Vom Rechteck, das ein Quadrat werden wollte

Schule: Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern
Idee und Erprobung der Unterrichtseinheit: Klaus Merkert

Die folgende Unterrichtseinheit ist ein Beispiel für Problemstellungen zur Erarbeitung eines Themas, die von den am BLK-Programm beteiligten Fachlehrerinnen und Fachlehrern entwickelt wurden.

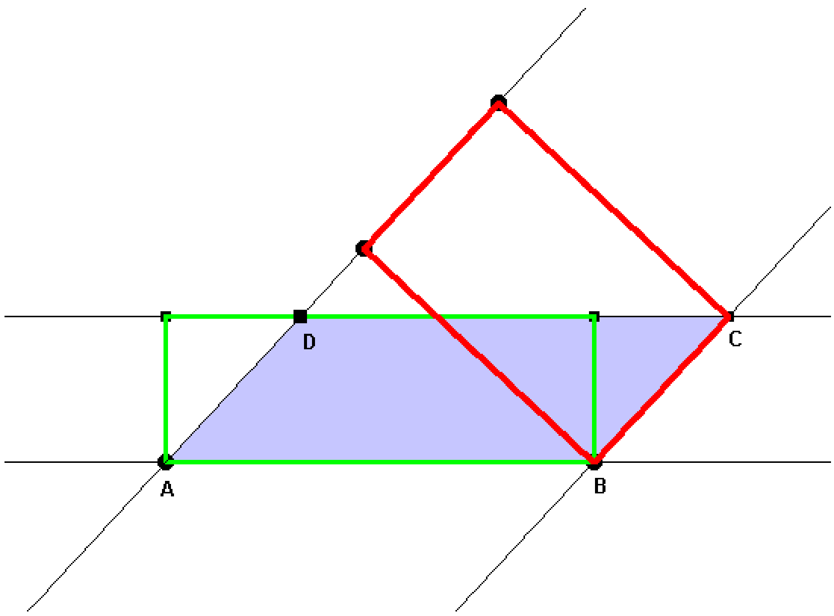
Stoffgebiet: Satz des Pythagoras

Intentionen:
- Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler
- Selbstständiges Entdecken der wesentlichen Schritte zum Satz des Pythagoras
- Offene Problemstellung

Stationen auf dem Weg zum Satz des Pythagoras

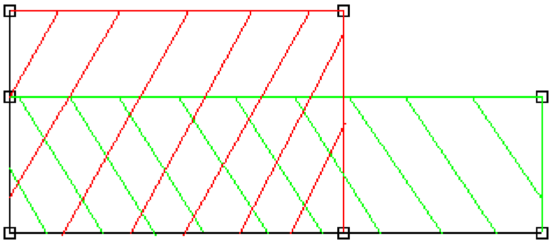
1. Hinführung
   Wiederholung: Es wäre günstig, wenn vor der Reihe, z.B. im Rahmen der täglichen Übungen, der Flächeninhalt eines Parallelogramms und der Satz von Thales wiederholt würden.
   Hausaufgabe: *Zeichne das Parallelogramm ABCD mit A(0/0), B(8/0), C(11/5) und D(3/5). Berechne dann den Flächeninhalt auf zwei Arten.*

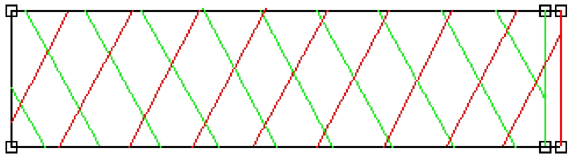
2. Im Anschluss an die Hausaufgabe wird nun gemeinsam folgende Skizze erarbeitet, bei der durch entsprechende farbliche Hervorhebungen das Augenmerk vom Parallelogramm auf die beiden - flächengleichen - Rechtecke gelenkt wird.



3. Ein historischer Rückblick auf das Bemühen der Griechen um die Quadratur von Figuren schließt sich an.
   Problem: Wie vergleicht man Flächeninhalte ohne zu rechnen?

4. Ist das rote oder das grüne Rechteck größer?

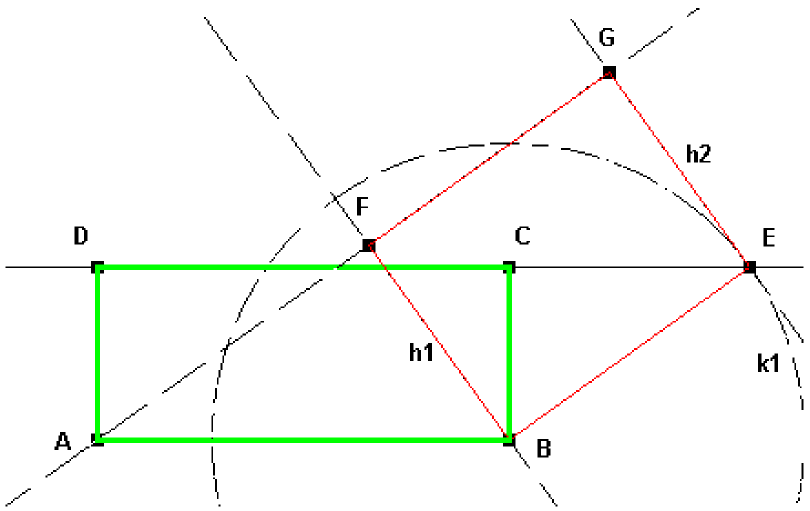




5. Aufgabe (in Gruppenarbeit):
   Aus einem - grünen - Rechteck der Breite 7 cm und der Höhe 3 cm soll eines neues - rotes – Rechteck mit der Höhe 5 cm entstehen.

   Impulse: Wo sollten in der Skizze die Längen 7 cm und 3 cm eingetragen werden?
   Wo sollte die Länge 5 cm eingetragen werden?

   Mögliche Lösung :

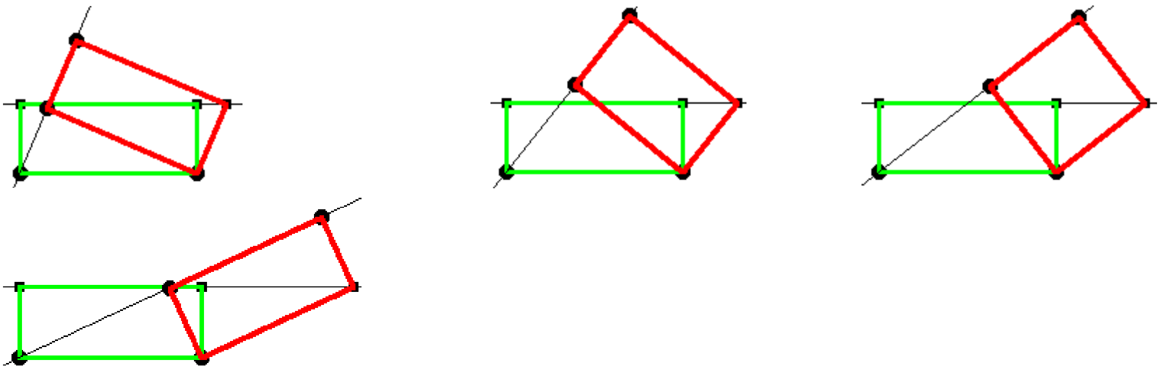


Konstruktionsbeschreibung:

1. Gerade (CD)
2. Kreis k1 um B mit r = 5 cm schneidet (CD) in E
3. Strecke BE
4. Parallele g zu (BE) durch A
5. Orthogonale h_1 zu (BE) in B schneidet g in F
6. Orthogonale h_2 zu (BE) in E schneidet g in G
7. BEGF ist das gesuchte flächengleiche Rechteck

6. Die (Fast-) Quadratur durch Probieren

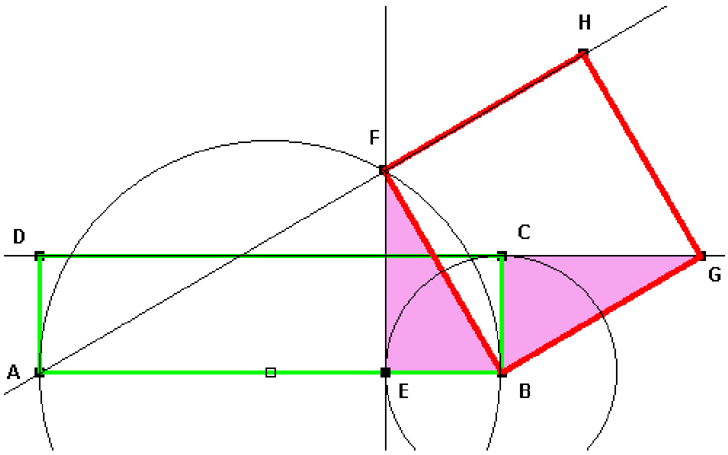
   Ein auf einem Arbeitsblatt (DIN A4 quer, links etwa 3 cm hoch, 13 cm breit) vorgegebenes Rechteck wird in ein anderes Rechteck verwandelt. Dies geschieht in arbeitsteiliger Partnerarbeit, wobei die vorgegebene Höhe von etwa 3,5 cm bis etwa 12 cm variiert wird. Das erhaltene Rechteck soll farblich hervorgehoben werden. Gemeinsam werden die Blätter der Gruppen "geordnet" an die Wand gehängt. Es entsteht ein "Film" etwa der folgenden Art:



7. Im Unterrichtsgespräch wird erarbeitet, dass es unter den konstruierten Rechtecken *fast*, unter den konstruierbaren Rechtecken *sicher* ein Quadrat gibt.

8. Finden der Konstruktion zur Quadratur des Rechtecks

   In Gruppen (4-5er Gruppen, Gruppenbildung wie bei letzter GA) soll nun die exakte Konstruktion gefunden werden. Grundlage ist ein Arbeitsblatt (Seite 47) auf dem für zwei verschiedene Rechtecke die Quadratur durch Probieren durchgeführt ist. – Zur Sicherung wird die Konstruktion gemeinsam einschließlich der Konstruktionsbeschreibung an der Tafel / im Heft durchgeführt.



Konstruktionsbeschreibung:

1. Thaleskreis über $\overline{AB}$
2. E auf $\overline{AB}$ mit Länge von $\overline{EB}$ = Länge von $\overline{BC}$
3. Lot auf $\overline{AB}$ in E
4. Lot schneidet Thaleskreis in F
5. Gerade (AF)
6. Parallele zu (AF) durch B schneidet (DC) in G
7. H ergänzt FBG zum Quadrat

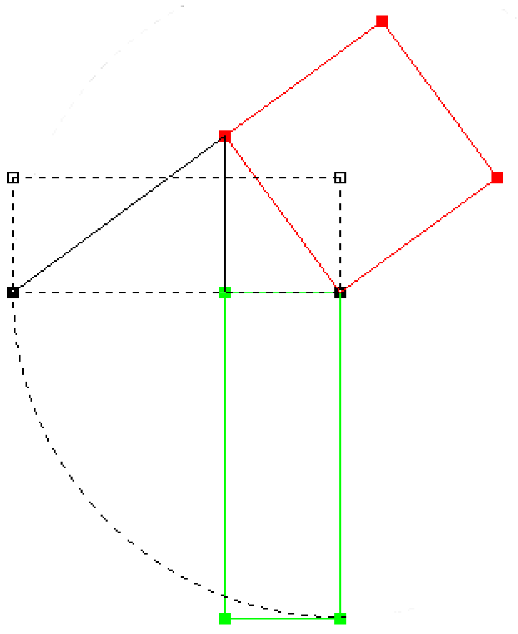
9. Warum ist FBGH ein Quadrat?

   Die rechten Winkel und die Parallelität gegenüberliegender Seiten ergeben sich aus der Konstruktion.

   Die Dreiecke ΔEBF und ΔBGC sind nach dem WSW-Satz (90°-Winkel, $\overline{EB} = \overline{BC}$, Winkel bei B) kongruent. Insbesondere sind also die Seiten $\overline{BF}$ und $\overline{BG}$ gleich lang.

10. Eine Variante der Quadraturkonstruktion: der Satz des Pythagoras

    Ein Nachteil der gefundenen Konstruktion ist die Überlappung von Rechteck und Quadrat. Gemeinsam wird nun eine Variante der Konstruktion mit einem um 90° gedrehten Rechteck gesucht. Im Unterrichtsgespräch wird dann an der Tafel / im Heft das Rechteck mit b_1 = 2 cm, h_1 = 7 cm nach dieser Konstruktion in ein flächengleiches Quadrat verwandelt. Parallel zur Konstruktion kann eine Konstruktionsbeschreibung notiert werden.



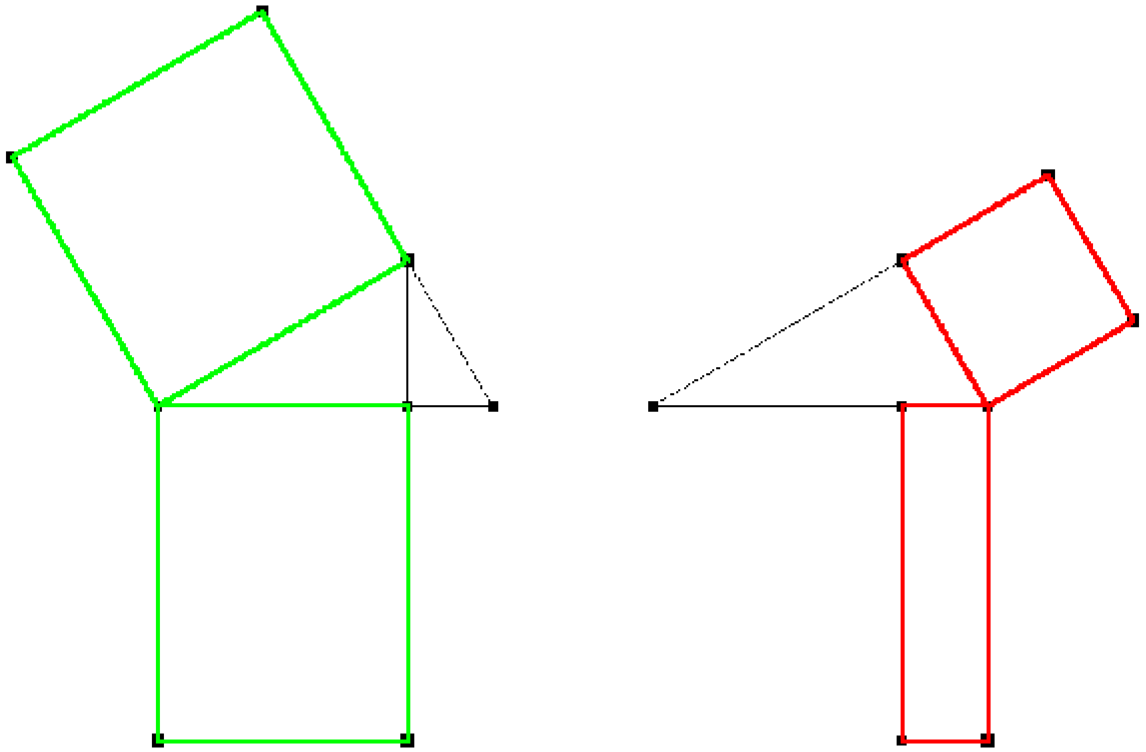
Zur Übung soll anschließend in Einzel- bzw. Partnerarbeit eine analoge Konstruktion für ein Rechteck mit b_2 = 5 cm, h_2 = 7 cm durchgeführt werden. Allerdings soll nun das entstehende Quadrat links, d.h. gewissermaßen spiegelbildlich liegen.

Was fällt bei den letzten beiden Figuren auf?

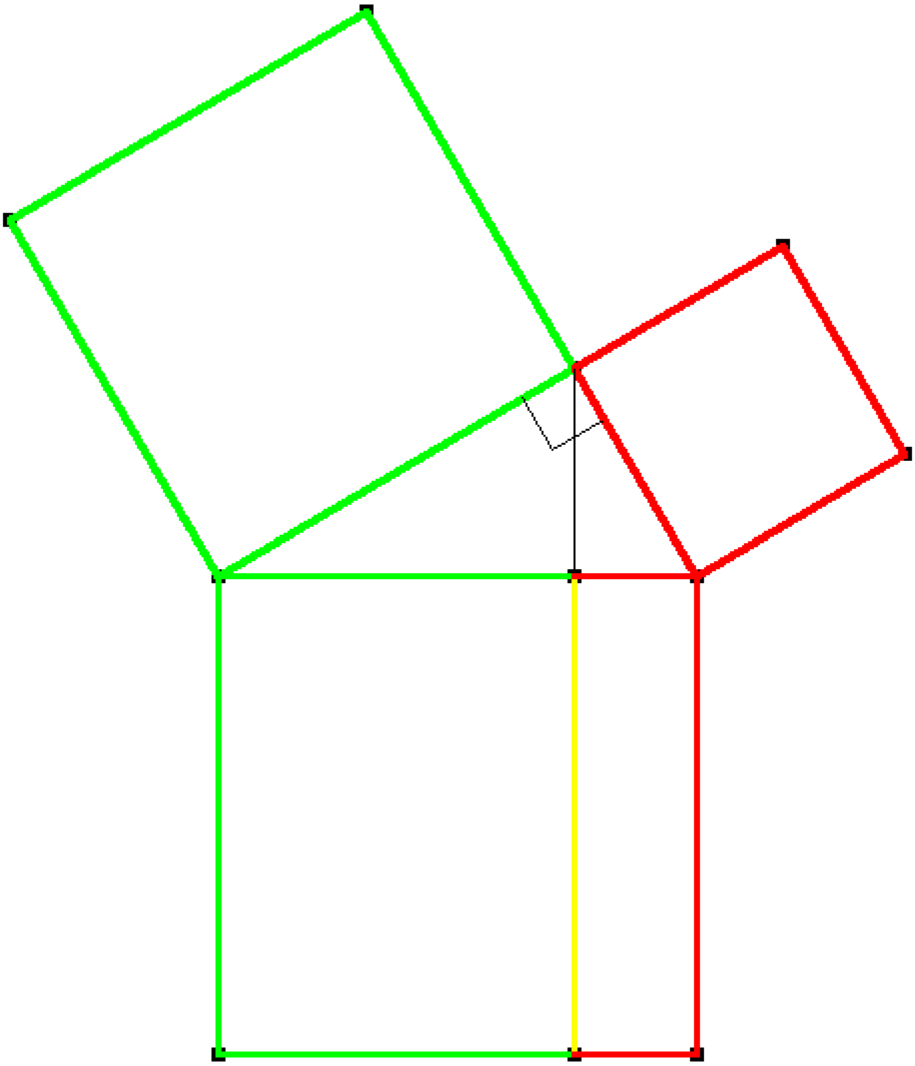
Gilt für zwei Rechtecke mit der Höhe a und den Breiten b_1 und b_2 die Beziehung $b_1 + b_2 = a$, so entstehen bei den Quadraturen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

Die Höhe des rechtwinkligen Dreieck liegt einmal b_1 von rechts und einmal b_2 von links auf der Grundseite entfernt.

11. Um sicherzustellen, dass alle Schülerinnen und Schüler die Konstruktionen im Heft haben und um für die Hausaufgabe etwas zum Ausschneiden zu haben, wird ein Arbeitsblatt mit folgenden Figuren ausgeteilt:



Bereitet man die beiden Figuren auch auf getrennten Folien (obiges Arbeitsblatt zerschnitten) vor, so werden die Schülerinnen und Schüler die Pythagorasfigur durch Übereinanderlegen herstellen.



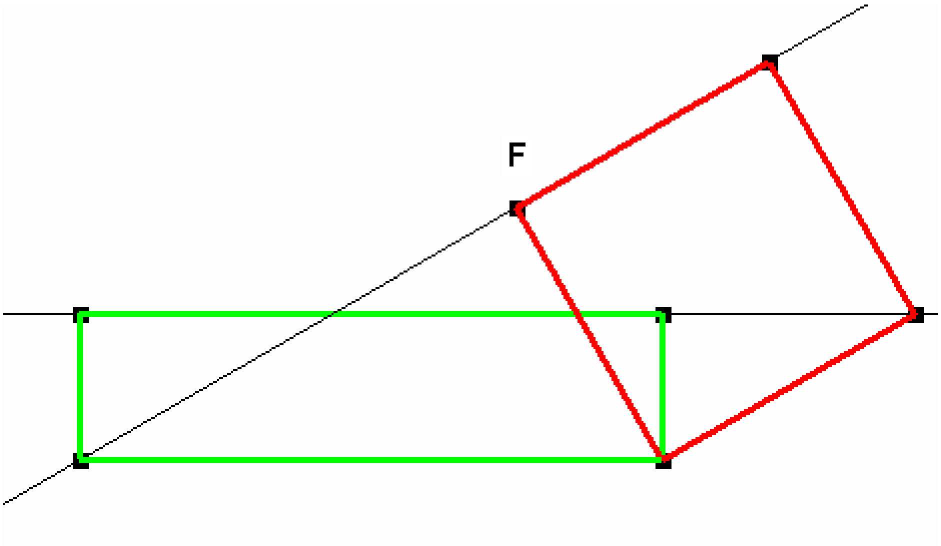
Bemerkung:
Der Kathetensatz (Satz von Euklid) ist durch die Quadratur bereits bewiesen. Der Satz des Pythagoras braucht durch die anschaulich offensichtliche Ergänzung der beiden Figuren nicht mehr bewiesen zu werden. Es fehlt der Höhensatz. Der kann wie die genannten Sätze auch, in einer späteren Stunde aufgrund der Verhältnisse in ähnlichen Dreiecken in der Pythagorasfigur bewiesen werden. Das ist eine gute Anwendung bzw. Wiederholung der Ähnlichkeit.

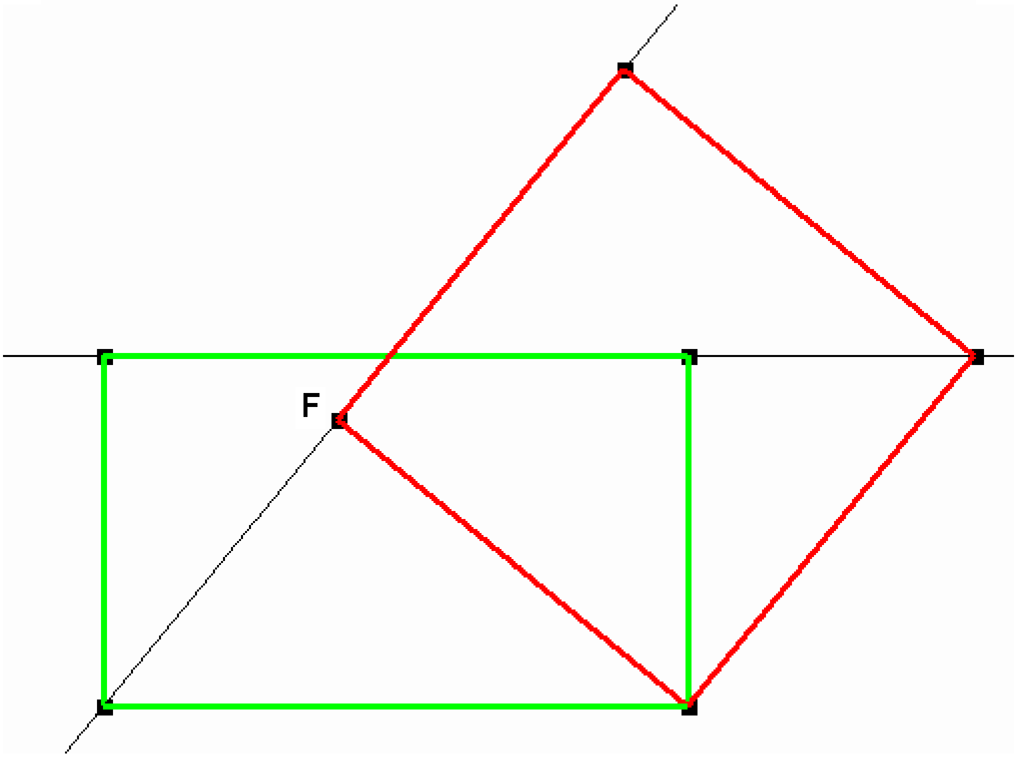
Beschreibung des Unterrichtsverlaufs

Die Unterrichtseinheit wurde am Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern durchgeführt. Eine Beschreibung des Unterrichtsverlaufs und der gewonnenen Erfahrungen ist auf der Homepage der Schule zu finden und steht zum Downloaden bereit:
http://schulen.kaiserslautern.de/hsg – BLK-PROJEKT "SINUS" – UNTERRICHTSREIHE ZUM SATZ DES PYTHAGORAS

Arbeitsblatt zum Finden der Quadraturkonstruktion

Die zwei Figuren auf diesem Blatt sind mit Hilfe des Programmes Euklid entstanden. In beiden Fällen wurde das flächengleiche Quadrat durch Probieren gefunden. Eure Aufgabe ist es nun, eine exakte Konstruktion zu finden, mit der ausgehend vom Rechteck das Quadrat konstruiert werden kann. Die rechte untere Ecke des Quadrats liegt fest. Vielleicht konzentriert ihr euch auf die links liegende Ecke F.





Hilfen:

- Im Bild unten liegt der Punkt F weiter links. Hängt das vielleicht mit der größeren Höhe des Ausgangsrechtecks zusammen ? Zeichne einen geeigneten Kreisbogen ein.
- Der gesuchte Punkt F ist der Scheitel eines rechten Winkels. Auf welcher geometrischen Ortslinie müssen also alle Punkte F liegen?
- Ein Lot, von F auf die Rechteckseite gefällt, eröffnet eventuell neue Sichtweisen.