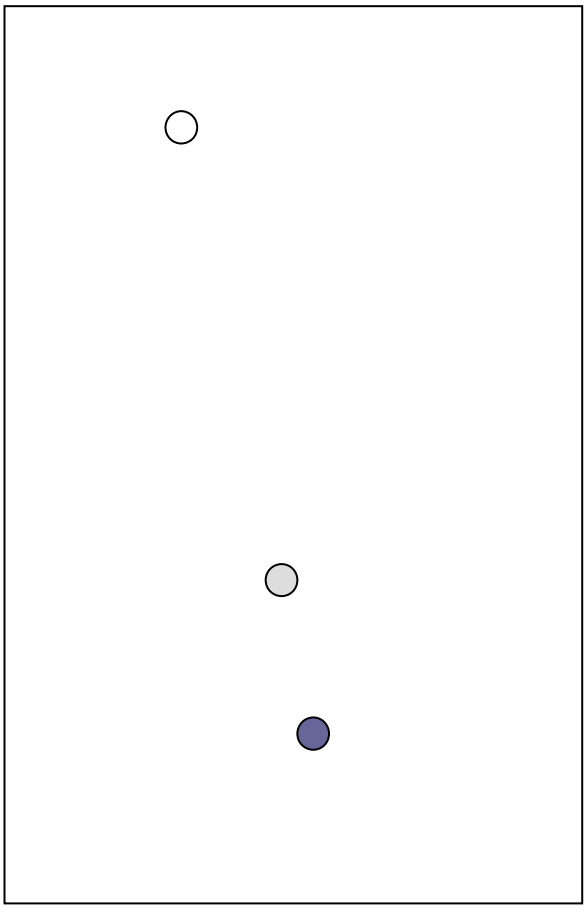
Aufgabeneinheit 2: Billardkugel, wohin gehst du?

Michael Lamberty / Peter Staudt

So ein Ärger: Die mittlere (gelbe) Kugel liegt Theo im Weg. Kann Theo trotzdem mit seiner weißen Spielkugel die schwarze Kugel treffen?



Methodische Hinweise

Das Problem ist sehr offen gestellt. Die Lehrerinnen und Lehrer müssen überlegen und entscheiden, ob ein solch offener Einstieg für ihre Klasse bzw. Klassen geeignet ist.

Die Schülerinnen und Schüler sollen sich Möglichkeiten ausdenken und ausprobieren, die schwarze Kugel mit der weißen zu treffen. Dies muss über einen Bandenstoß erfolgen, da der direkte Weg durch eine andere Kugel versperrt ist. Dabei müssen die Schülerinnen und Schüler intuitiv oder auf Grund ihres Vorwissens davon Gebrauch machen, dass eine Kugel im gleichen Winkel von einer Bande abprallt, in dem sie auftrifft. Gegebenenfalls müssen hier Hilfestellungen gegeben werden. Eine dezente Hilfe wäre, nur das folgende Bild zu zeigen:

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie die Schülerinnen und Schüler explorativ tätig werden können (außer einem aufwändigen Experimentieren an einem Billardtisch):

– Auf dem Arbeitsblatt sind ein Rechteck (Billardtisch) und drei Punkte (Kugeln) vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler untersuchen mit dem Geodreieck verschiedene Wege der weißen Kugel.
– Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit einem Geometrieprogramm (z.B. DynaGeo, Geonext oder Geogebra).

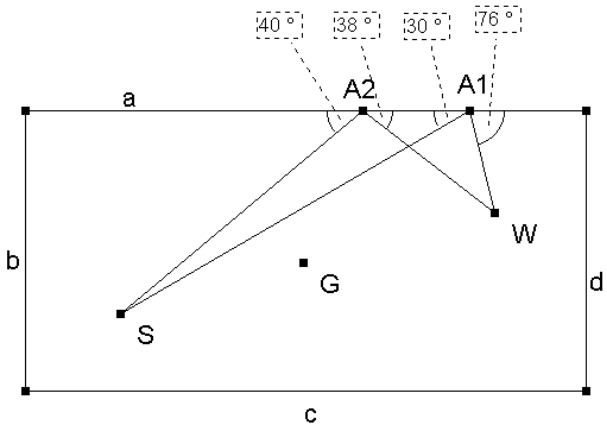
Anmerkung: Grundsätzlich ist die Reduktion auf den zentralen Stoß durchzuführen, da sonst Winkelbänder zu betrachten wären.

Mögliche Lösungswege:

Vor Einsatz der Aufgabe im Unterricht sollten die Lehrkräfte mögliche Lösungsstrategien der Schülerinnen und Schüler reflektieren und ggf. Hilfen bereitstellen. Im Folgenden werden zwei Wege vorgestellt:

1. Auf einer naheliegenden Bande wird ein Punkt willkürlich gewählt (z.B. A1). Die Lage der weißen Spielkugel und der zu treffenden schwarzen Kugel (Treffersituation) werden mit diesem Bandenpunkt verbunden und die jeweiligen Winkel gemessen. Die Winkel sollten gleich sein – sind sie aber nicht (in der Regel). Ein "besserer" Bandenpunkt muss her (z.B. A2). Auf diesem Weg finden die Schülerinnen und Schüler durch mehrmaliges, systematisches Probieren, den günstigsten Bandenpunkt.

   Anmerkung: Es ist unerheblich, ob die Winkel zwischen Bande und Laufweg oder, wie in der Physik üblich, jeweils zum Lot hin gemessen werden.



2. Von der weißen Kugel wird eine Strecke zu einem beliebigen Punkt der Bande gezeichnet. Mit Hilfe des Winkels zwischen dieser Strecke und der Bande wird der Weg nach Reflexion an der Bande gezeichnet. Auch bei diesem Vorgehen ist das Einzeichnen des Lotes und die Übertragung aus der Optik (einfallender Strahl, Lot, reflektierter Strahl) nicht zwingend. Es genügt das Messen des Winkels zwischen dem Laufweg der weißen Kugel und der Bande und das Einzeichnen des weiteren Weges durch Übertragen des gemessenen Winkels. Der eingezeichnete “Reflexionsweg“ wird die schwarze Kugel nicht treffen. Man muss die weiße Kugel in eine andere Richtung stoßen. Durch systematisches Variieren wird auch bei diesem Vorgehen die Lösung gefunden.

Weiterführende Frage
Wie kann man ohne Probieren den Weg der weißen Kugel finden?

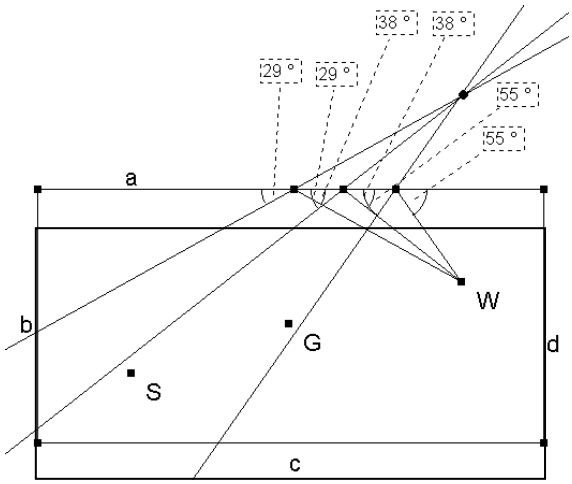
Die Schülerinnen und Schüler benötigen jetzt wahrscheinlich einen geeigneten Impuls, der auch über ein weiteres Arbeitsblatt gegeben werden kann. Hier alternativ zwei mögliche Impulse:

- "Überlegt euch, wie ein Billardspieler wohl die richtige Stoßrichtung herausfindet. – Fragt ggf. einen versierten Billardspieler."

  Antwort: Der Billardspieler denkt sich die schwarze Kugel an der Bande gespiegelt und zielt auf das (gedachte) Bild der schwarzen Kugel. – Warum?

- "Denkt euch die divergierenden Reflexionswege nach hinten verlängert. Was fällt euch auf?"

  Antwort: Alle rückwärtigen Verlängerungen schneiden sich in einem Punkt. Er ist das Bild der weißen Kugel, wenn man sich diese an der Bande gespiegelt denkt. Was hat das zu bedeuten?"



Zur Unterstützung der Anschauung kann in beiden Fällen ein Spiegel senkrecht zur Spielfläche, parallel zur Bande direkt an die Bande gestellt werden.

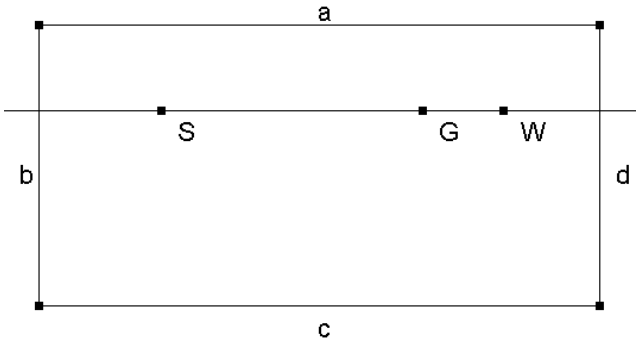
Vertiefungen und Erweiterungen

- Nach erfolgter Konstruktion kann auch die **Minimaleigenschaft des Laufwegs** der Spielkugel thematisiert werden.

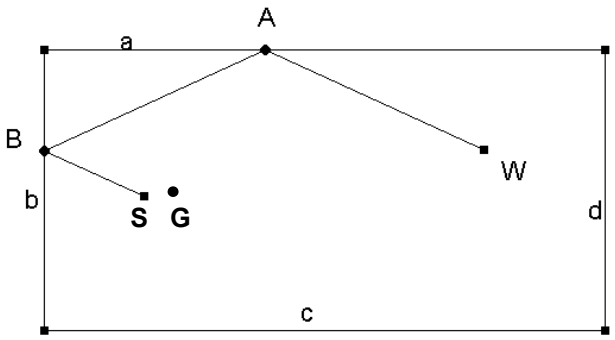
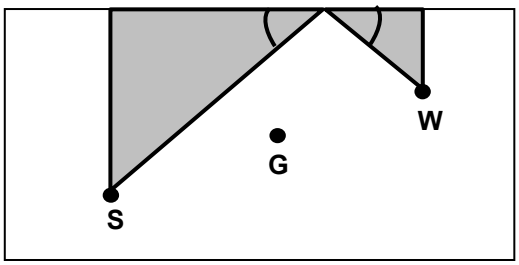
- Ist die Auswahl der jeweiligen Bande beliebig?
  Hinweis: In der tatsächlichen experimentellen Ausführung am Billardtisch sind verschiedene Realisierungen unterschiedlich schwierig.

- Die Frage, ob man den Laufweg auch umkehren kann (schwarz soll weiß treffen), kann Ansatzpunkte für fruchtbare Diskussionen liefern.

- Gibt es Lagen für die weiße und schwarze Kugel, bei denen man nicht über jede Bande spielen kann?
  Dies ist der Fall, wenn die schwarze und die weiße Kugel auf einer Senkrechten zu einer Bande liegen. In der rechts dargestellten Situation kann man mit der weißen Kugel weder über b noch über d die schwarze Kugel treffen.



- Eine weitere Steigerung der Schwierigkeit ergibt sich aus der Bedingung, dass bei extremen Ausgangslagen beim “richtigen Billardspiel“ die weiße Kugel vor der Karambolage mehr als eine Bande treffen muss. Dies ist in der Praxis zum Beispiel dann der Fall, wenn die schwarze Kugel und die Störkugel dicht beieinander liegen. Allerdings erscheint hierbei eine Beschränkung auf zwei benachbarte Banden sinnvoll.



Das Billardproblem kann auch in einem späteren Schuljahr als offene Aufgabe eingesetzt werden. Wenn die Gesetze der Ähnlichkeit und die Strahlensätze zur Verfügung stehen, können die Schülerinnen und Schüler auch ohne eine Kugel zu spiegeln, aus der Tatsache, dass die eingezeichneten Winkel gleich sind, den Weg der weißen Kugel finden und ihre Überlegungen geometrisch begründen: Die beiden grauen Dreiecke sind ähnlich.