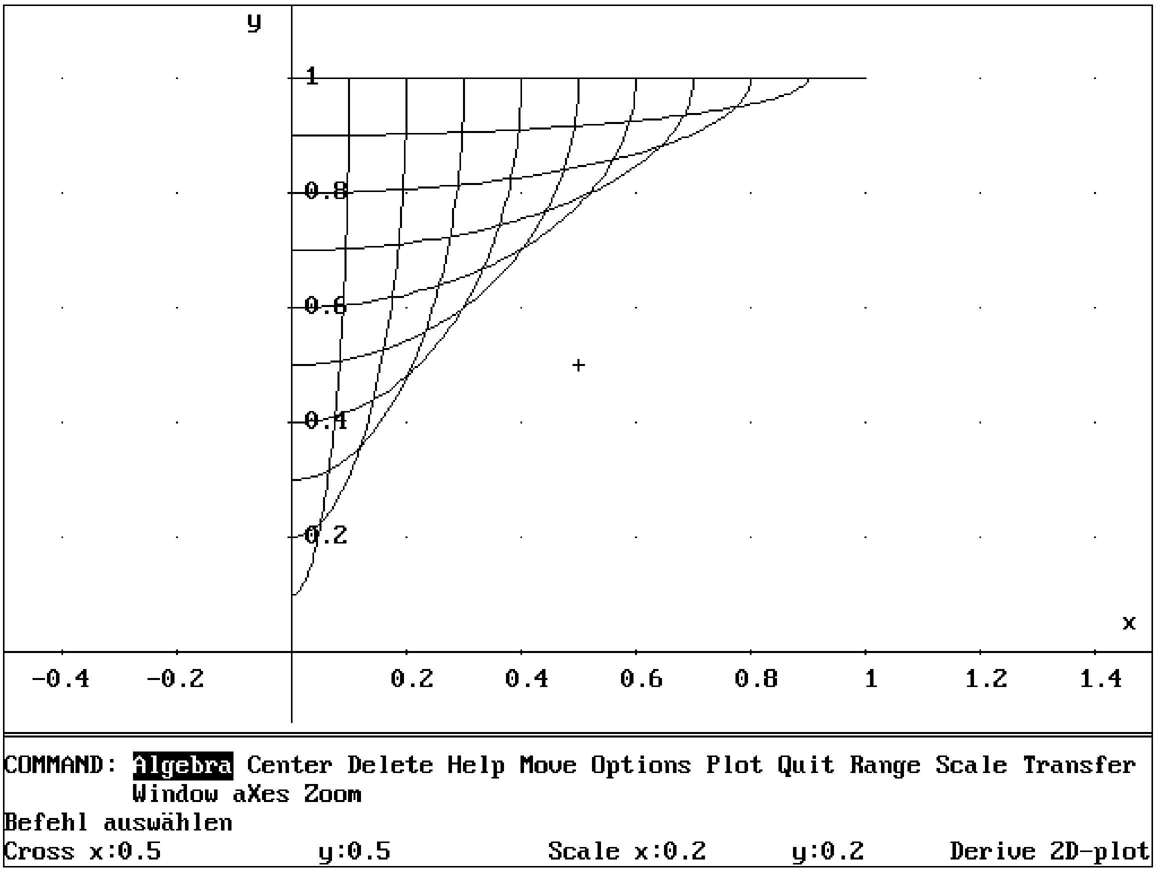


Aufgabe 18

Benutze die Zeichnung um die Koordinaten von P in Abhängigkeit von ϕ darzustellen. Eliminiere dann den Parameter ϕ und zeige, daß die Bahnkurve der Gleichung

$\frac{x^2}{d^2} + \frac{(h-y)^2}{c^2} = 1$ genügt.

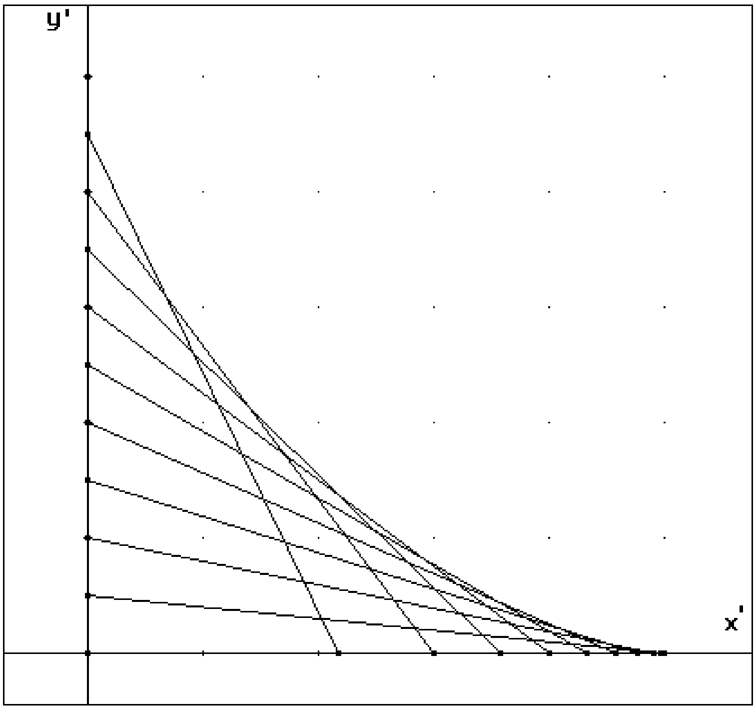
zu Aufgabe 17
Die Abbildung zeigt das Aussehen der gesuchten Bahnen.



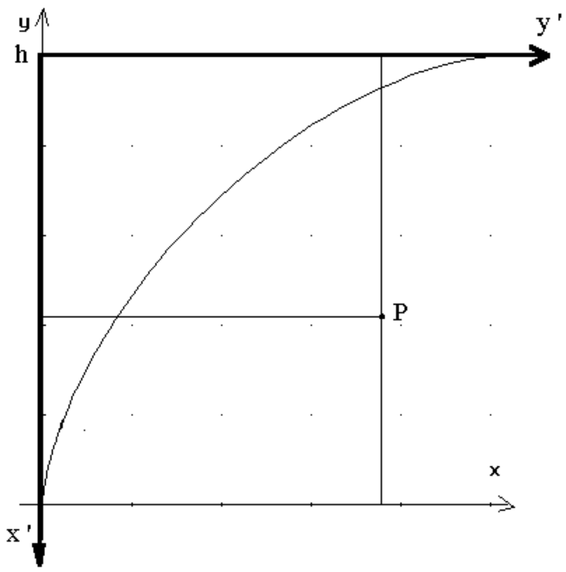
zu Aufgabe 18
Es ist x(ϕ)=d cos(ϕ) und y(ϕ)=h-c sin(ϕ). Auflösen dieser Beziehungen nach cos(ϕ) und sin(ϕ), quadrieren und addieren liefert die behauptete Form.

Jetzt dreht sich alles

Ein bekanntes Mathematikproblem ist das der "Gleitenden Leiter".



Eine Strecke (die Leiter) der Länge h gleitet so, daß ihre Enden stets auf den Koordinatenachsen liegen. Die Verwandtschaft zum sich nach innen öffnenden Garagentor ist offensichtlich. Sei S das Koordinatensystem in dem bisher das Garagentorproblem beschrieben wurde. Verschiebt man das Koordinatensystem S um h in positive y-Richtung und dreht dann um $\pi/2$, so erhält man das in der obigen Abbildung dargestellte Koordinatensystem S'.



Für einen beliebigen Punkt P gilt die folgende Koordinatentransformation:

x ' = h - y

y ' = x

Wendet man diese Transformation auf die Kurvengleichung $x^{\frac{2}{3}} + (h - y)^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$ an, so ergibt sich:

$$y'^{\frac{2}{3}} + (h - (h - x'))^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$$, bzw.

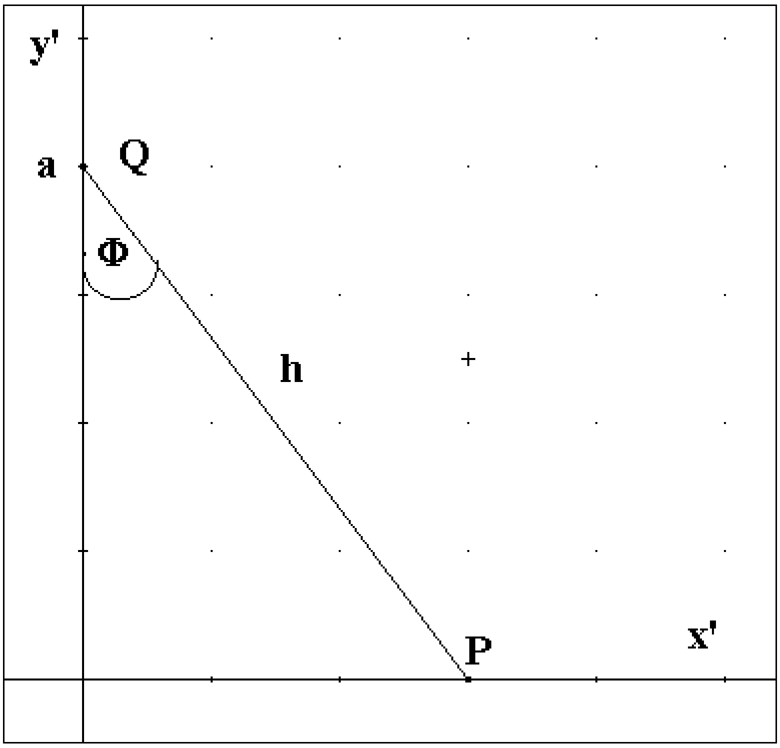
$$x'^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = h^{\frac{2}{3}}$$

In dieser Form ist die Kurve unter dem Namen Astroide. (griech. Stern) bekannt.

Entsprechend transformiert sich die Parameterdarstellung der Kurve

$$\left[x(a) = \frac{a^3}{h^2},\, y(a) = h - \frac{(h^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2} \right] \text{ in } \left[x'(a) = \frac{(h^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{h^2},\, y'(a) = \frac{a^3}{h^2} \right]$$

Es soll nun der Winkel Φ, den die gleitende Leiter mit der y'-Achse einschließt, zur Beschreibung benutzt werden.



Aufgabe 19

Zeige, daß sich bei Verwendung von Φ die folgende Parameterdarstellung ergibt:

$$x'(\Phi) = h\sin^3(\Phi),\;\; y'(\Phi) = h\cos^3(\Phi),\;\; \Phi \in \left[0, \frac{p}{2}\right].$$

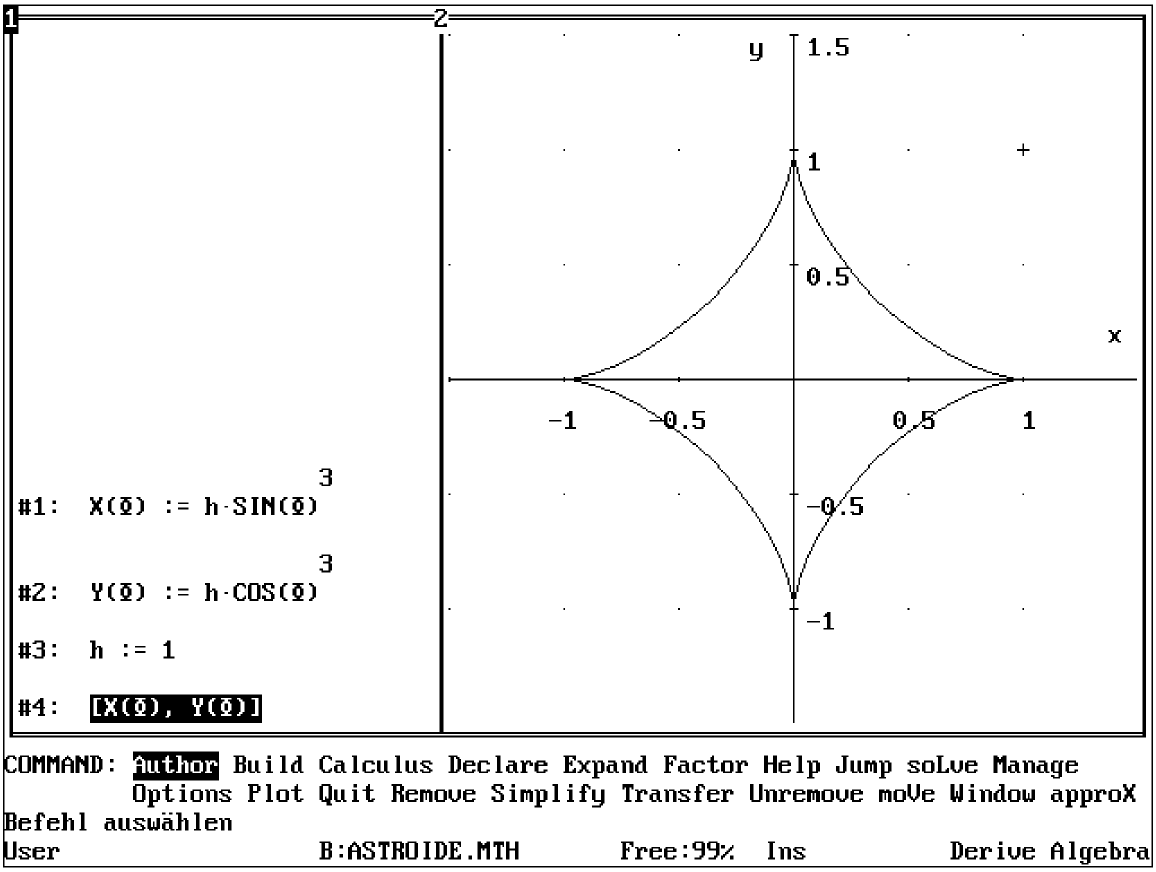
Aufgabe 20

Es liegt nahe zu untersuchen, welche Kurve die Parameterdarstellung $x'(\Phi) = h\sin^3(\Phi),\;\; y'(\Phi) = h\cos^3(\Phi)$ für Winkel liefert, die größer als π/2 sind. Für das Problem des Garagentores hat diese Überlegung natürlich keine Bedeutung mehr.
Untersuche, was die Parameterdarstellung für Winkel Φ>π/2 liefert.

zu Aufgabe 19

Aus der Abbildung ist ersichtlich: $\cos(\Phi) = \frac{a}{h}$. Auflösen nach a und einsetzen in $y' = \frac{a^3}{h^2}$ liefert die behauptete Darstellung. Entsprechend geht man für x' vor.

zu Aufgabe 20



Durchläuft Φ das Intervall [0 , 2π], so liefert die Parameterdarstellung eine geschlossene Kurve, die Astroide. (griech. Stern)