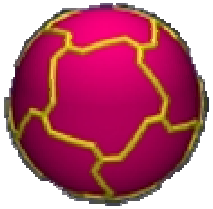
Die Fußball WM 2010 im mathematischen Blick
m/F50+

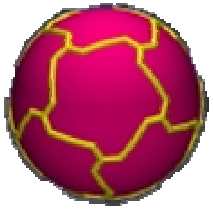
Fußballmathematik
für Große und Kleine

Wolfgang Weigel
Reichsstadt-Gymnasium Rothenburg o.d.T.
Matthias Ludwig
PH Weingarten

Harburg Katholische Schule
23.11.2009



Fußball und Mathematik?



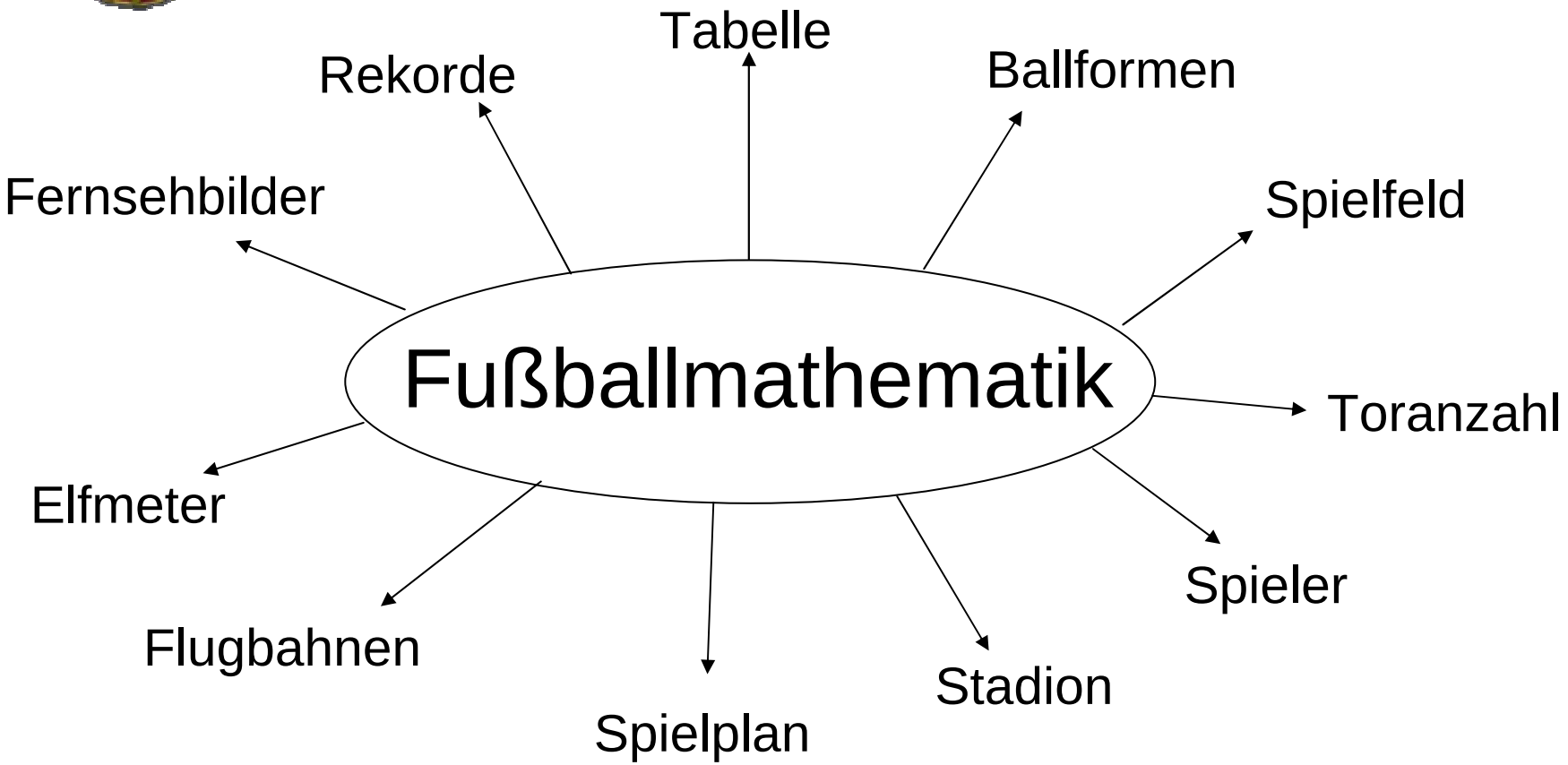
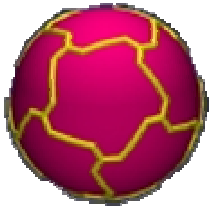


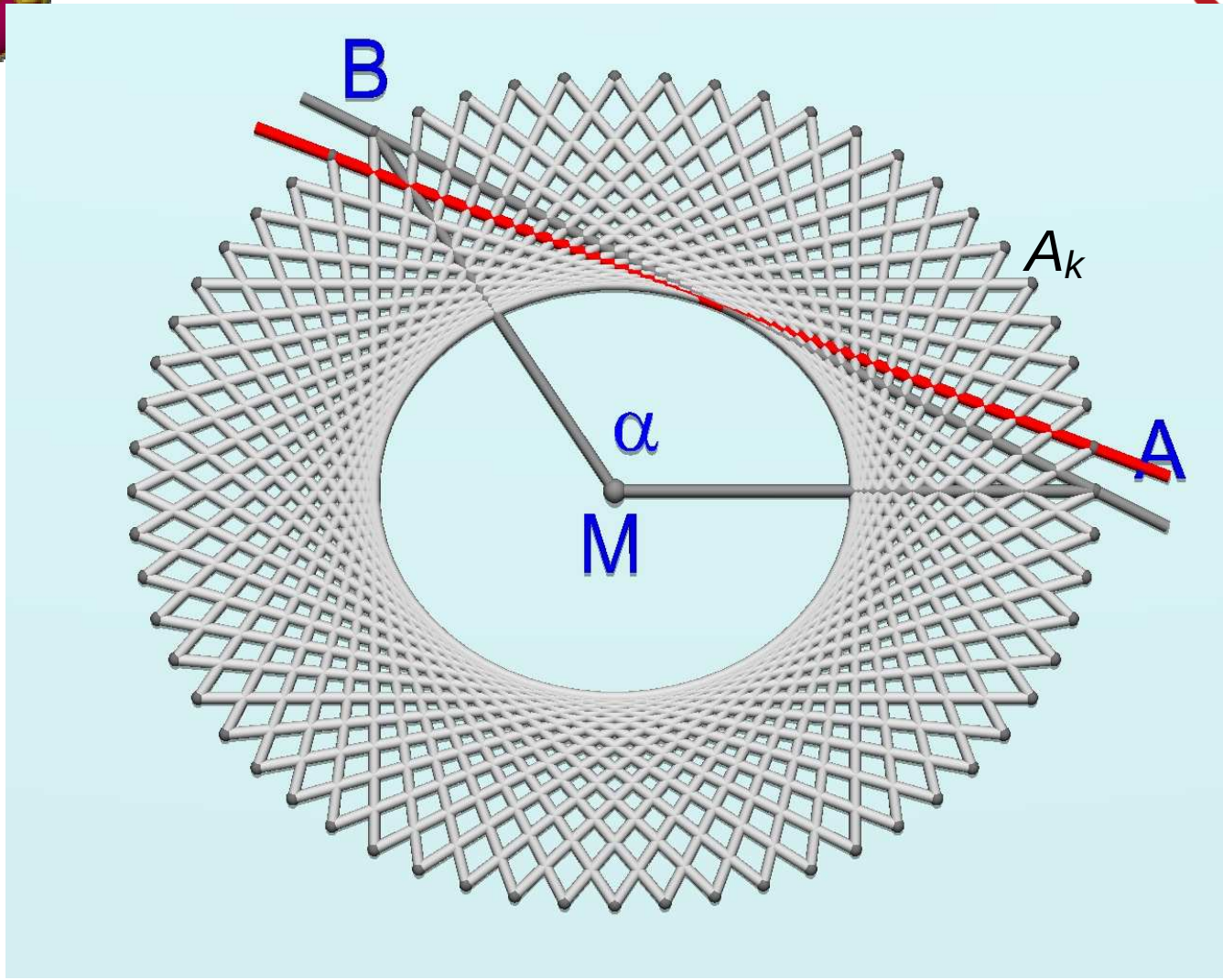
Tabelle
Rekorde
Ballformen
Fernsehbilder
Spielfeld
Fußballmathematik
Toranzahl
Elfmeter
Spieler
Flugbahnen
Stadion
Spielplan

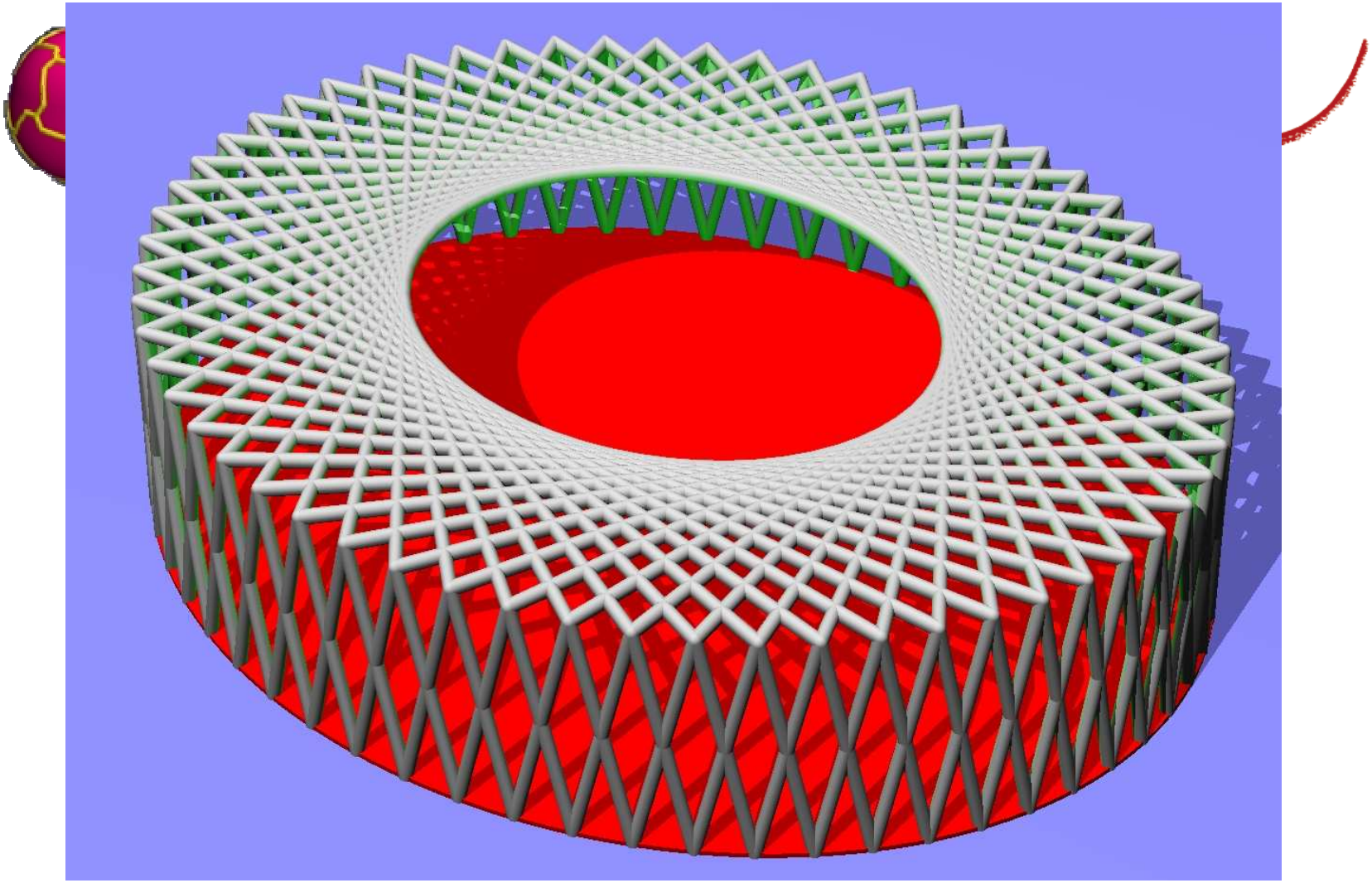


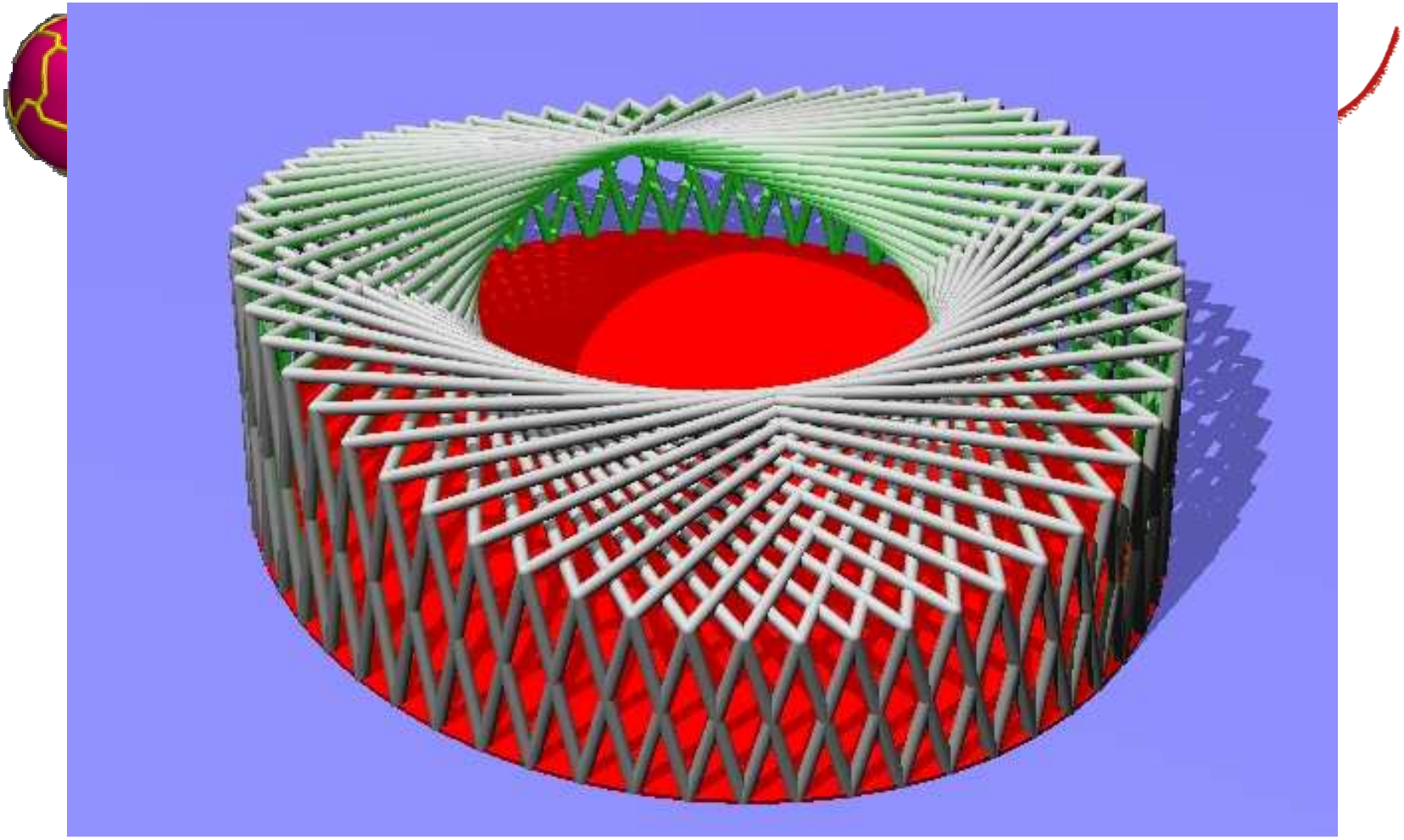
Unterrichtsgestaltung

- Anwendungsaufgaben
- Modellierungsaufgaben
- Fermiaufgaben
- Projektunterricht

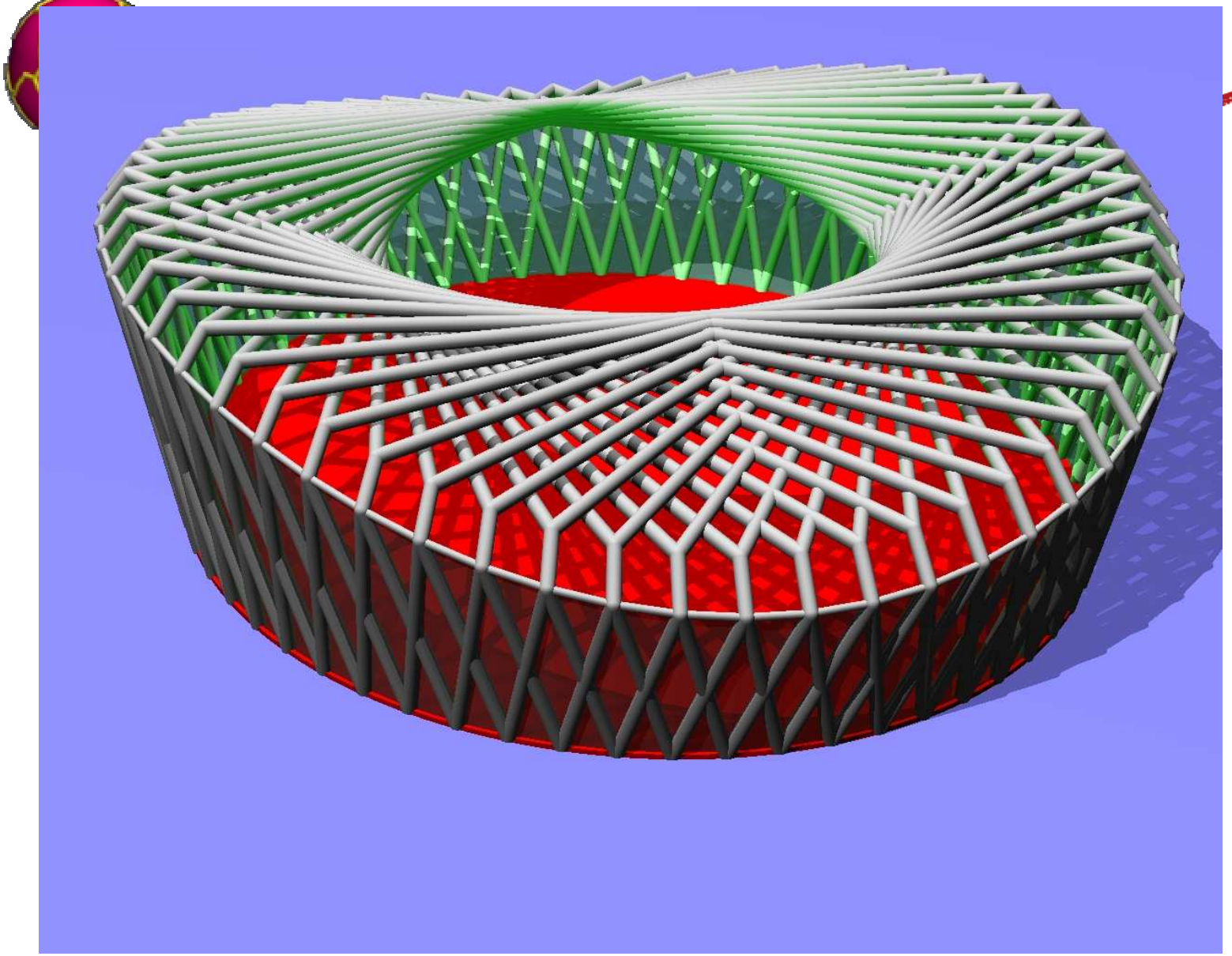
Das Nationalstadion in Peking

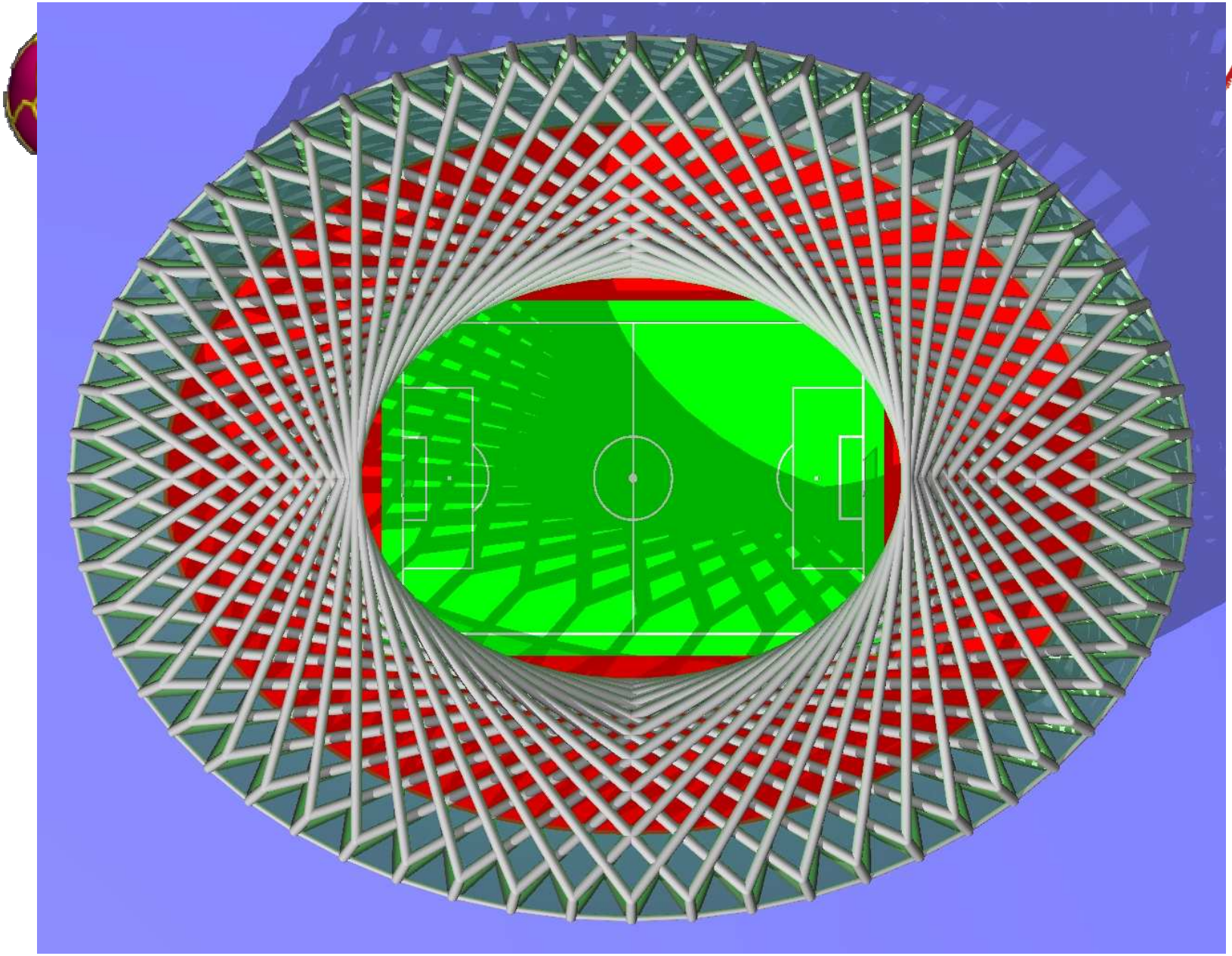

B
A_k
α
A
M

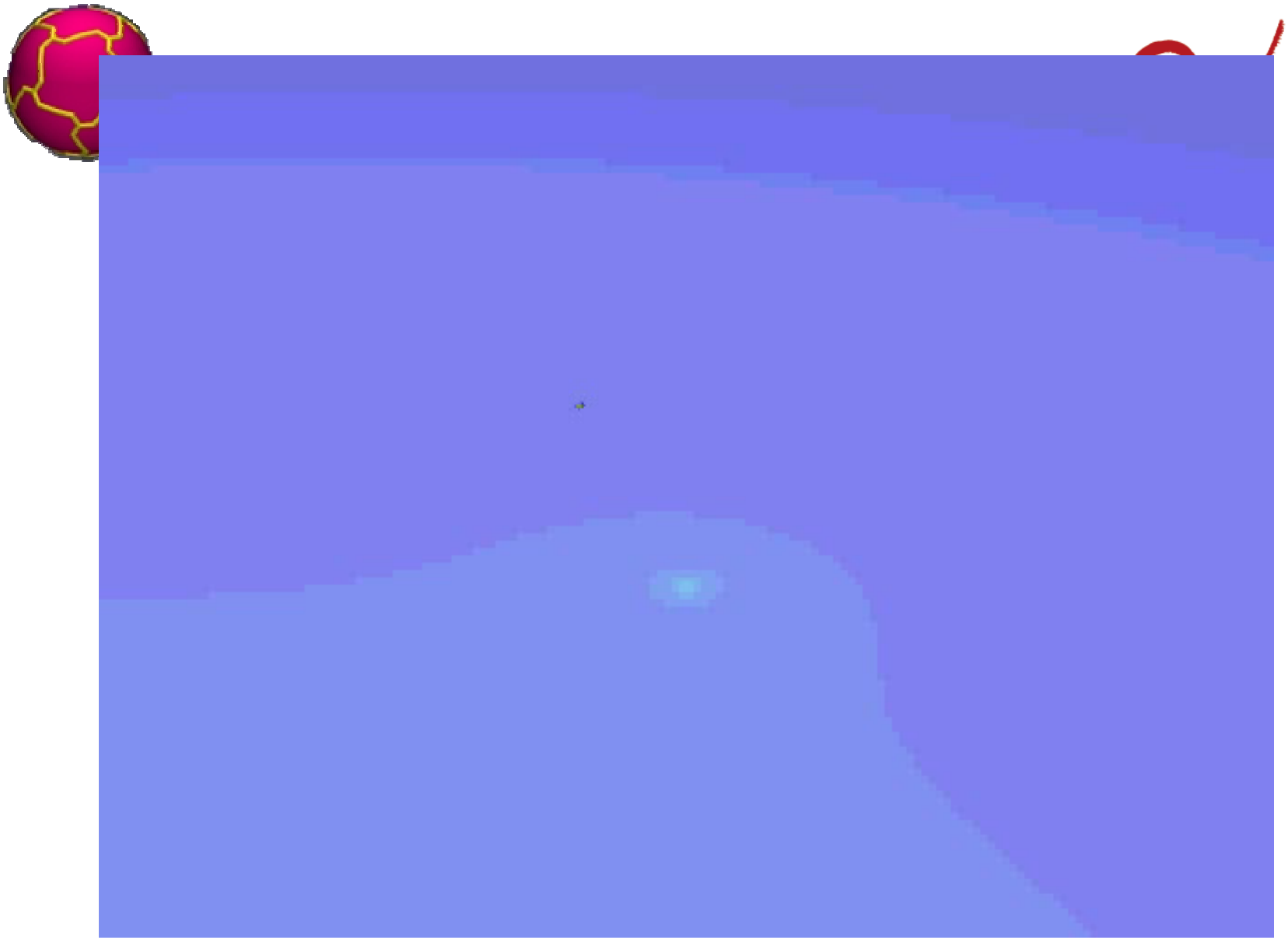




$$A_k = \left(a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n_k \right), h - c \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{n} \cdot n_k \right), b \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n_k \right) \right)$$

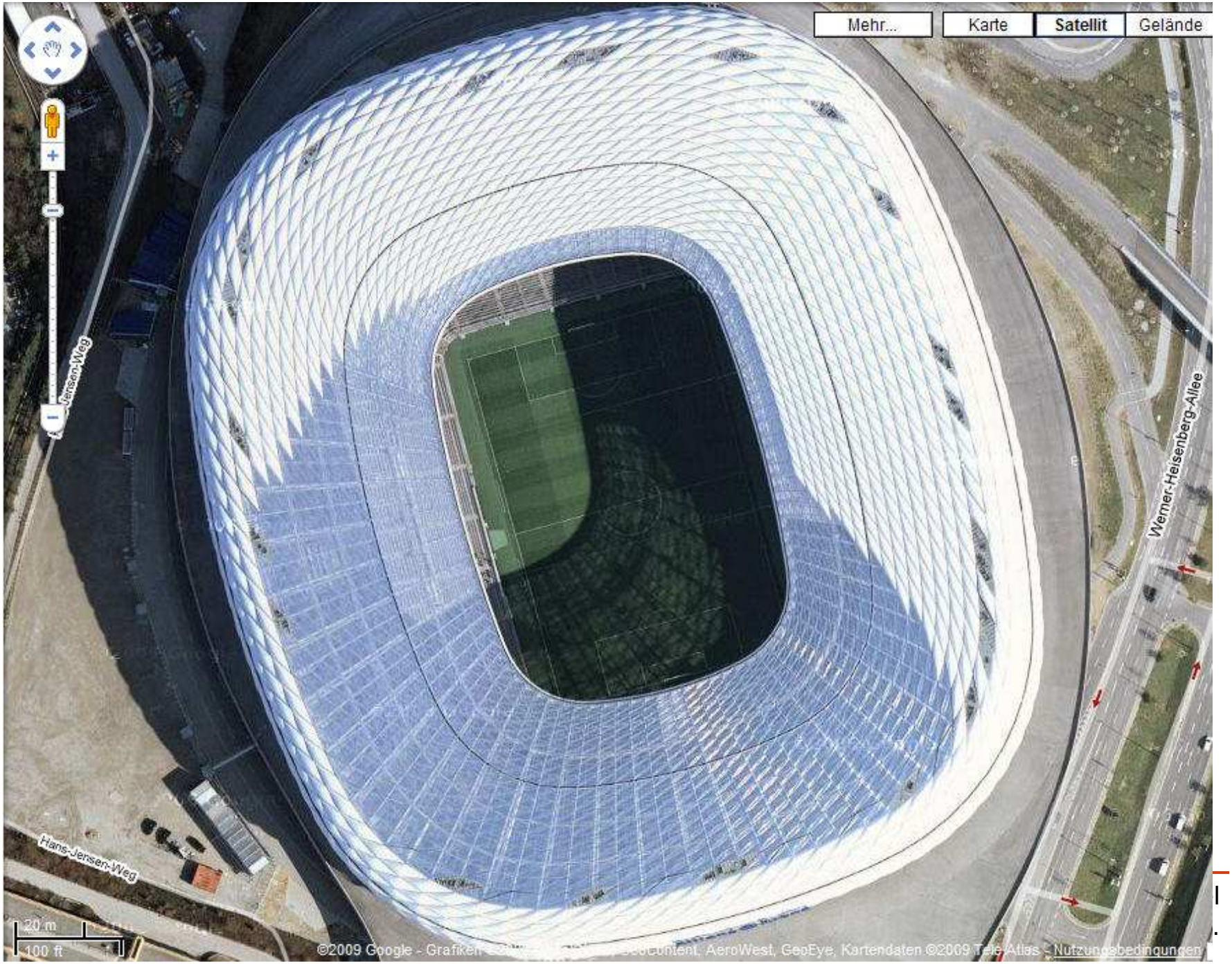


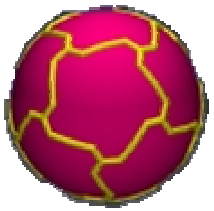




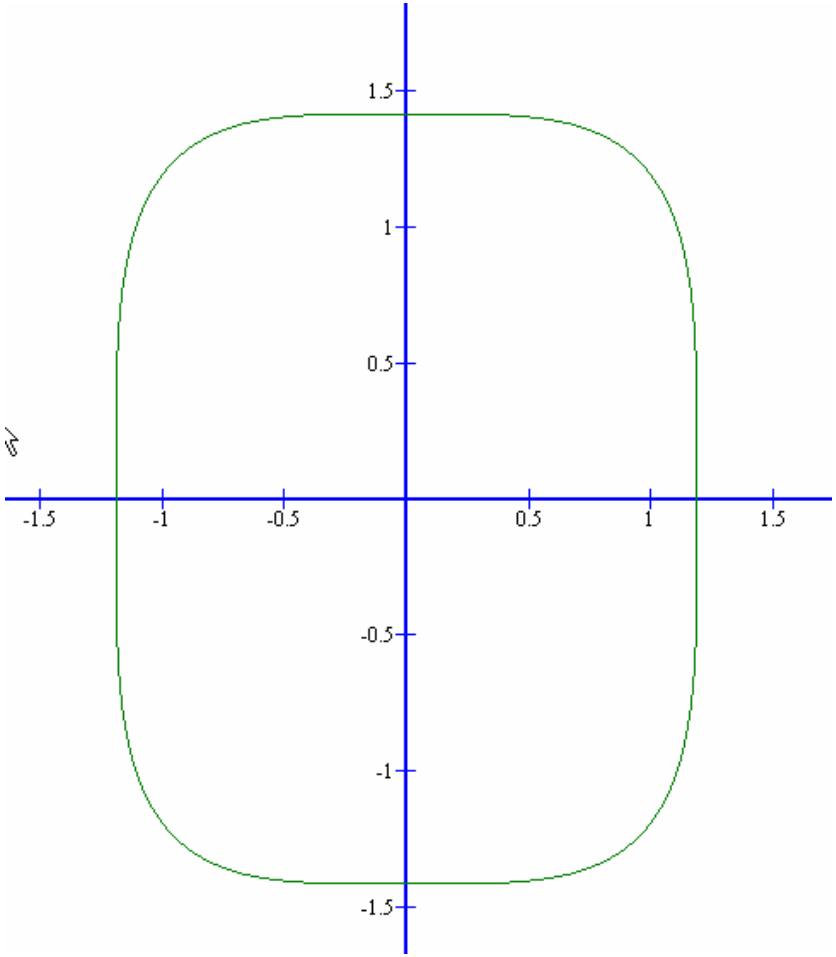
Allianz Arena

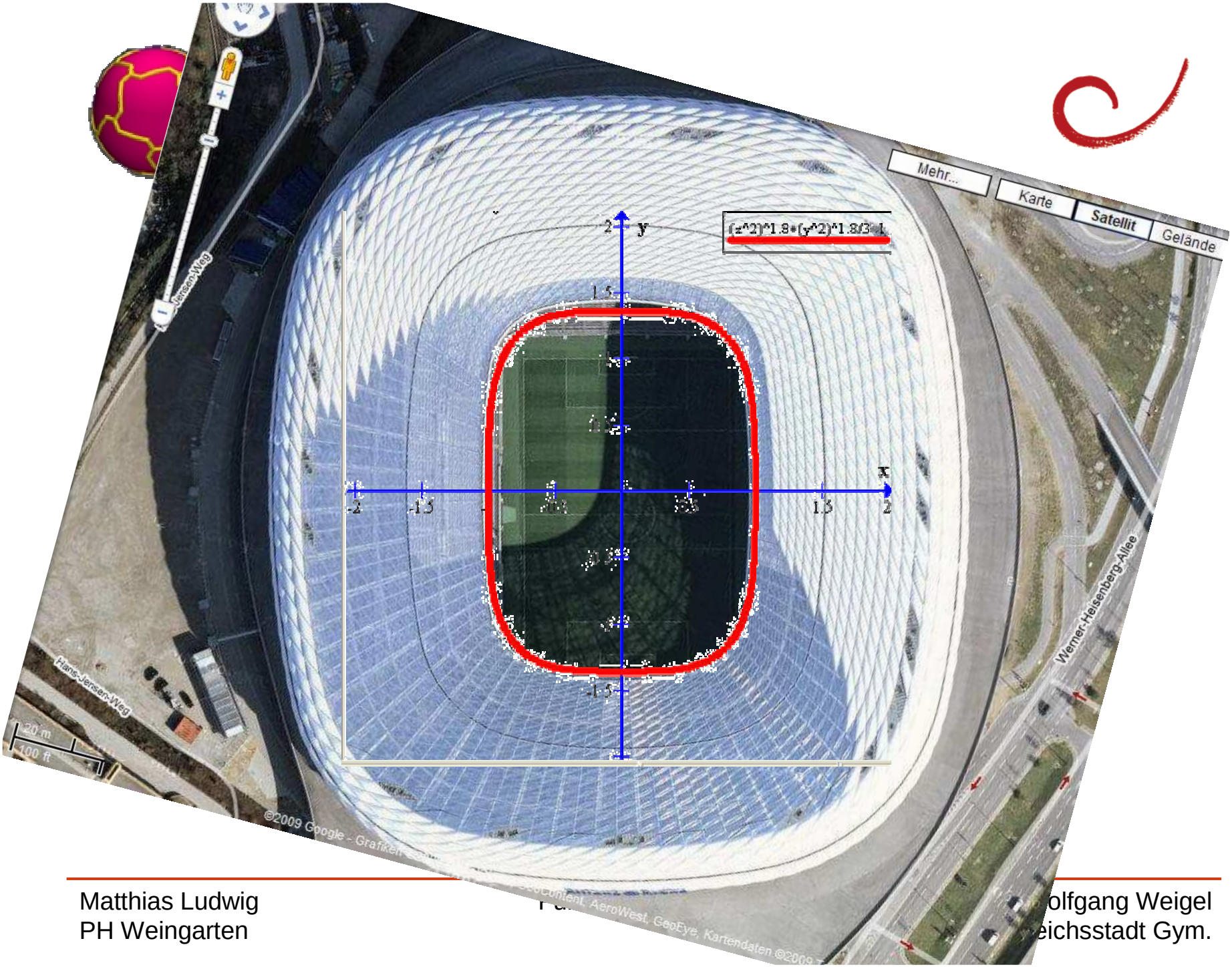
Allianz Arena


Mehr...
Karte
Satellit
Gelände
Jensen-Weg
Hans-Jensen-Weg
Werner-Heisenberg-Allee
20 m
100 ft
©2009 Google - Grafiken
AeroWest, GeoEye, Kartendaten ©2009 Tele Atlas - Nutzungsbedingungen



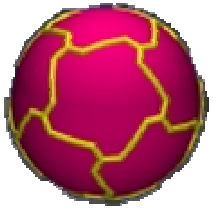
$$\frac{\left(x^2\right)^{1,8}}{a}+\frac{\left(y^2\right)^{1,8}}{b}=1$$





Matthias Ludwig
PH Weingarten

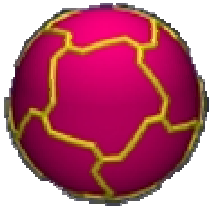
olfgang Weigel
eichsstadt Gym.



Lehrplanbezug

- „Mathematik in unserer Welt“

- Der Mathematikunterricht rückt […] oft verdeckte Zusammenhänge ins Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler und bereichert ihr individuelles Weltbild um eine mathematische Weltsicht.

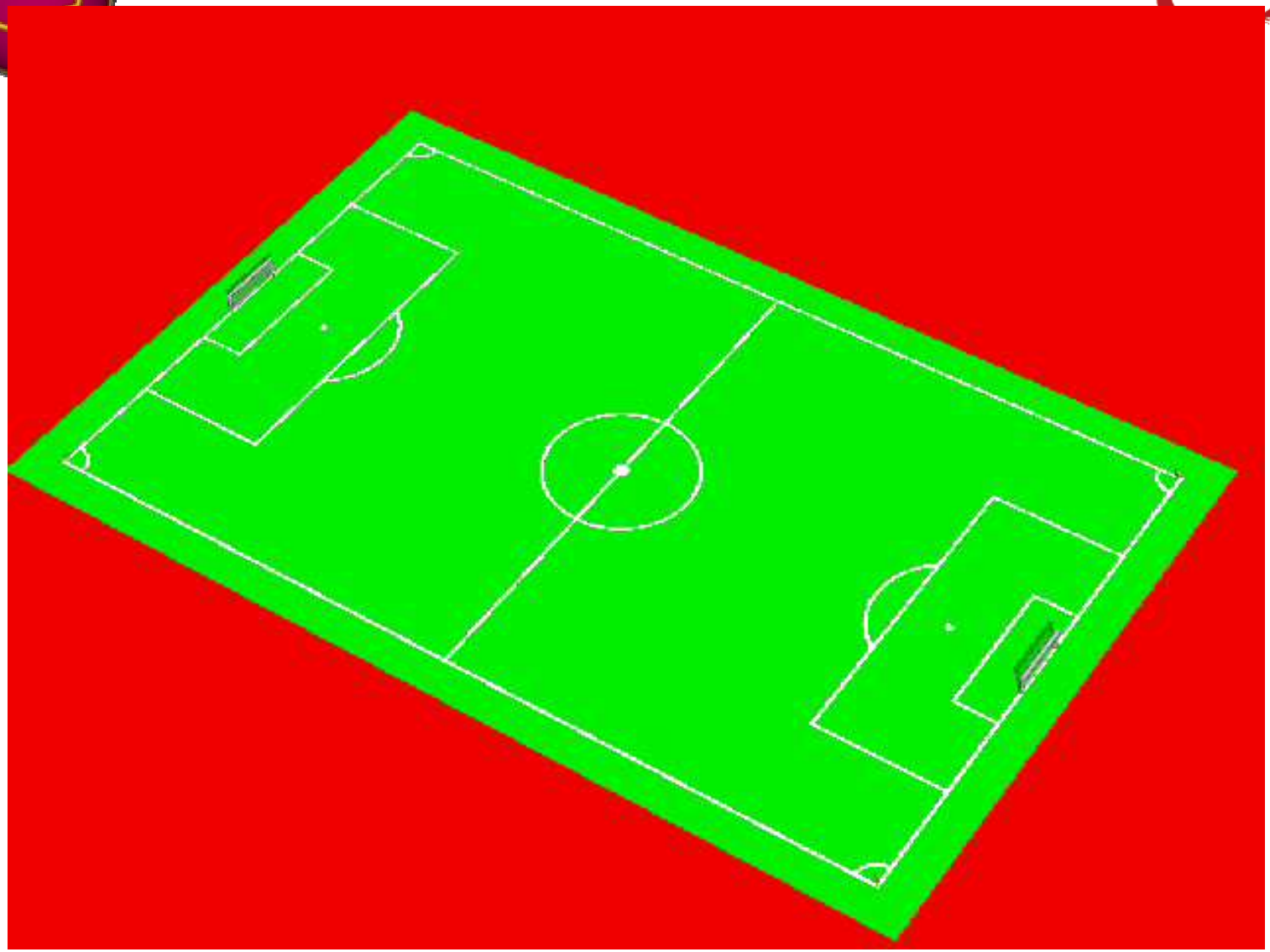


Lehrplanbezug

- Leitidee Zahl / Messen

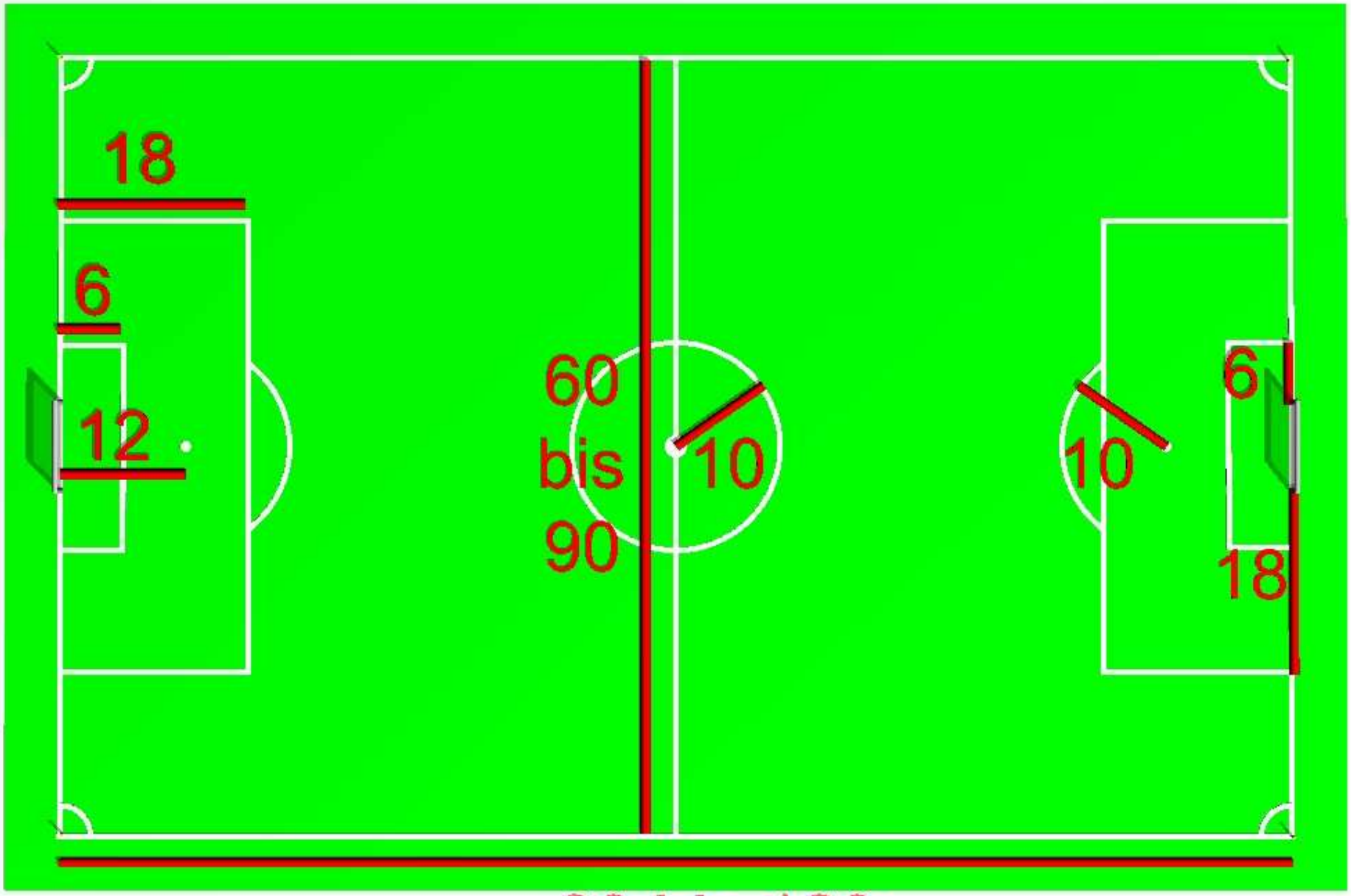
- Leitidee Modellierung

Das Spielfeld



Die Spielfeldmaße

Lösung: 0,915m = 1 Yard !


18
6
12
60
bis
90
10
10
6
18
90 bis 120

Der André Heller Ball

Der André Heller Ball

Der André Heller Ball

Schätzen Sie die Höhe des Fußball-Globus ab!

(vgl. Aufgabe 1a)

Der André Heller Ball

Der André Heller Ball

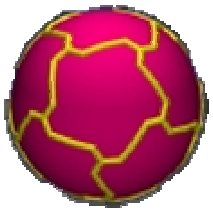
Der Ball hat einen Durchmesser von 12m.

Schätzen Sie das Volumen des Fußball-Globus ab und vergleichen Sie diese mit dem Beckeninhalt eines Schwimmbads (vgl. Aufgabe 1b/c).

Der André Heller Ball

Der Ball hat ein Volumen von 905m^3.

Man würde ca. eine Beckenladung Wasser benötigen.



Der André Heller Ball

Wie groß müssten das passende Feld, das passende Tor und ein passender Spieler sein?

(vgl. Aufgabe 1d)

Der André Heller Ball

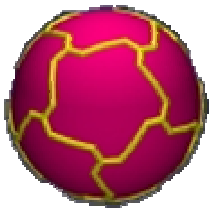
Wie groß müssten das passende Feld, das passende Tor und ein passender Spieler sein?

Der Ball hat einen Durchmesser von 12m.

Verhältnis1200cm : 21cm ungefähr 60 : 1

60*8 Yard = 480 Yard = 440 Meter (Breite)

60*8 Fuß = 480 Fuß = 146 m (Höhe)



Der André Heller Ball

Der André Heller Ball

Wie groß müssten das passende Feld, das passende Tor und ein passender Spieler sein?

Der Ball hat einen Durchmesser von 12m.

Verhältnis1200cm : 21cm ungefähr 60 : 1

60*8 Yard = 480 Yard = 440 Meter (Breite)

60*8 Fuß = 480 Fuß = 146 m (Höhe)

Wie hoch ist das eigentlich? (Kölner Dom, Ulmer Münster, Eiffellturm?)

Der André Heller Ball

Nehmen wir an, der Fußball wäre nun die Erde, wie groß wäre dann das Fußballfeld? Kann man es noch mit bloßem Auge erkennen, wenn man ganz nahe an den Ball geht?

Der André Heller Ball

Nehmen wir an, der Fußball wäre nun die Erde, wie groß wäre dann das Fußballfeld? Kann man es noch mit bloßem Auge erkennen, wenn man ganz nahe an den Ball geht?

12m : 12000km= 1 : 100.000

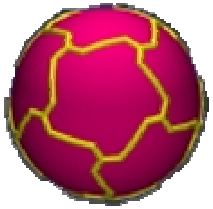
Fußballfeld 105m

Fußballfeld auf dem Ball ungefähr 0,1mm

Kann man das noch erkennen?

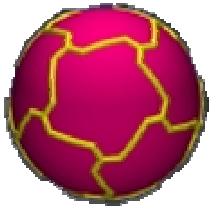
HSV - Club

Rudi Kargus



Rudi Kargus

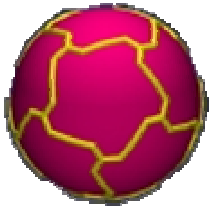
- 15. August 1952, Worms
- 1971 – 1980 HSV
- 1980 – 1984 Club
- 23 von 76 Elfmetern vereitelt
- KSC: 3 von 3



Der Elfmeter

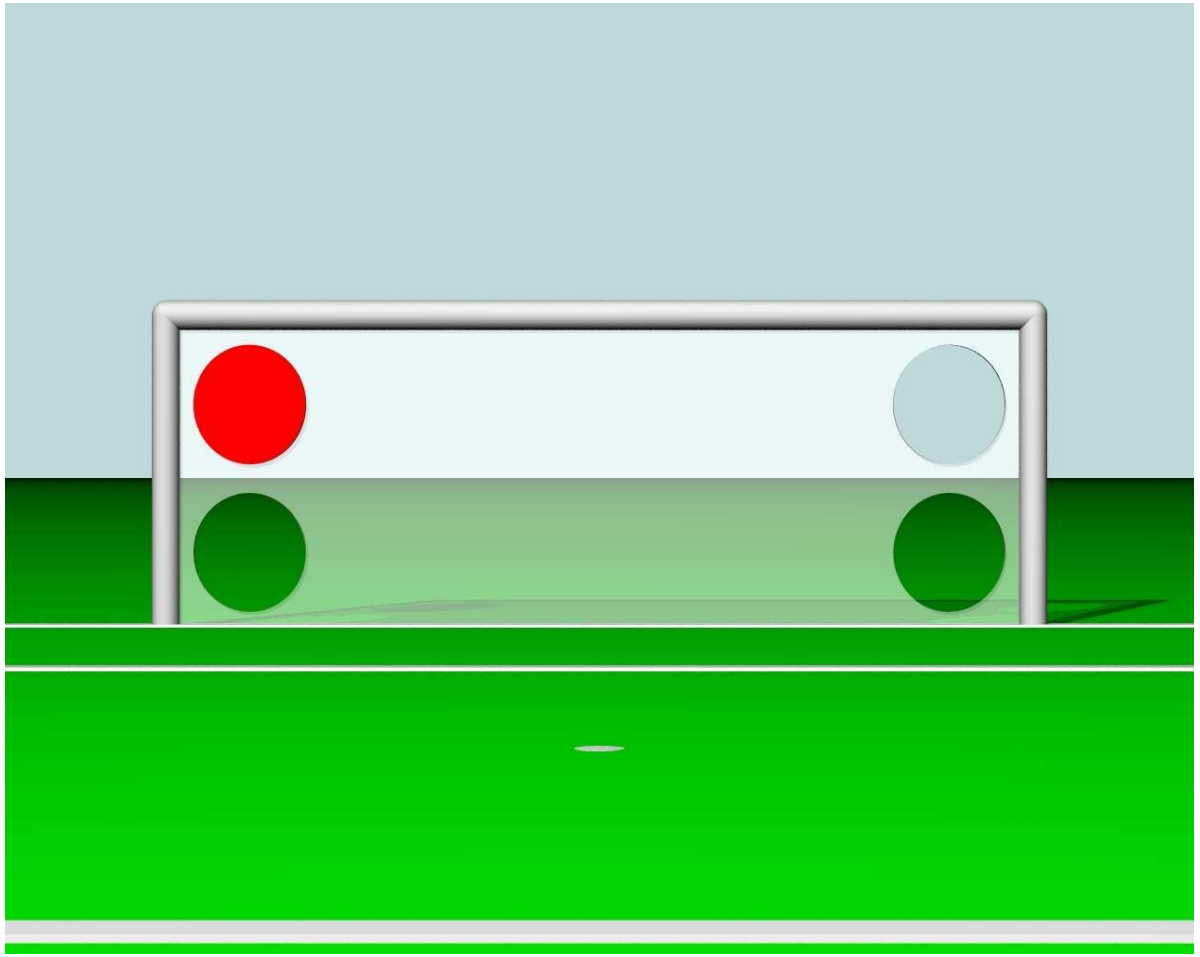
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elfmeter im Tor versenkt wird?
- Gruppeneinteilung
- Aufgabe 2

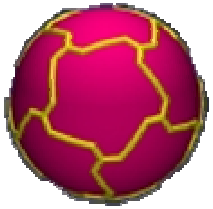
Der Elfmeter



Der Elfmeter

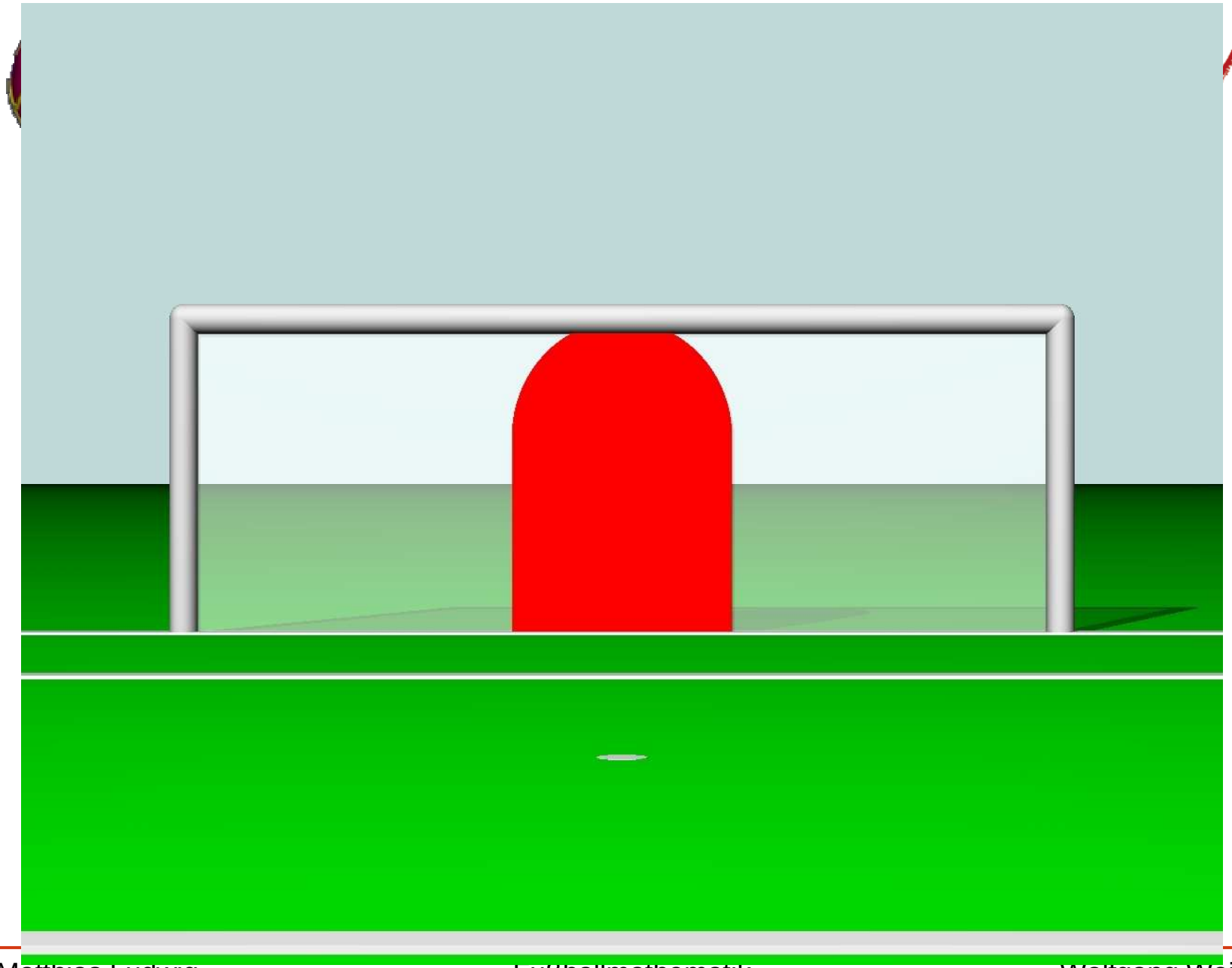
- Mathematische Modellbildung für Verwandlungshäufigkeit
- Genial einfache Idee:
  - Das Tor hat vier Ecken (und eine Mitte)

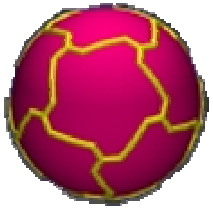




Der Elfmeter

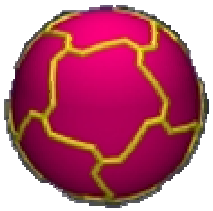
- Die Flächenidee
  - Tor 8Yard x 8Fuß= 7,32m x 2,44m =ca. 18m^2
  - Torwart 1,6m x1,9m+ 0.5x 0.95m^2 xπ=4,45m^2
  - 75% der Torfläche sind nicht abgedeckt .





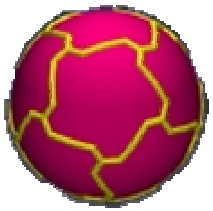
Elfmeter

- Bayern München 190:245 =>77,5%
- Frankfurt 143:196 =>73%



Der Elfmeter

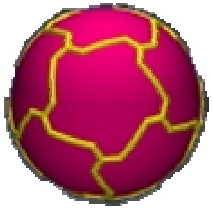
		Punkte	Tore	T-insgesamt	Toranzahl	Elfmeter	verwandelt	Quote
1992/93	Bremen	48 : 20	63 : 30	898	2,93	78	62	79,49
1993/94	Bayern	44 : 24	68 : 37	895	2,92	75	63	84,00
1994/95	Dortmund	49 : 19	67 : 33	918	3	85	70	82,35
Einführung der 3 Punkte Regelung								
1995/96	Dortmund	68	76 : 38	831	2,72	83	61	73,49
1996/97	Bayern	71	68 : 34	911	2,98	84	63	75,00
1997/98	Kaiserlautern	68	63 : 39	883	2,89	57	40	70,18
1998/99	Bayern	78	76 : 28	866	2,83	89	63	70,79
1999/00	Bayern	73	73 : 28	885	2,89	99	71	71,72
2000/01	Bayern	63	62 : 37	897	2,93	81	64	79,01
2001/02	Dortmund	70	62 : 33	893	2,92	102	74	72,55
2002/03	Bayern	75	70 : 25	821	2,63	68	48	70,59
2003/04	Bremen	74	79 : 38	909	2,97	79	59	74,68
2004/05	Bayern	77	75 : 33	890	2,91	64	51	79,69
				11497	**2,89**	**1044**	**789**	**75,66**



Lehrplanbezug

- Realitätsbezug und Modellierung

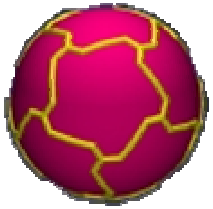
- Vom realen Problem ausgehend, führt der Weg über Annahmen von Beschreibungs-größen, Einflussfaktoren und deren Zusam-menhang zum Strukturmodell, von diesem durch Mathematisierung zu einem mathe-matischen Modell und schließlich zu einer mathematischen Problemlösung



Lehrplanbezug

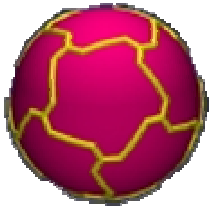
- Leitidee Zahl / Messen

- Leitidee Modellierung



Bundesliga

- 18 Teams spielen in der Bundesliga
- Wie viele Spiele werden während einer Saison in der Bundesliga absolviert?
- Aufgabe 3a

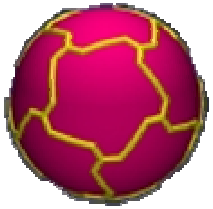


Bundesliga

17 Partien in der Hinrunde für ein Team

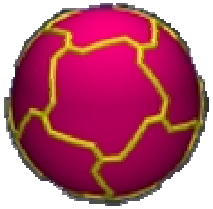
17*9 = 153 Partien pro Halbjahr

Also 306 Partien pro Saison



Bierverbrauch

- Schätzen Sie, wie viel (alkoholfreies) Bier in den Stadien während einer Saison getrunken wird?
- Wie hoch würde der Gerstensaft auf einem Spielfeld stehen?
- Aufgabe 3b/c



Bierverbrauch

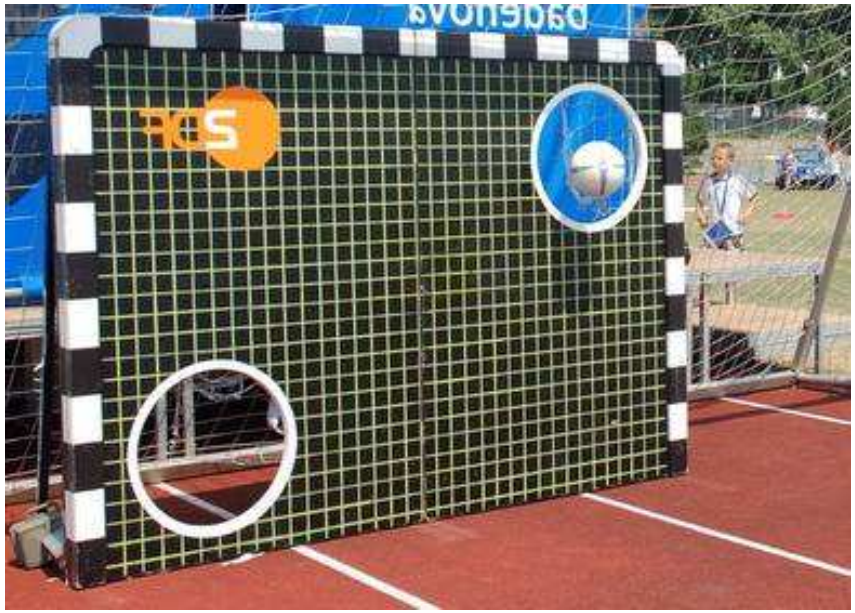
- 34 Spieltage mit jeweils 9 Spielen
- Getränkegenuss pro Spiel 30000 Liter

- Gesamtgenuss: 306*30000 = 9180000 Liter
- Fläche Fußballfeld: $(110*70*0{,}915^2)m^2 = 6447m^2$

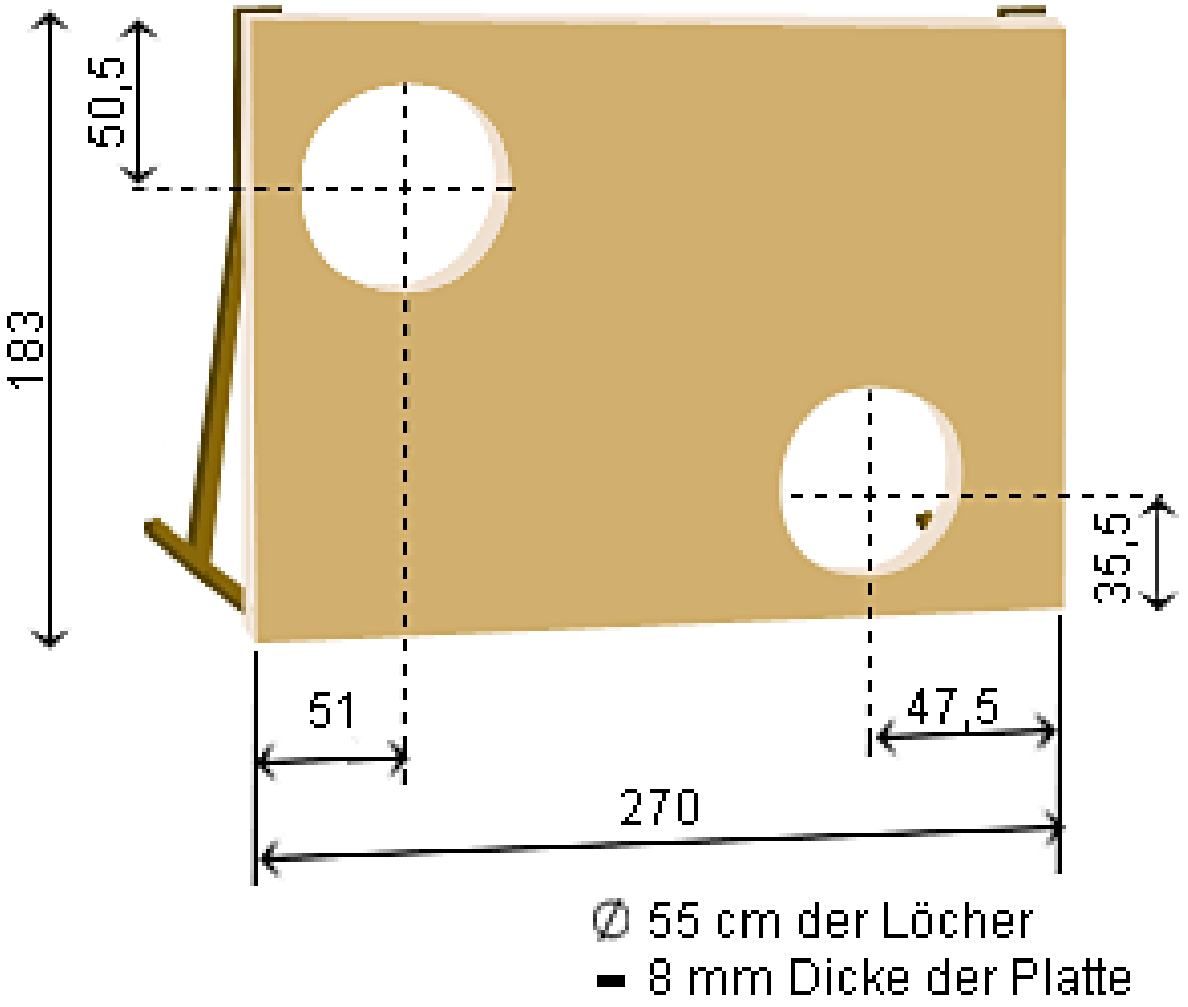
- $9000m^3 : 6500m^2 = 1{,}4m$

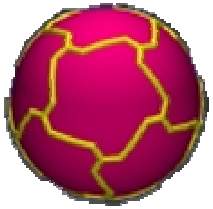
das aktuelle
ZDF
sportstudio

Torwand schießen



Torwand schießen





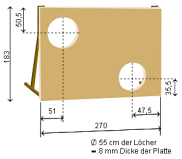
Torwand schießen

- $\tan^{-1}(((63cm-11cm)-35,5cm)/700cm) = 1,35°$

- Lochobergrenze-halber Balldurchmesser
- Abstand Mittelpunkt des Lochs zum Boden

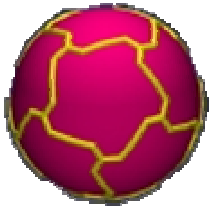
- Toleranz nach oben und unten möglich

- Max. Winkel ca. 2,7°



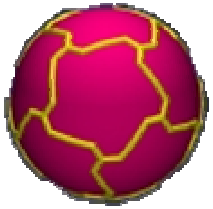
Lehrplanbezug

- Leitidee Wahrscheinlichkeit und Zufall



Lehrplanbezug

- Wahrscheinlichkeiten schätzen
- Zufallsexperimente
- absolute / relative Häufigkeiten



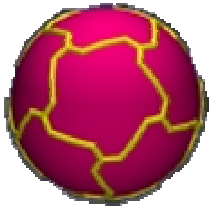
Gewinner und Verlierer

- Aufgabe 5 (a/b/c)
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielen Team G bzw. Team B ein Tor bei einem Angriff?

Gewinner und Verlierer

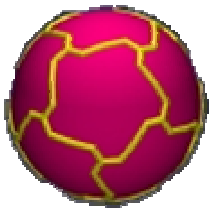
- Aufgabe 5 (a/b/c)
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielen Team G bzw. Team B ein Tor bei einem Angriff?

- $p_{\text{Team B}} = \frac{1}{3}$
- $p_{\text{Team G}} = \frac{1}{2}$



Gewinner würfeln

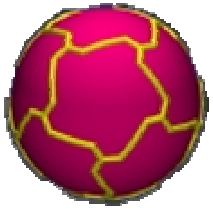
- Jedes Team darf sich die „Tor-Zahlen“ Z aussuchen.
- Team B darf sich zwei Zahlen auf dem Würfel aussuchen (z.B. 1 und 4).
- Team G darf sich drei Zahlen auf dem Würfel aussuchen (z.B. 2, 4 und 6).
- Team B führt den ersten Angriff aus. Wirft es eine seiner „Torzahlen“, hat es damit ein Tor gemacht.
- Nun ist Spieler B dran.
- Jeder hat drei Angriffe.



Gewinner würfeln

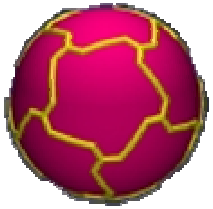
- Jedes Team hat drei Angriffe.
- Das Ergebnis wird notiert.
- Gewonnen hat das Team, mit den meisten Toren.
- Es werden 30 Wiederholungen durchgeführt.
- Aufgabe 5 (Tabelle 1)

- (In der Klasse kann man eine „Klassenliga“ durchführen.)
- (Es wird gleich ein Rückspiel durchgeführt.)
- (Nun ist der nächste Gegner dran.)



Ergebnisse

\ Team B Team A \	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				



Gewinner und Verlierer

- Ein einfaches Modell
- Drei Angriffe pro Spiel
- Torwahrscheinlichkeit pro Angriff z.B. 0,5

		Team B	Team G
n	k	0,333	0,5
3	0	0,2963	0,1250
	1	0,4444	0,3750
	2	0,2222	0,3750
	3	0,0370	0,1250
		0,6666667	0,5

	Team B	0	1	2	3
		0,2963	0,4444	0,2222	0,0370
0	0,1250	0,03704	0,05556	0,02778	0,00463
1	0,3750	0,11111	0,16667	0,08333	0,01389
2	0,3750	0,11111	0,16667	0,08333	0,01389
3	0,1250	0,03704	0,05556	0,02778	0,00463
G		0,2963	0,44444	0,22222	0,03704

Team B gewinnt (1:0): 5,6%; Team G gewinnt (1:0): 11,1%;

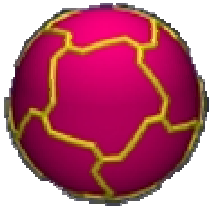
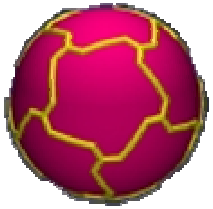


Tabelle 05/06

Platz	Verein	Spiele	S	U	N	Tore	Punkte	
1	FC Bayern München	25	18	5	2	48:19	59	·
2	Hamburger SV	25	16	5	4	40:18	53	↑
3	FC Schalke 04	25	14	9	2	37:18	51	↑
4	Werder Bremen	25	15	5	5	55:29	50	↓
5	VfB Stuttgart	25	7	14	4	27:22	35	·

15	1.FSV Mainz 05	25	6	6	13	36:39	24	↑
16	1.FC Kaiserslautern	25	6	6	13	34:54	24	↓
17	MSV Duisburg	25	4	9	12	23:43	21	·
18	1.FC Köln	25	4	6	15	35:56	18	·



Saison 06/07

Tabelle	Heimtabelle	Auswärtstabelle	Form

Platz		Club	Spiele	Siege	Unentschieden	Niederlagen	Tore	Punkte	
1	·	FC Schalke 04	26	16	5	5	42:25	53	PL, CL
2	·	Werder Bremen	26	15	5	6	61:33	50	PL, CL
3	·	VfB Stuttgart	26	13	7	6	42:30	46	PL, CL Qual.
4	·	Bayern München	26	13	5	8	39:31	44	PL, UEFA Cup
5	↑	Bayer Leverkusen	26	11	6	9	40:35	39	PL, UEFA Cup
6	↓	1. FC Nürnberg	26	8	14	4	36:24	38	UI-Cup
15	↓	Borussia Dortmund	26	7	8	11	29:37	29	
16	↓	VfL Bochum	26	7	6	13	30:42	27	Abstieg
17	·	Arminia Bielefeld	26	6	8	12	31:36	26	Abstieg
18	·	Bor. Mönchengladbach	26	6	6	14	21:32	24	Abstieg

Platz		Club	Spiele	Siege	Unentschieden	Niederlagen	Tore	Punkte	
1	·	Bayern München	13	8	4	1	28:7	28	PL
2	↑	Werder Bremen	13	8	3	2	30:17	27	PL
3	↓	Hamburger SV	13	8	3	2	20:10	27	PL
4	·	Karlsruher SC	13	7	2	4	14:15	23	PL
5	↑	Bayer Leverkusen	13	6	3	4	20:10	21	PL
6	↓	Hannover 96	13	6	3	4	17:17	21	UI
7	·	FC Schalke 04	13	4	7	2	18:12	19	
8	↑	Hertha BSC	13	6	1	6	17:17	19	
9	↑	VfB Stuttgart	13	6	1	6	16:19	19	
10	↓	Eintracht Frankfurt	13	4	6	3	13:15	18	
11	↓	VfL Wolfsburg	13	4	4	5	22:23	16	
12	↑	VfL Bochum	13	4	3	6	20:22	15	
13	↓	Borussia Dortmund	13	4	3	6	18:22	15	
14	·	Arminia Bielefeld	13	4	3	6	16:28	15	
15	·	Hansa Rostock	13	4	2	7	14:18	14	
16	·	1. FC Nürnberg	13	2	3	8	16:24	9	Ab

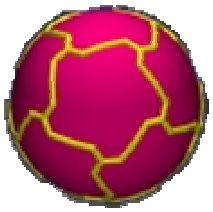


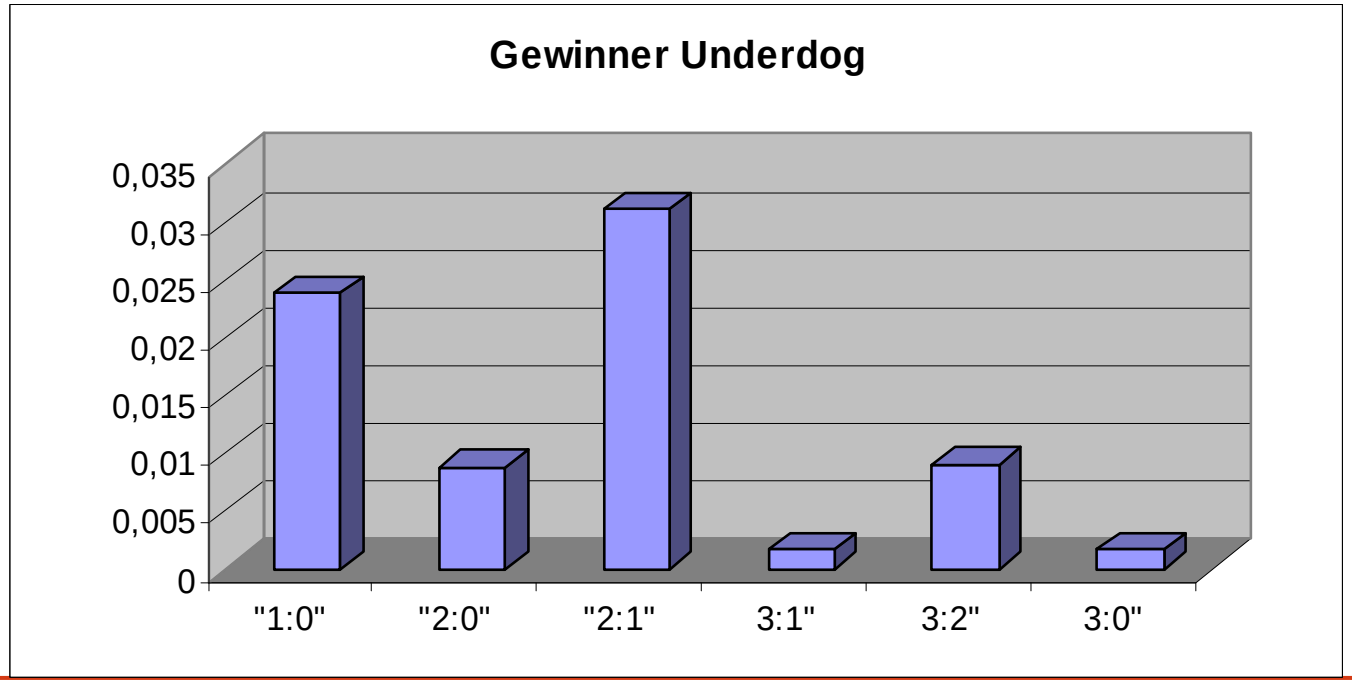
Tabelle Saison09/10

1	↑		Werder Bremen	13	7	5	1	29:10	26
2	↓		Bayer 04 Leverkusen	12	7	5	0	25:8	26
3	↑		FC Schalke 04	13	7	4	2	21:12	25
4	↑		1899 Hoffenheim	13	7	2	4	24:11	23
5	↓		Hamburger SV	12	6	5	1	27:16	23
6	·		1. FSV Mainz 05	13	6	4	3	19:17	22
7	↓		VfL Wolfsburg	13	6	3	4	25:23	21
8	·		FC Bayern München	12	5	5	2	18:10	20

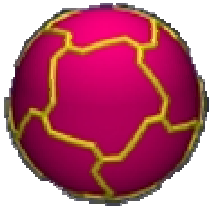
14	↑		1. FC Nürnberg	13	3	3	7	12:20	12
15	↓		1. FC Köln	13	3	3	7	7:15	12
16	↓		VfB Stuttgart	13	2	5	6	11:16	11
17	·		VfL Bochum 1848	12	2	2	8	12:25	8
18	·		Hertha BSC	13	1	2	10	8:27	5

Gewinner und Verlierer

- Warum gewinnen Underdogs meistens bei einer ungeraden Anzahl von Toren?
- Bremen : Underdog (z.B. Hertha)
- Torverhältnis im Moment 29:10



Torgröße



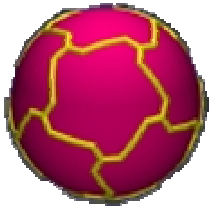
Torgröße

- Aktuell: 3 Tore pro Spiel
- Früher: 4 Tore pro Spiel

- Problem: Körpergröße

- Attraktivität

- Ziel: Untersuchung des Vorschlags von Ralf Rangnick

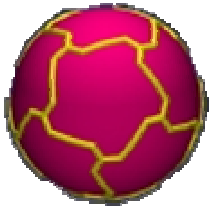


Torgröße

- Aufgabe 6a (Torwart und Fläche - heute)

- 75% Abwehr, also 75% Flächenabdeckung

- $(8*0{,}915*8/3*0{,}915)m^2*0{,}75 = 13{,}4m^2$

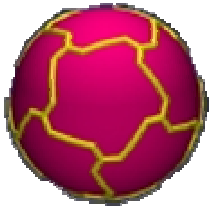


Torgröße

- Aufgabe 6b (Torwart und Fläche - früher)

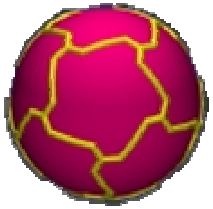
- 67% Abwehr, also 67% Flächenabdeckung

- $(8*0{,}915*8/3*0{,}915)m^2*0{,}67 = 11{,}9m^2$



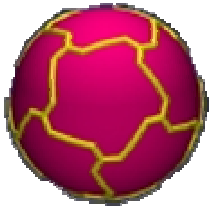
Torgröße

- Aufgabe 6ce
- „Originaltorverhältnis“, wenn 13,4m^2 2/3 der Torfläche entsprechen würden!
- gewünschte Torfläche: ca. 20m^2 (19,5m^2)
- Vorschlag Rangnick:
- Torfläche: (9*0,915*9/3*0,915)m^2 = 22,6m^2



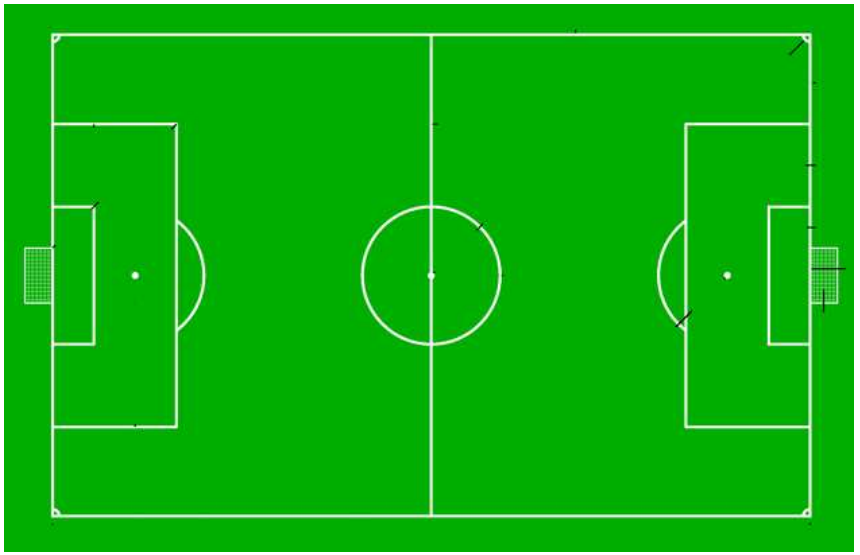
Warum 10 Feldspieler?

- Historische Gründe- sicherlich!
- Mathematische Modelle?
- Gleichverteilungsansatz
  - 3sec pro Ballkontakt
  - Durchschnittsgeschwindigkeit 5m/s
  - Aktionsradius von 15m =>706m^2
  - Fußballfeld 68m x 105m= 7140m^2



Rasenheizung

- Wie lange sind die Rohre der Rasenheizung im Stadion?

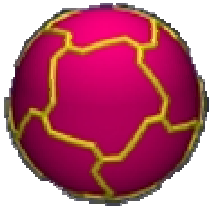


72m

110m

Der „WM-Ball“

Das Spiel mit großen Zahlen



Der „WM-Ball“

- Wie viele Möglichkeiten gibt es denn die Flaggen auf dem Ball anzuordnen?
- Wie weit reicht die Kette der Bälle?
- 32!=32x 31x30…….3x2x1

263.130.836.933.694.000.000.000.000.000.000.000

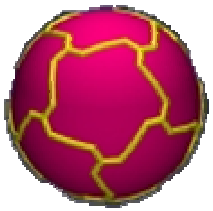
Wenn die Fünfecke und Sechsecke schon festgelegt sind:

12! x 20!= 479001600 x 2432902008176640000=

1.165.363.954.559.820.000.000.000.000

12! x 20!:60=19.422.732.575.997.100.000.000.000

,00



Der „WM-Ball“

- Wie weit reicht die Kette der Bälle?

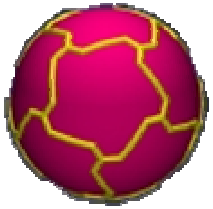
Bei Beachtung der Fünf- und Sechsecke

19.422.732.575.997.100.000.000.000*0,21m=
431.123.566 Lichtjahre ungefähr
4300-facher Durchmesser unserer Galaxis

Bei nicht Beachtung der Fünfecke und Sechsecke

- 5,82x 10^{13}-facher Durchmesser der Galaxie
- 2,5x 10^{22} Lichtjahre
- Das ist der 250 milliardenfache Durchmesser des Universums

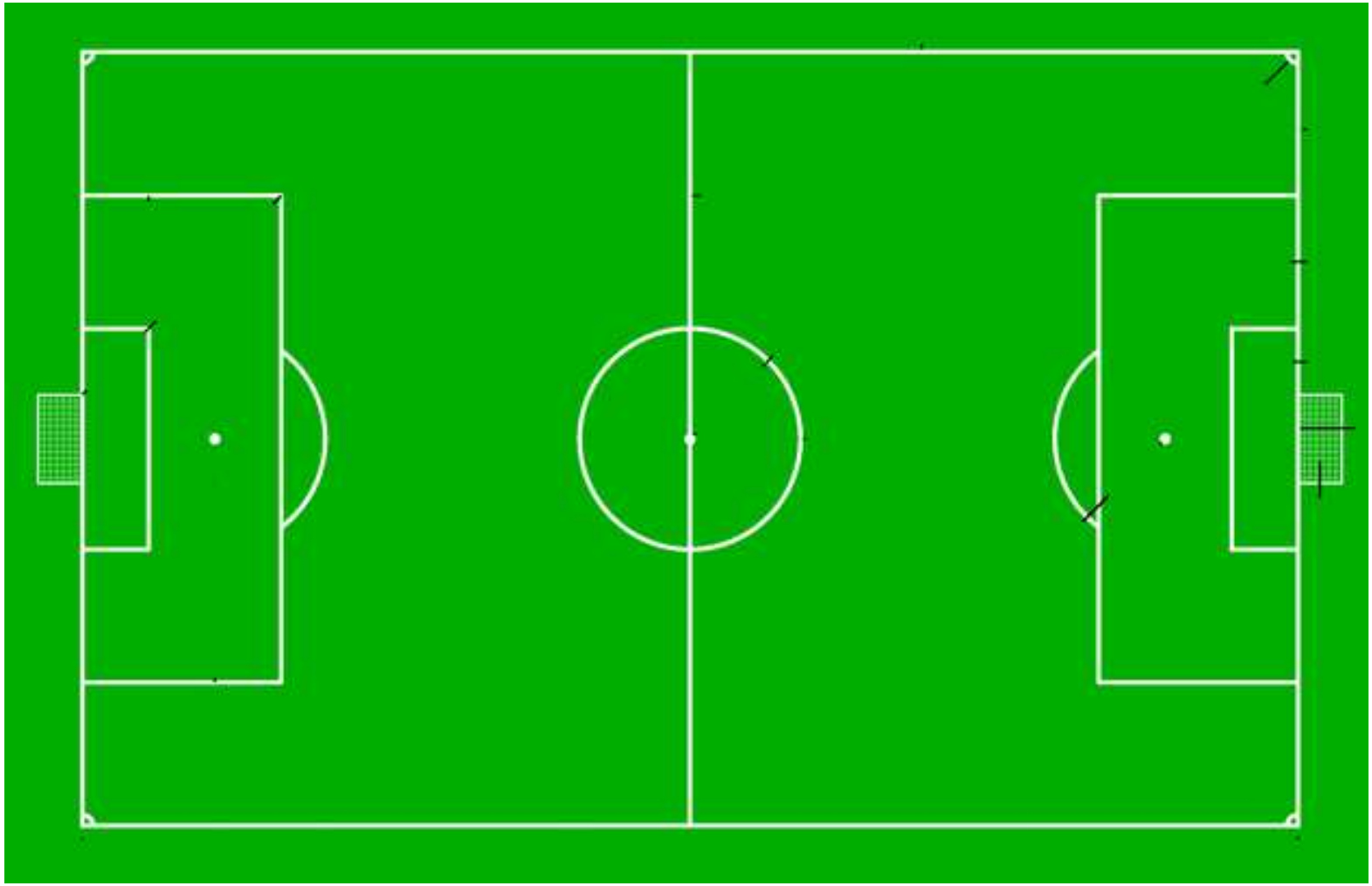
,00



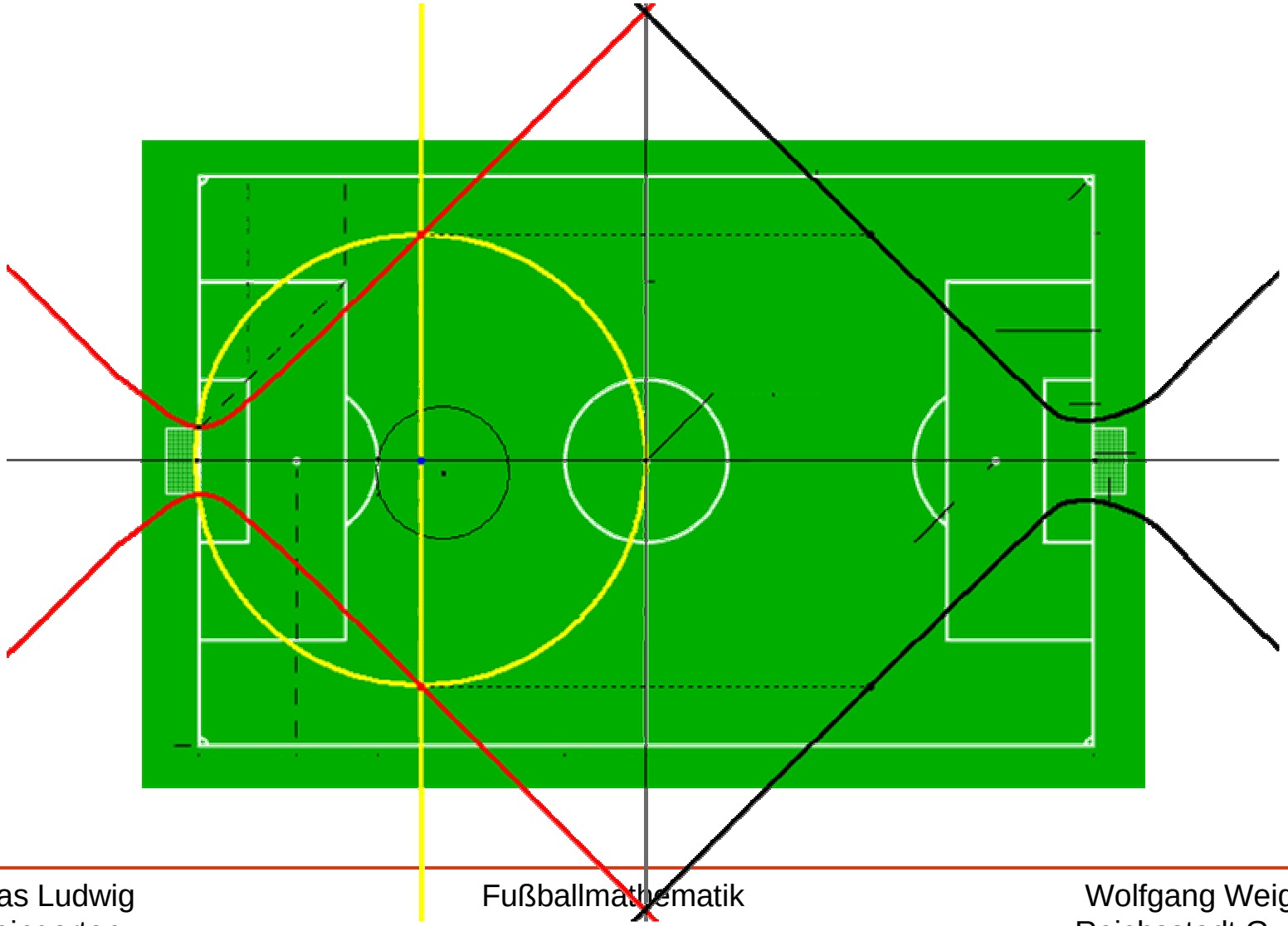
Bester Platz/Position

- Was heißt bester Platz bzw. beste Schussposition?
- Wo sieht man die Tore unter größtmöglichem Winkel?
- Was hat das mit dem Torjäger zu tun?

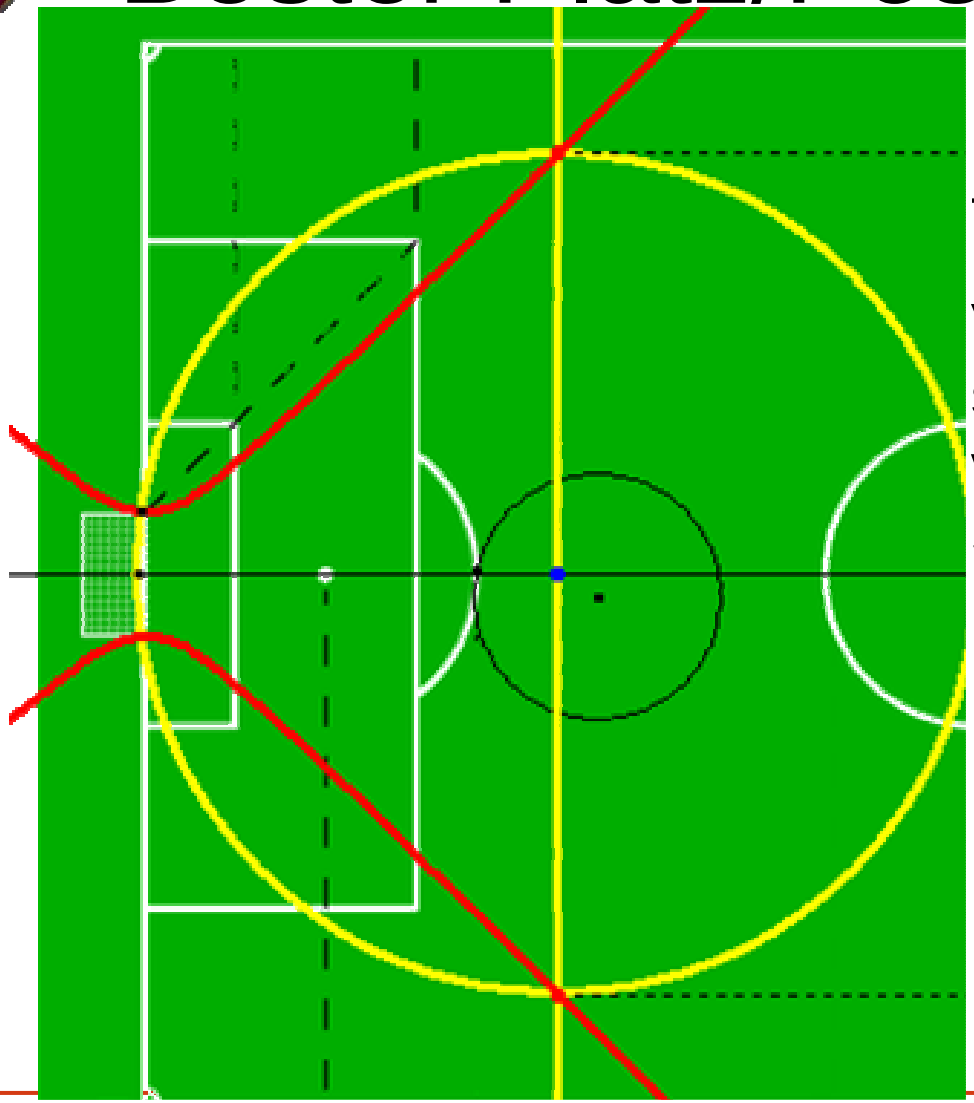
Bester Platz/Position



Bester Platz/Position



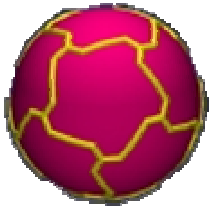
Bester Platz/Position



Trainerspruch:

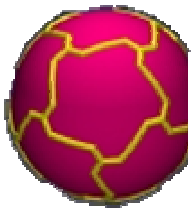
Von der Torauslinie soweit weg sein, wie von der länglichen Spielfeldmitte.

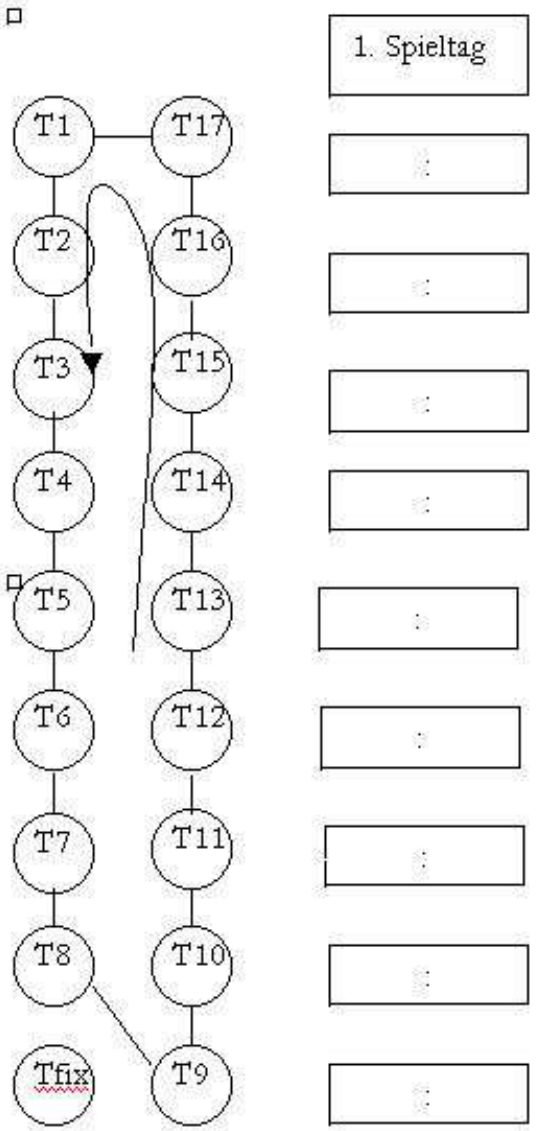
Dynageo !

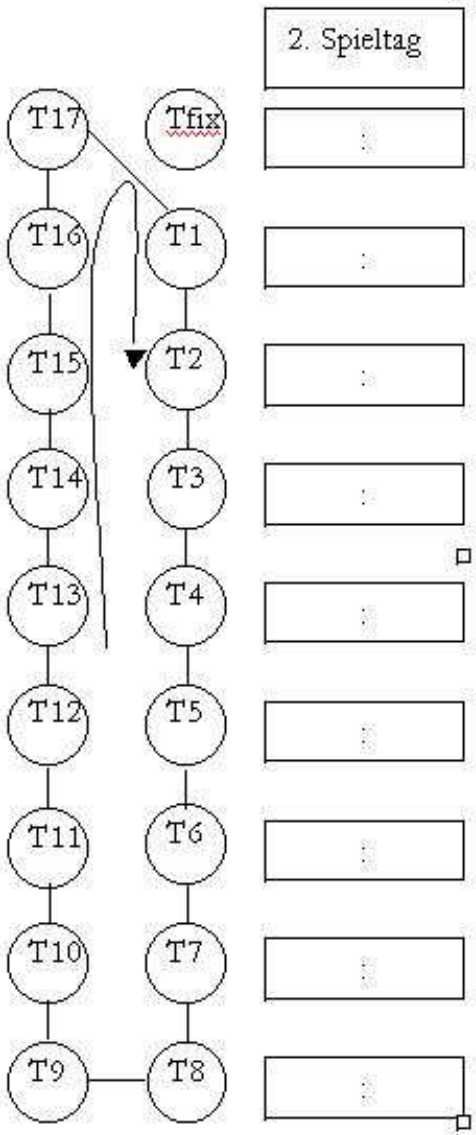


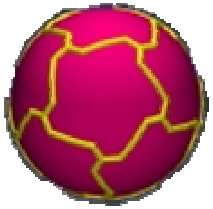
Der Spielplan

- Wie wird der Spielplan der Bundesliga erstellt?
- Bedingungen: Am Ende eine Runde darf keine Mannschaft den Vor-oder Nachteil von zwei Heim- bzw. Auswärtsspielen haben.
- Prinzip der Perlenkette

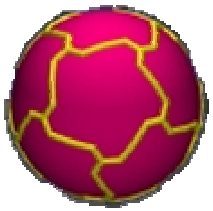



1. Spieltag
T1
T17
T2
T16
T3
T15
T4
T14
T5
T13
T6
T12
T7
T11
T8
T10
Tfix
T9


2. Spieltag
T17
Tfix
T16
T1
T15
T2
T14
T3
T13
T4
T12
T5
T11
T6
T10
T7
T9
T8

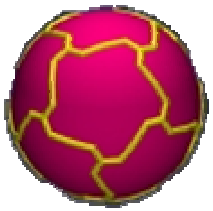


Projektarbeit



Das Projekt als Problem Woodhull/ Dewey um 1910

- Ein Projekt nimmt seinen Ausgang von einer Frage.
- Zur Durchführung eines Projektes bedarf es der Motivation und der aktiven Mitarbeit des Schülers.
- Projekte bieten die Basis für eine sinnvolle Stoffauswahl.
- Der Unterricht darf nicht allein aus Projekten bestehen.
- Am Ende eines Projektes steht selten eine vollkommene fertige Lösung.



Projektkriterien nach Emer/Horst/Ohly,1991

Lebenspraxisbezug

Kommunikabilität

Gesellschaftsbezug

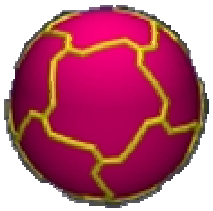
Projektunterricht

Produktorientiertes Arbeiten

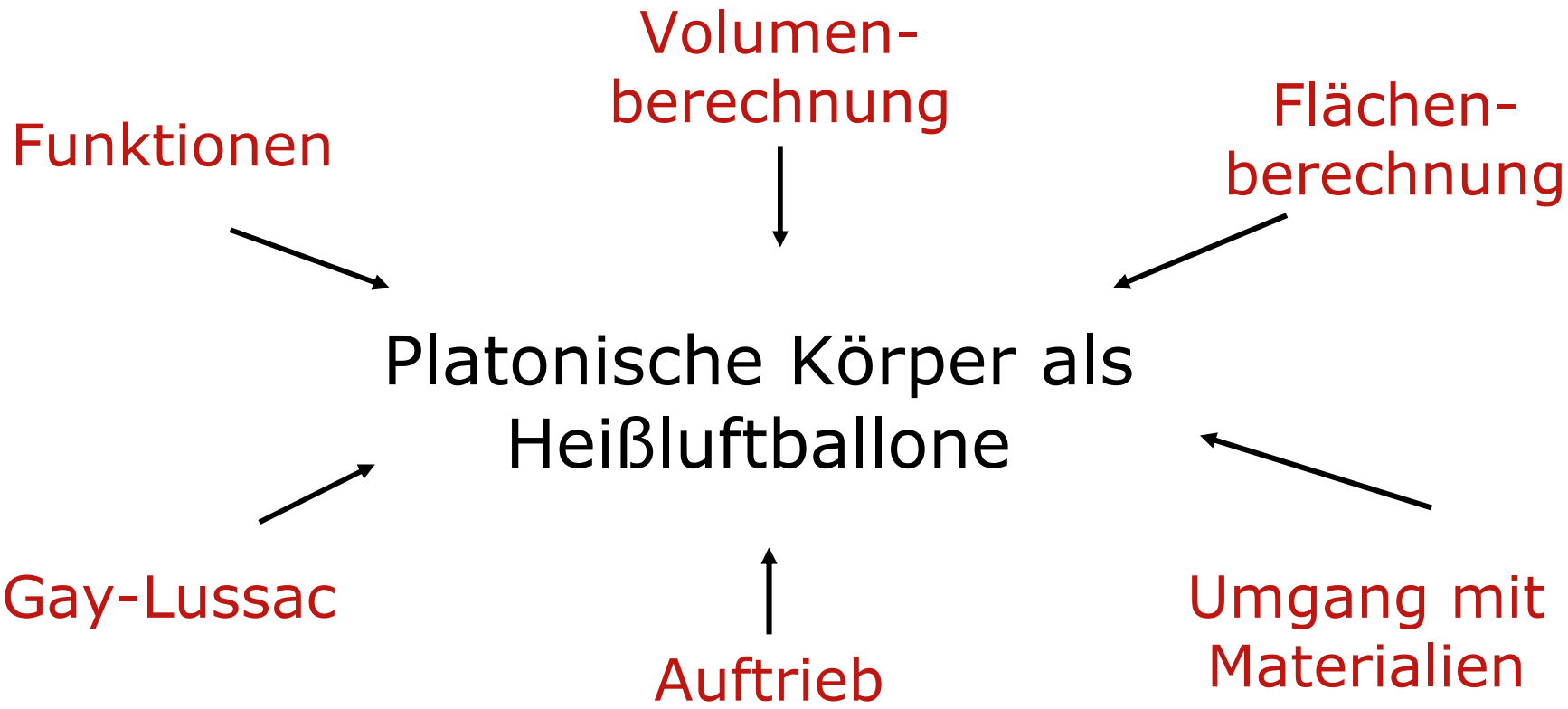
Selbstbestimmtes Lernen

Interdisziplinäres Arbeiten

Ganzheitliches Lernen

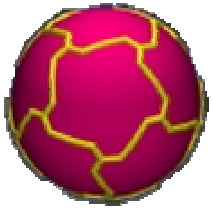


Heißluftballone in Form der Platonischen Körper (Kl.9)



Vorbereitung

- Wann fliegt (fährt) ein Ballon?
- Flächendichte ~25g/m^2
- Auftriebsdichte~ 1N/m^3
- Größenabschätzung
- Alle Körper sollen gleichzeitig starten



Bestimmung der Kantenlänge

$$F_B \geq F_G$$

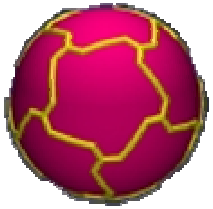
$$V_{balloon} \cdot \tilde{\rho}_B \cdot g \geq S_{balloon} \cdot \tilde{\rho}_S \cdot g$$

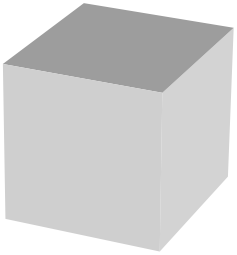
$$V_{balloon} \cdot 100 \frac{g}{m^3} \geq S_{balloon} \cdot 25 \frac{g}{m^2}$$

$$c_V \cdot a^3 \cdot 100 \frac{g}{m^3} \geq c_S \cdot a^2 \cdot 25 \frac{g}{m^2}$$

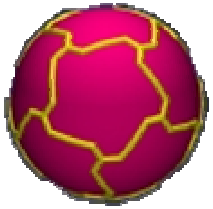
$$a \geq \frac{c_S}{4 \cdot c_V} m(eter)$$

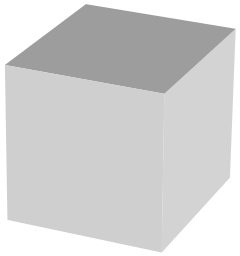
- Tetraeder 3,5m
- Würfel 1,5m
- Oktaeder 1,8m
- Ikosaeder 1,0m
- Dodekaeder 0,7m





Kantenlänge 1m



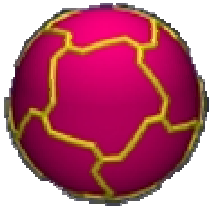


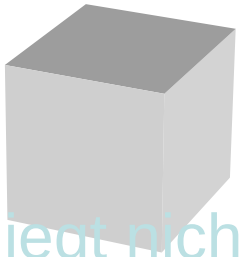
Kantenlänge 1m

$V = 1m^3$

$\rightarrow$

Auftriebskraft = 1N





fliegt nicht

Kantenlänge 1m

$V = 1m^3$

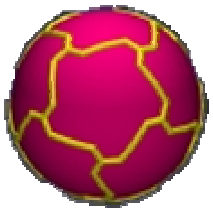
$\rightarrow$

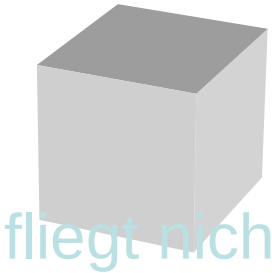
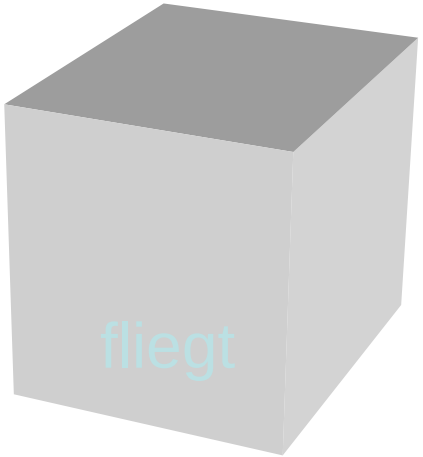
Auftriebskraft = 1N

$O = 6m^2$

$\rightarrow$

Gewichtskraft = 1,5 N



 Kantenlänge 1m	$V = 1m^3$ → Auftriebskraft = 1N
	$O = 6m^2$ → Gewichtskraft = 1,5 N
 Kantenlänge 2m	$V = 8m^3$ → Auftriebskraft = 8N
	$O = 24m^2$ → Gewichtskraft = 6 N

Matthias Ludwig
PH Weingarten

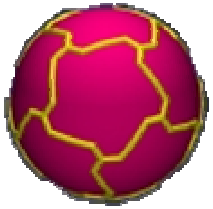
Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

Matthias Ludwig
PH Weingarten

Fußballmathematik

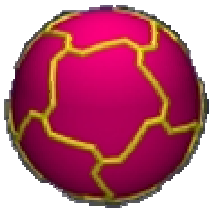
Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

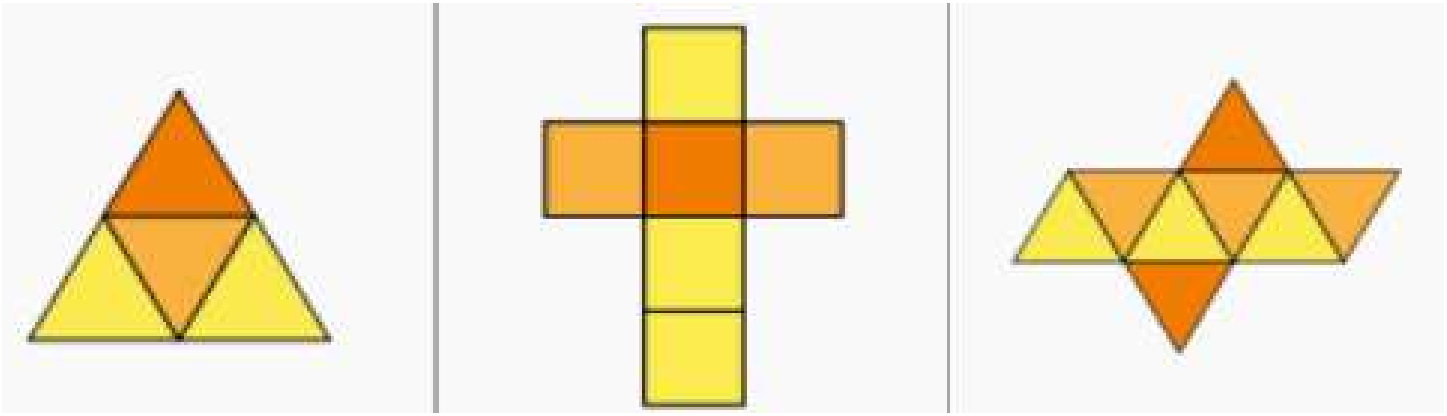
Sendetermin war am
1. Juli 2006 9.30 ARD 15.00 KIKA
2.Juli 2006 9.03 ARD

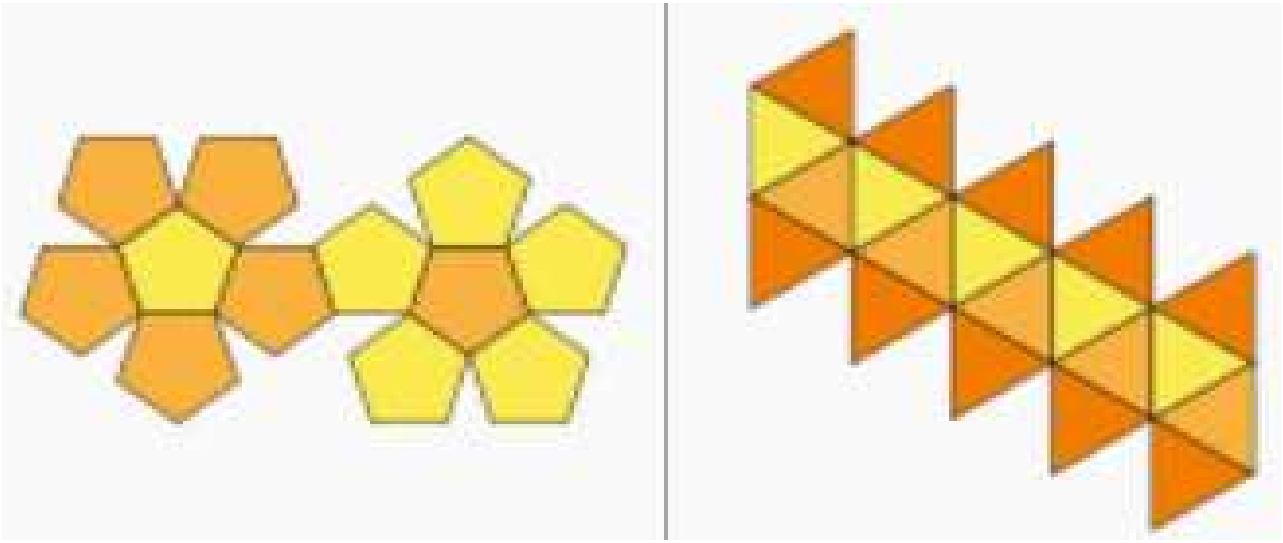


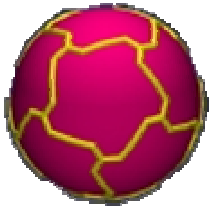
Der Bau der Ballone

Hörsaal I

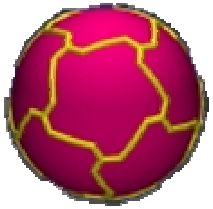








Der Fußball



Wie lange dauert es bis ein Fußball zusammengenäht ist? Mit wie vielen Stichen ist ein Fußball zusammen genäht?

Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

TELSTAR
durlast®
official
world cup
1974

WM-Ball

Matthias Ludw
PH Weingarte

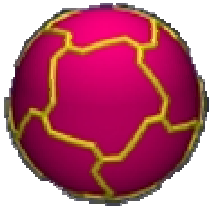
Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

Matthias Ludwig
PH Weingarten

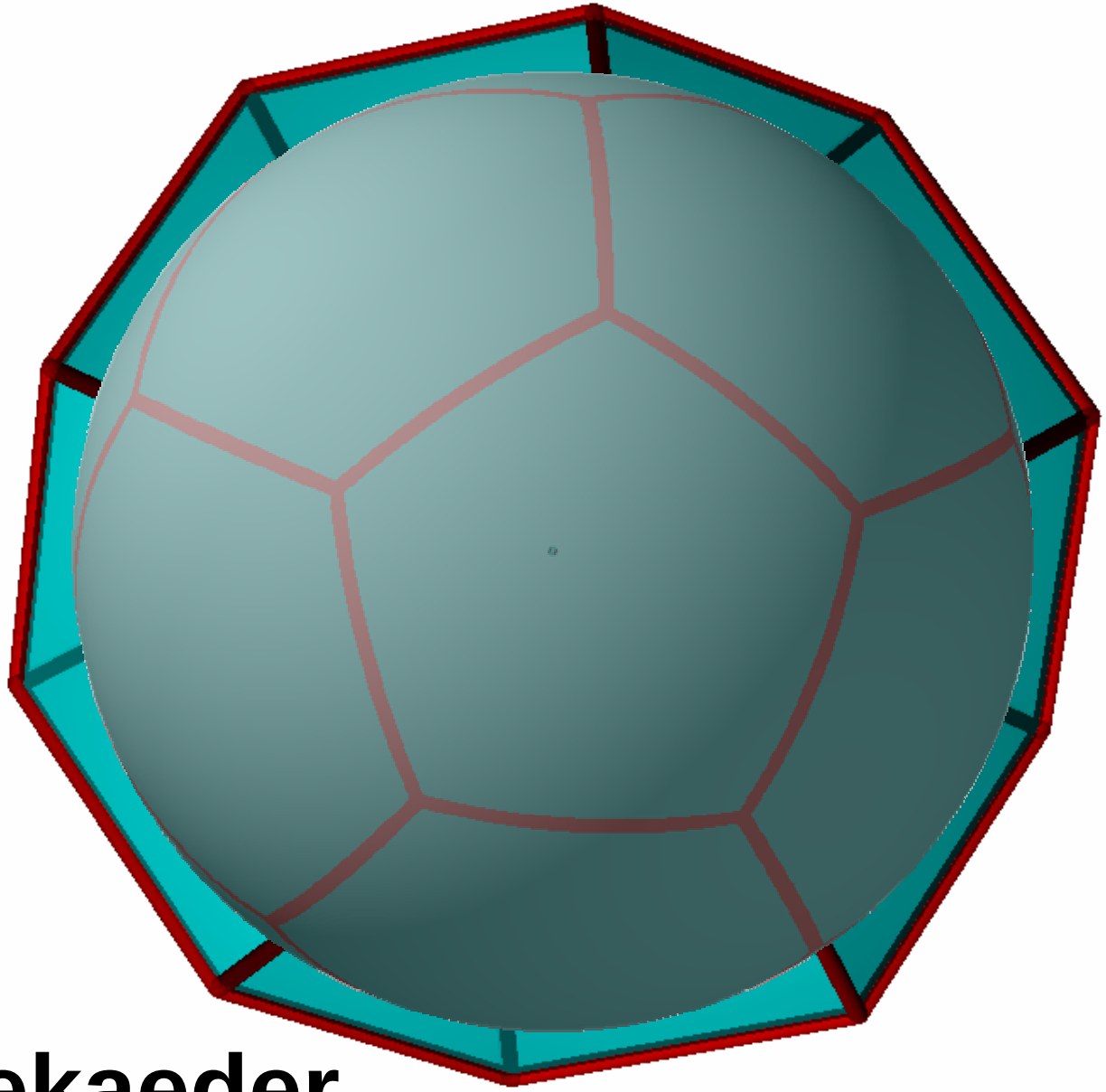
Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

ROTEIRO
GRAND STADE
adidas
5
FIFA

adidas



Ein Fußball nur aus Fünfecken?

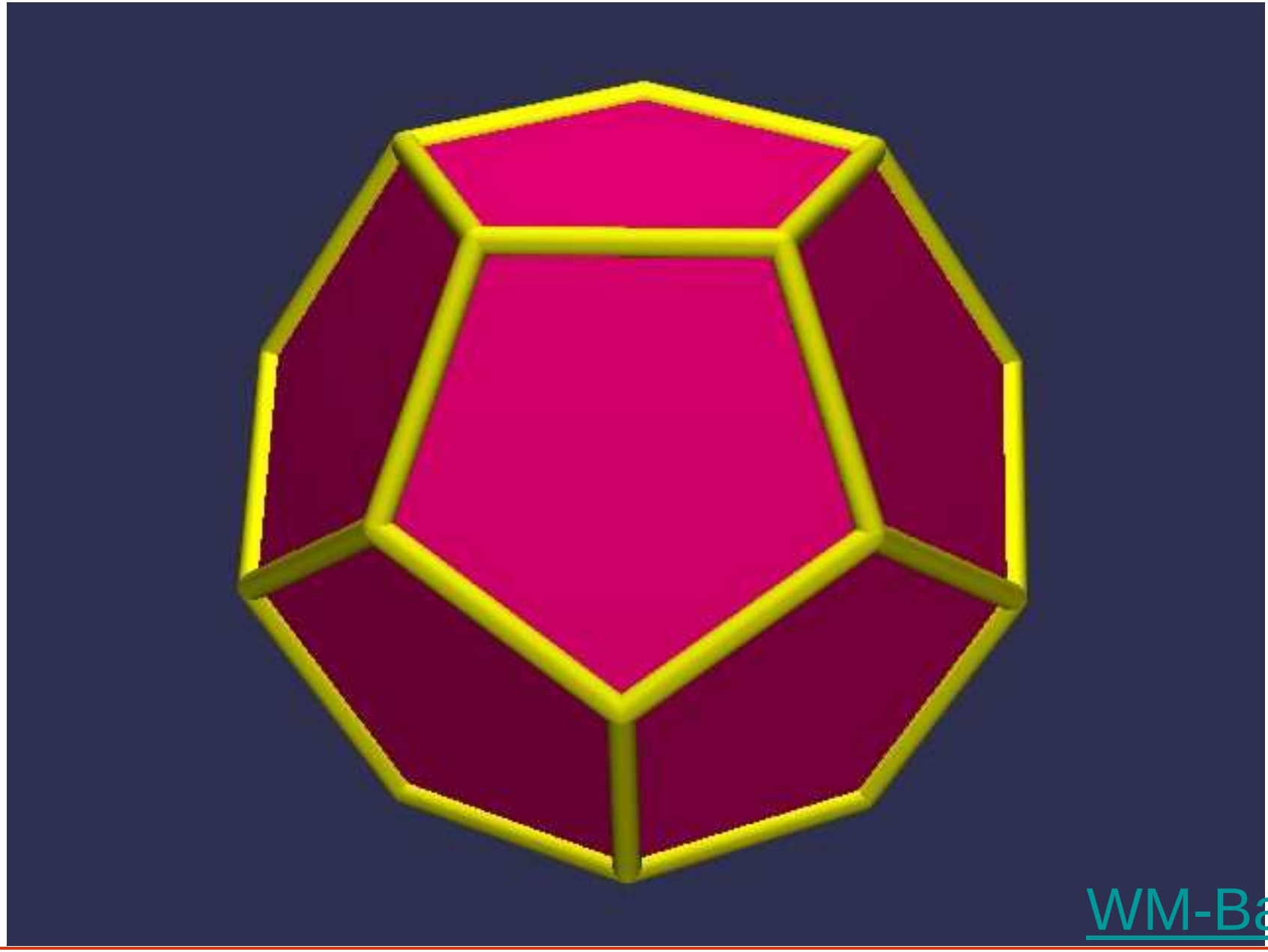


Dodekaeder

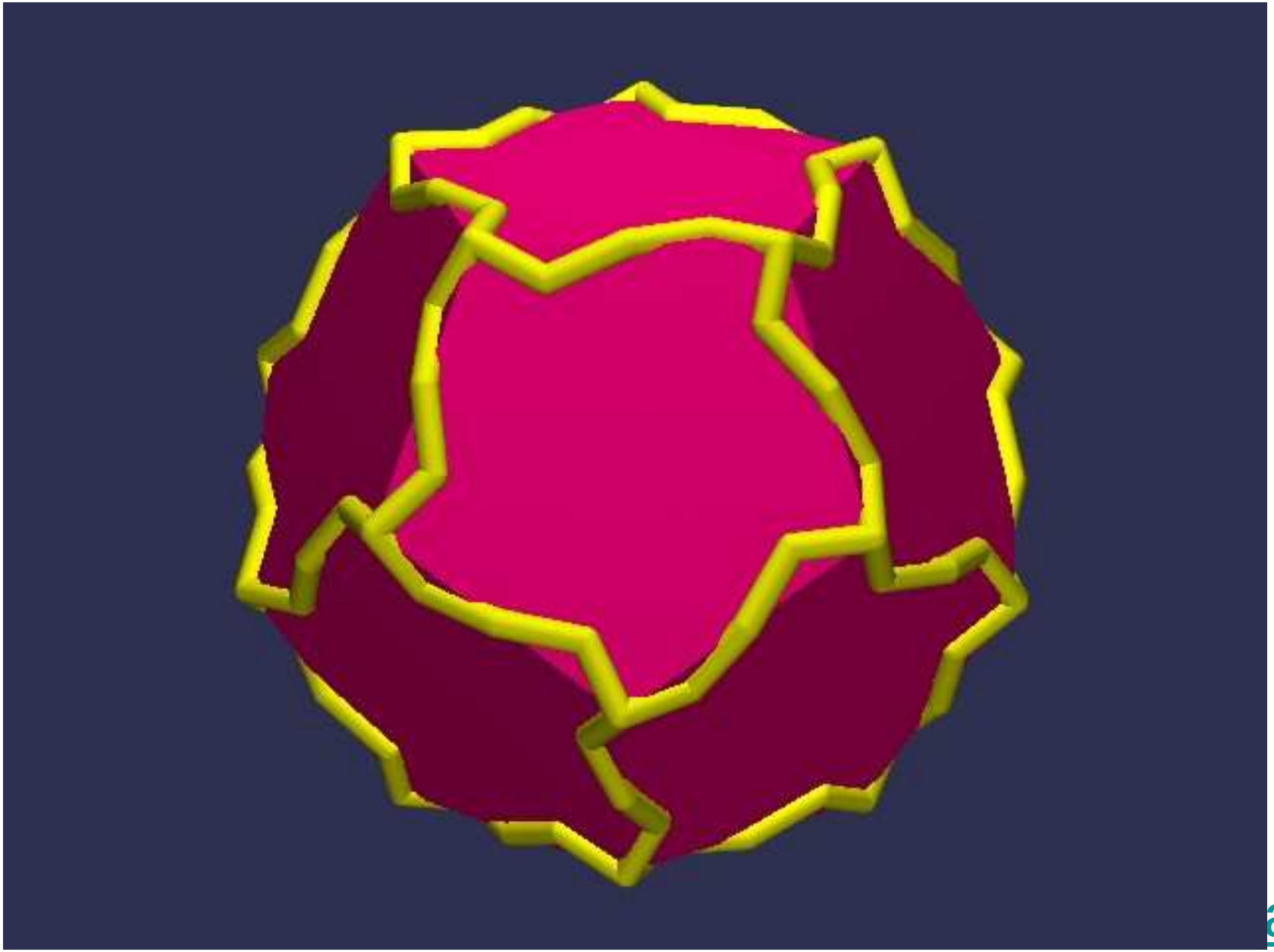
Dodekaeder

Wolfgang Weigel

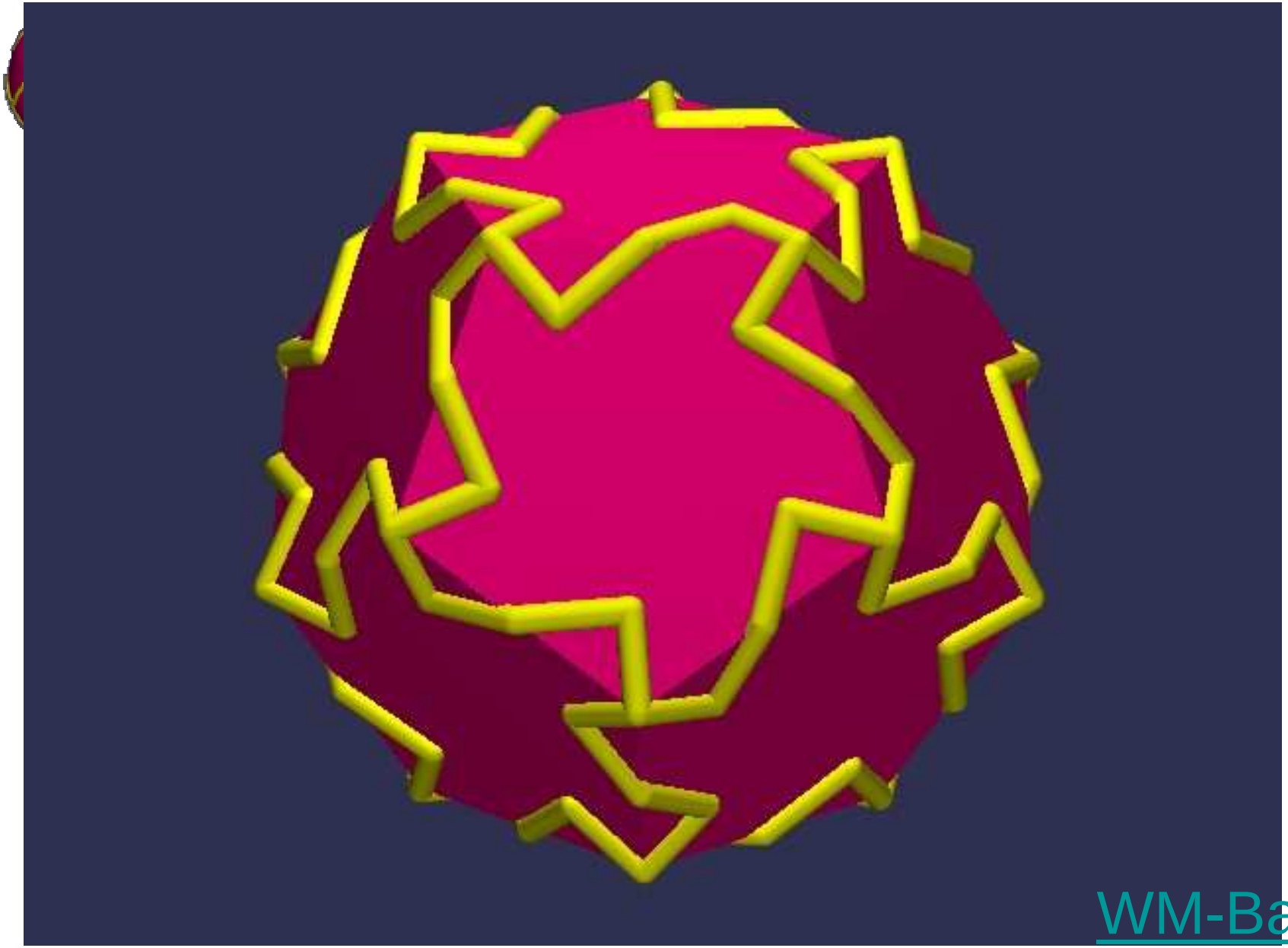
WM-Ball



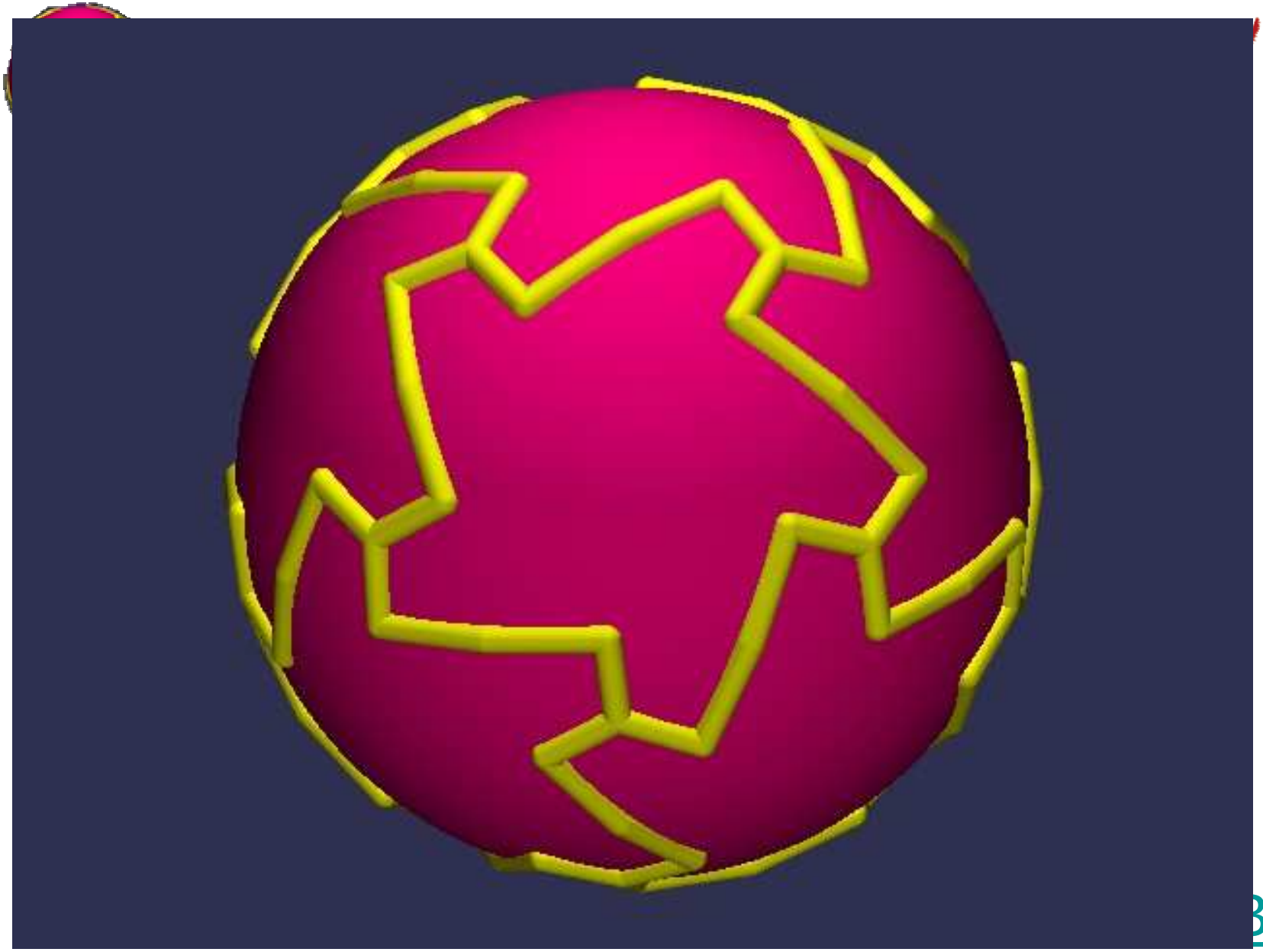
WM-Ball



all



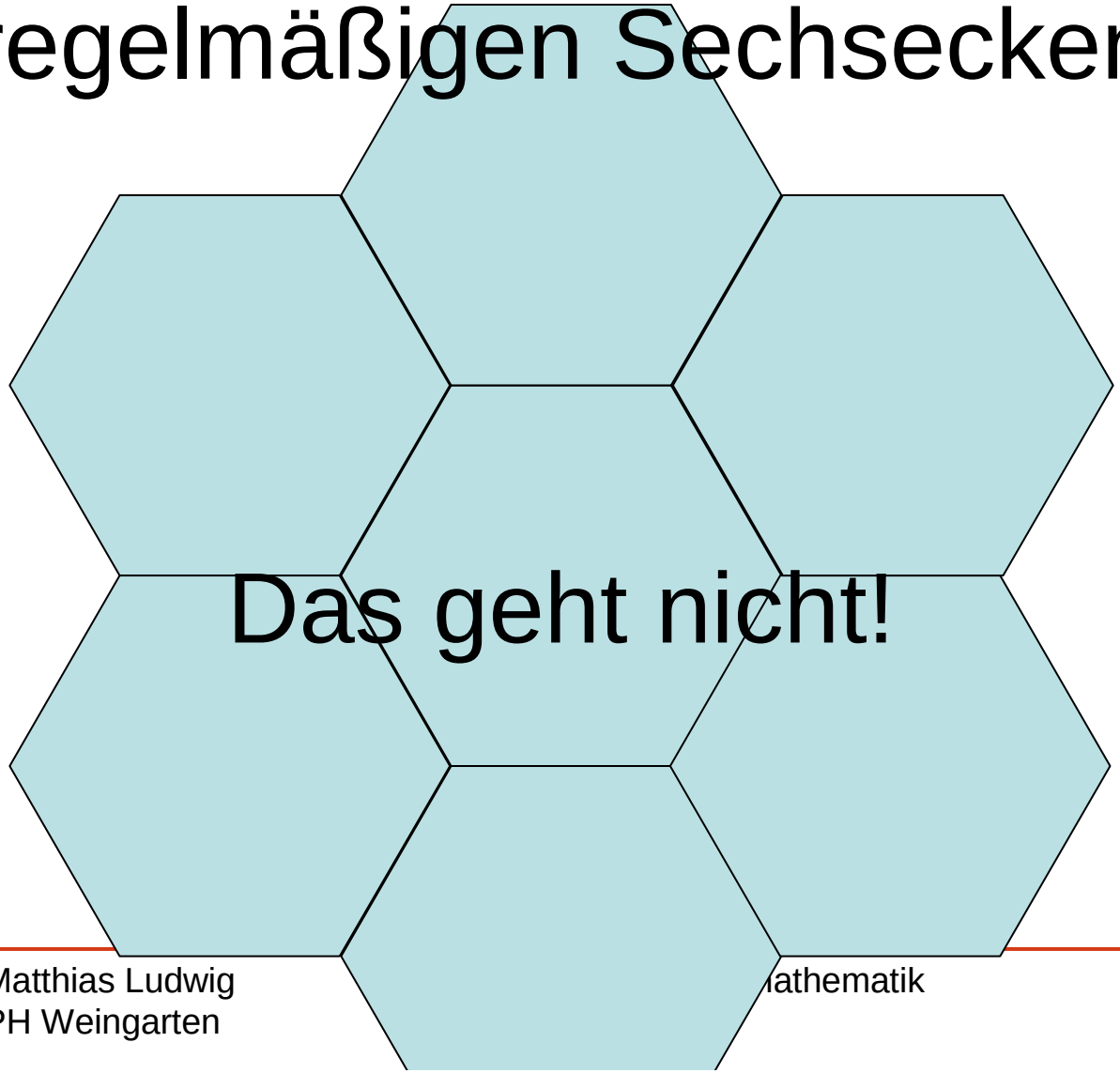
WM-Ball



Ball

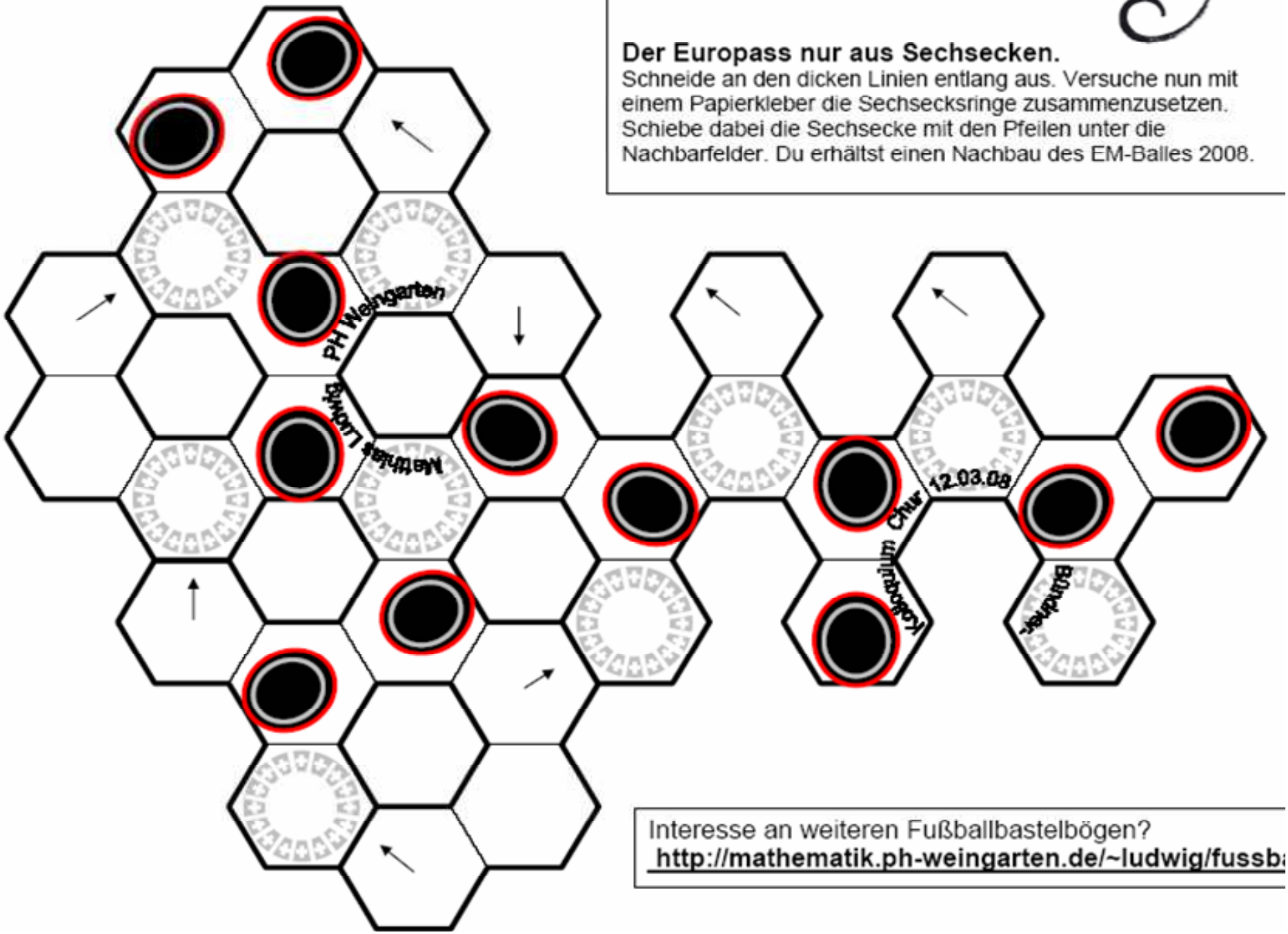
WM-Ball

Ein Fußball nur aus regelmäßigen Sechsecken?

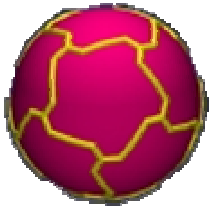


Das geht nicht!

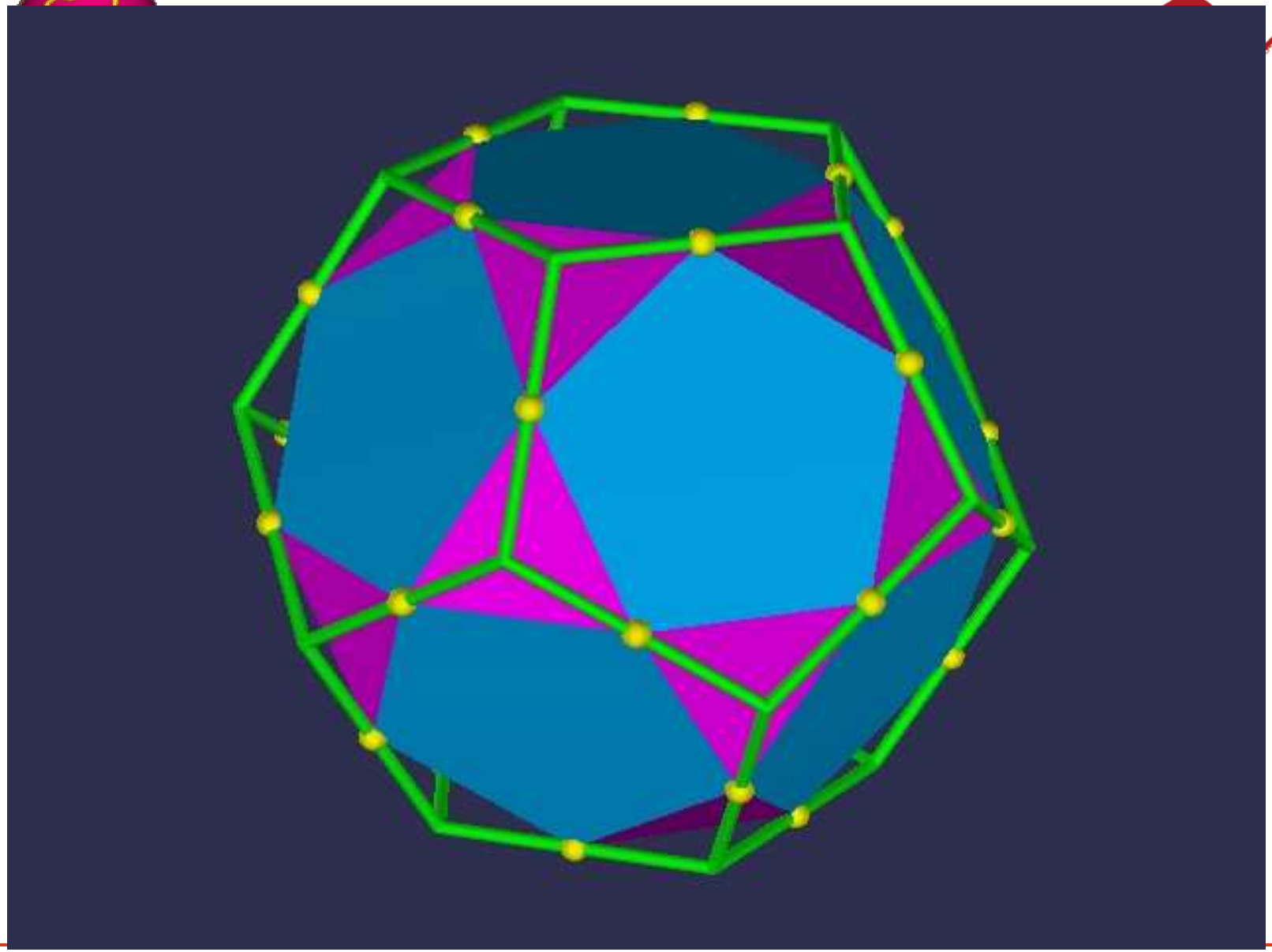
Der Europass nur aus Sechsecken.
Schneide an den dicken Linien entlang aus. Versuche nun mit einem Papierkleber die Sechsecksringe zusammenzusetzen. Schiebe dabei die Sechsecke mit den Pfeilen unter die Nachbarfelder. Du erhältst einen Nachbau des EM-Balles 2008.

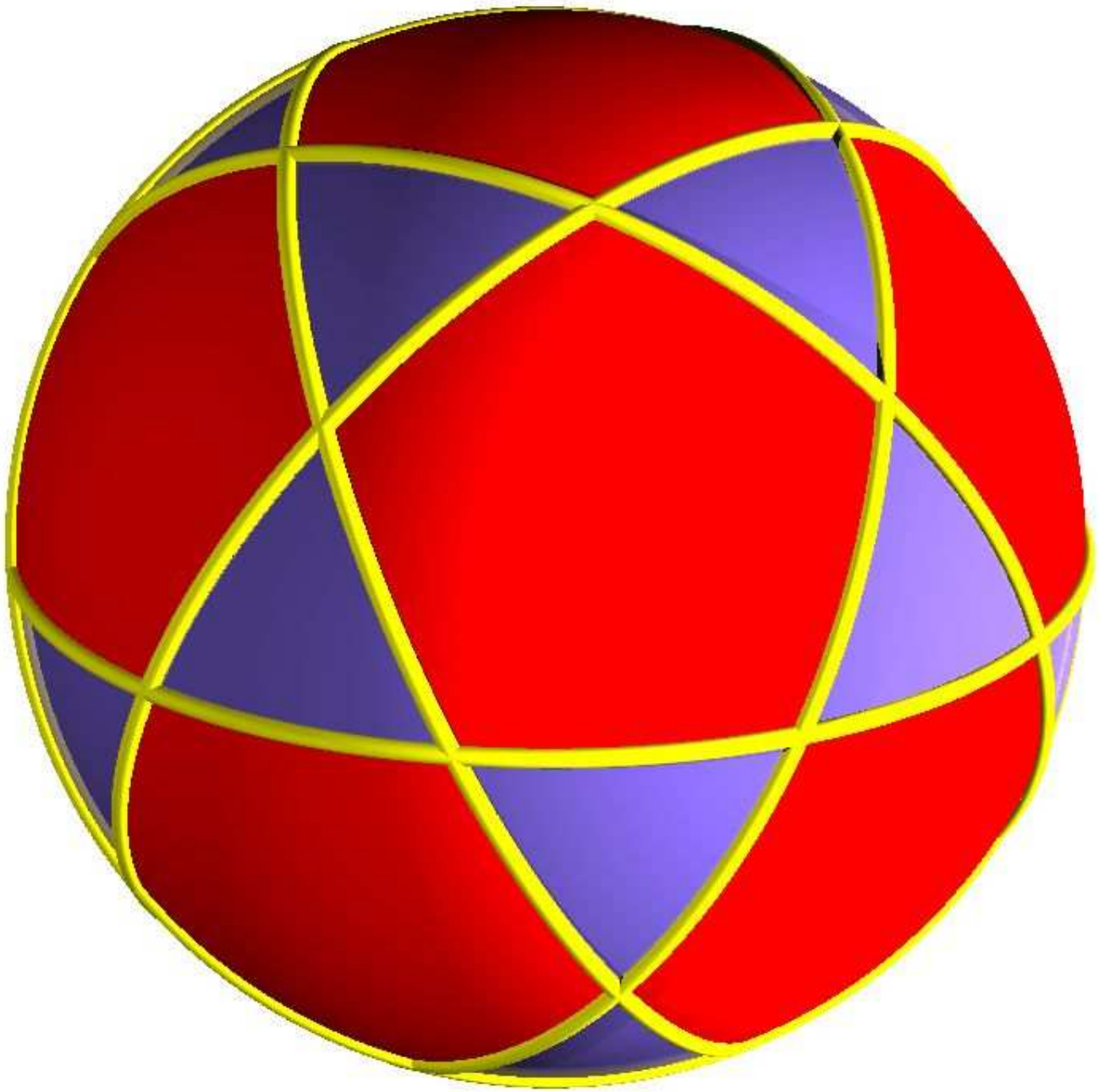


Interesse an weiteren Fußballbastelbögen?
http://mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/fussba

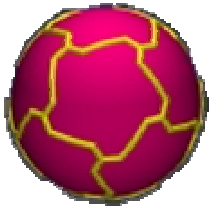


Ein Fußball aus Fünfecken und Dreiecken?

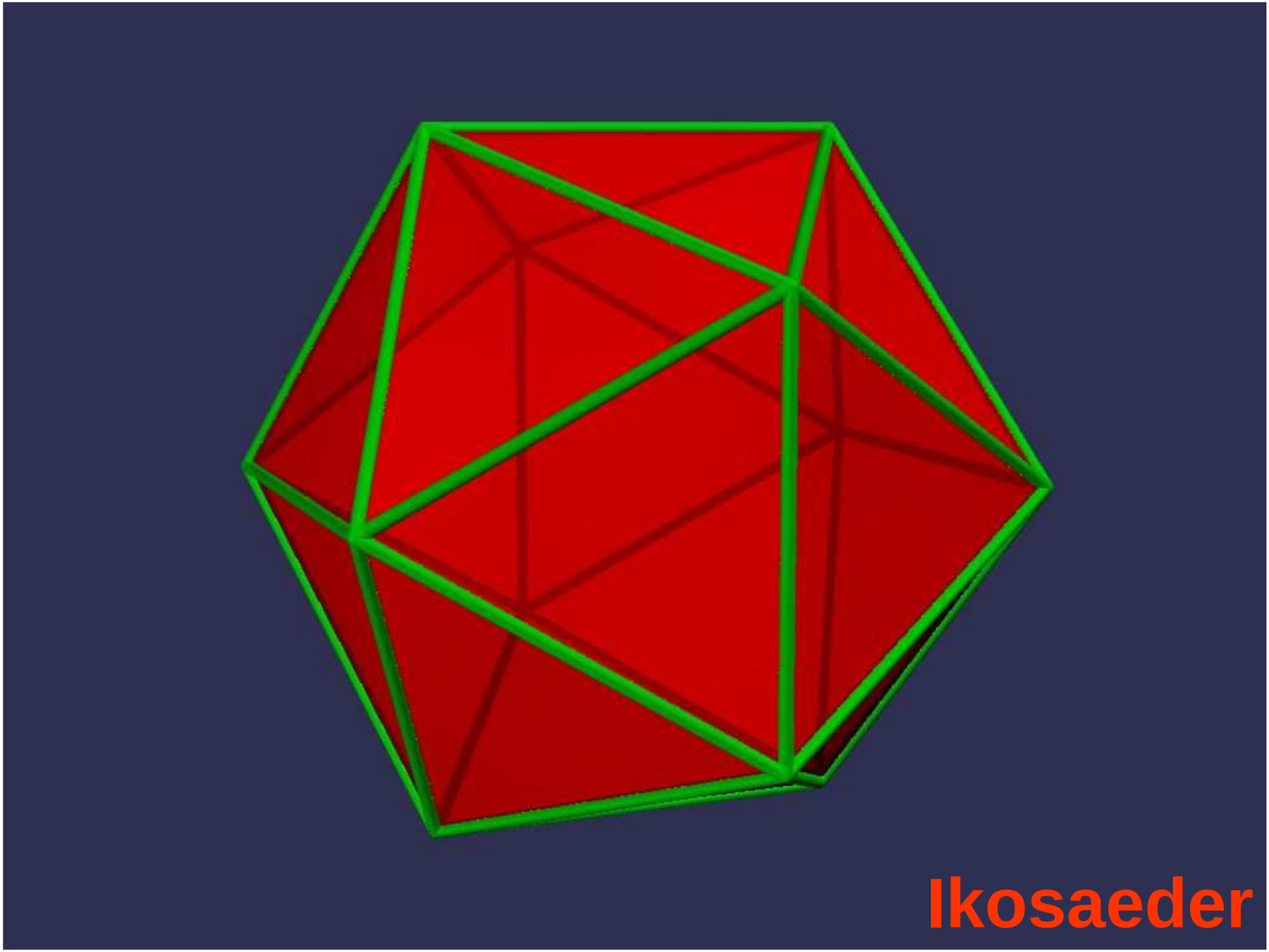


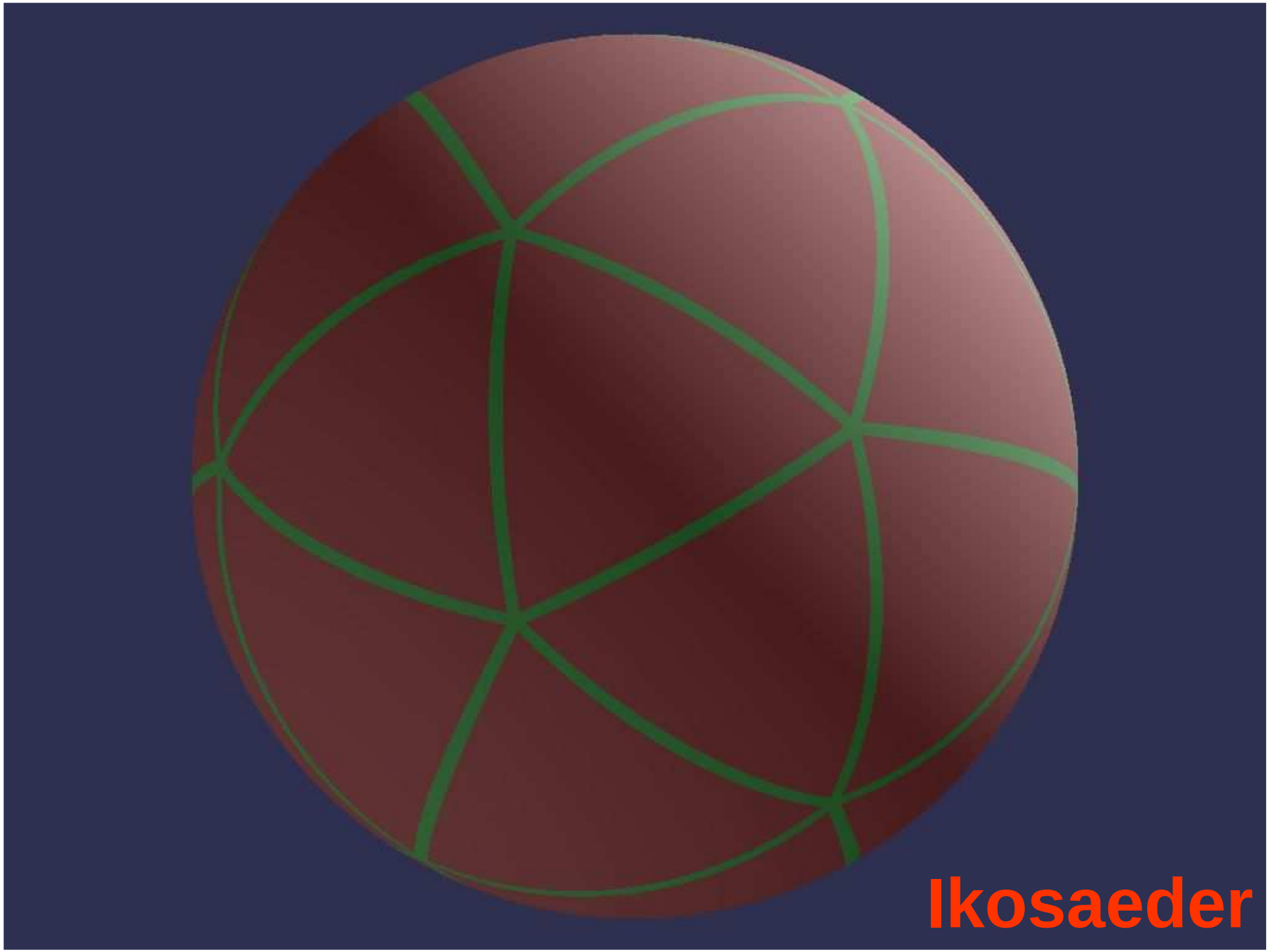


WM-Ball

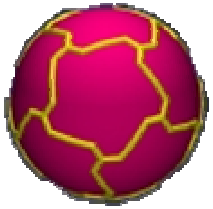


Ein Fußball nur aus Dreiecken?

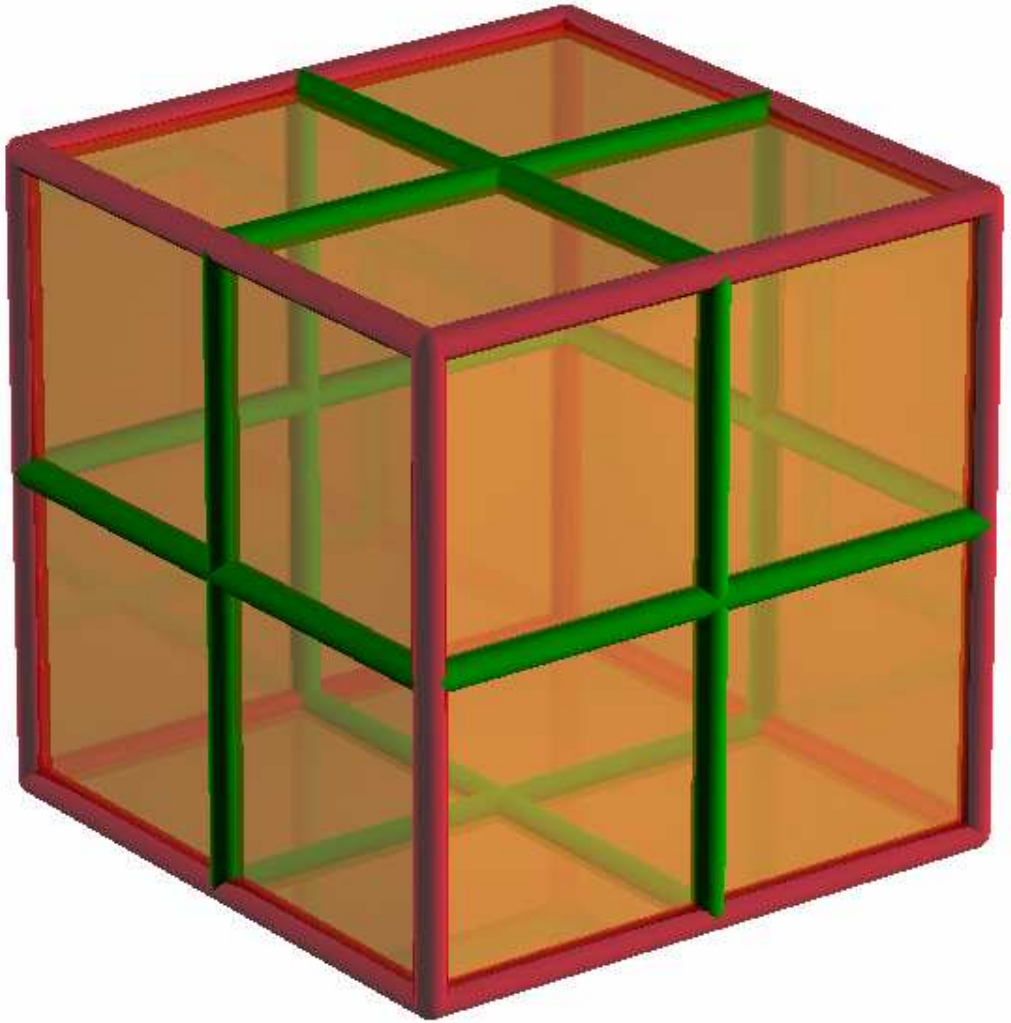

Ikosaeder

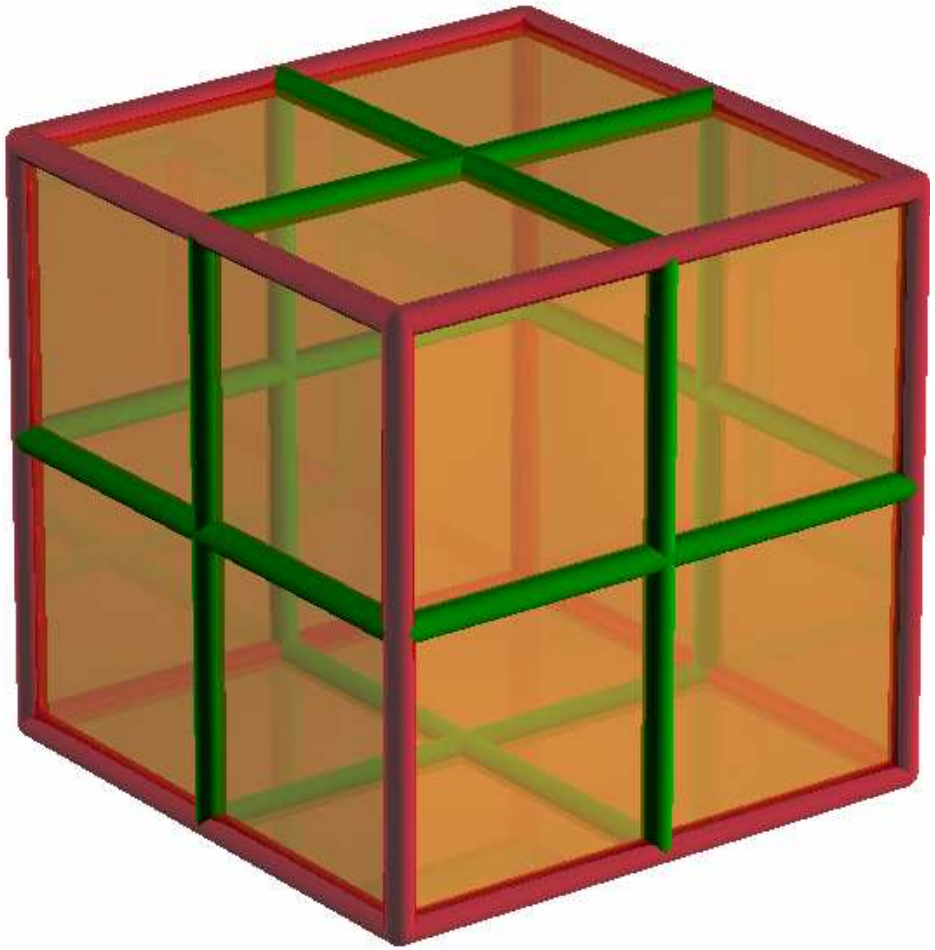

Ikosaeder

WM-Ball

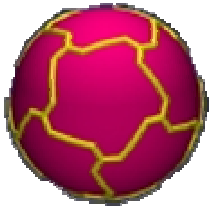


Gibt es denn Fußbälle nur aus Vierecken?





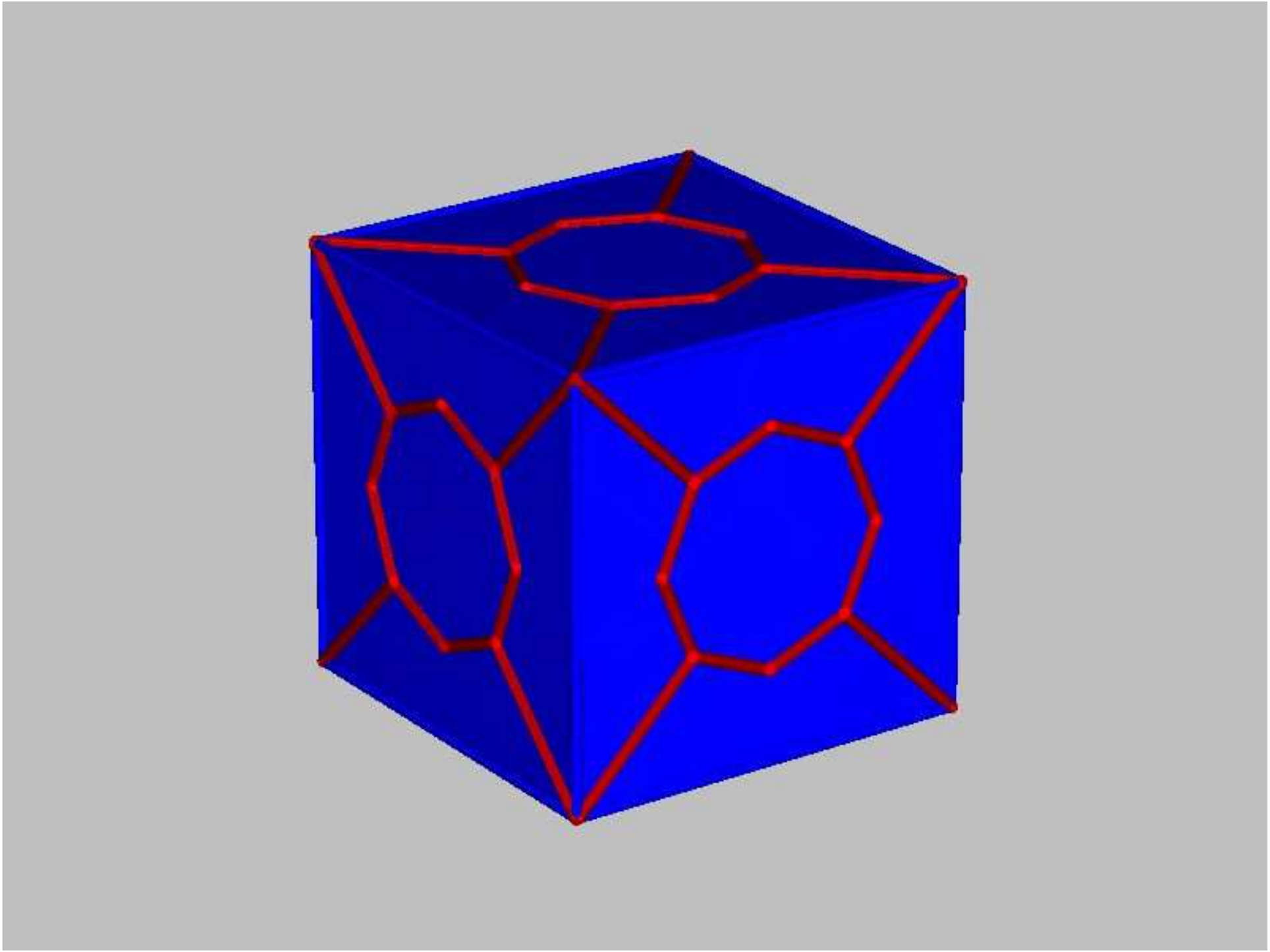
WM-Ball

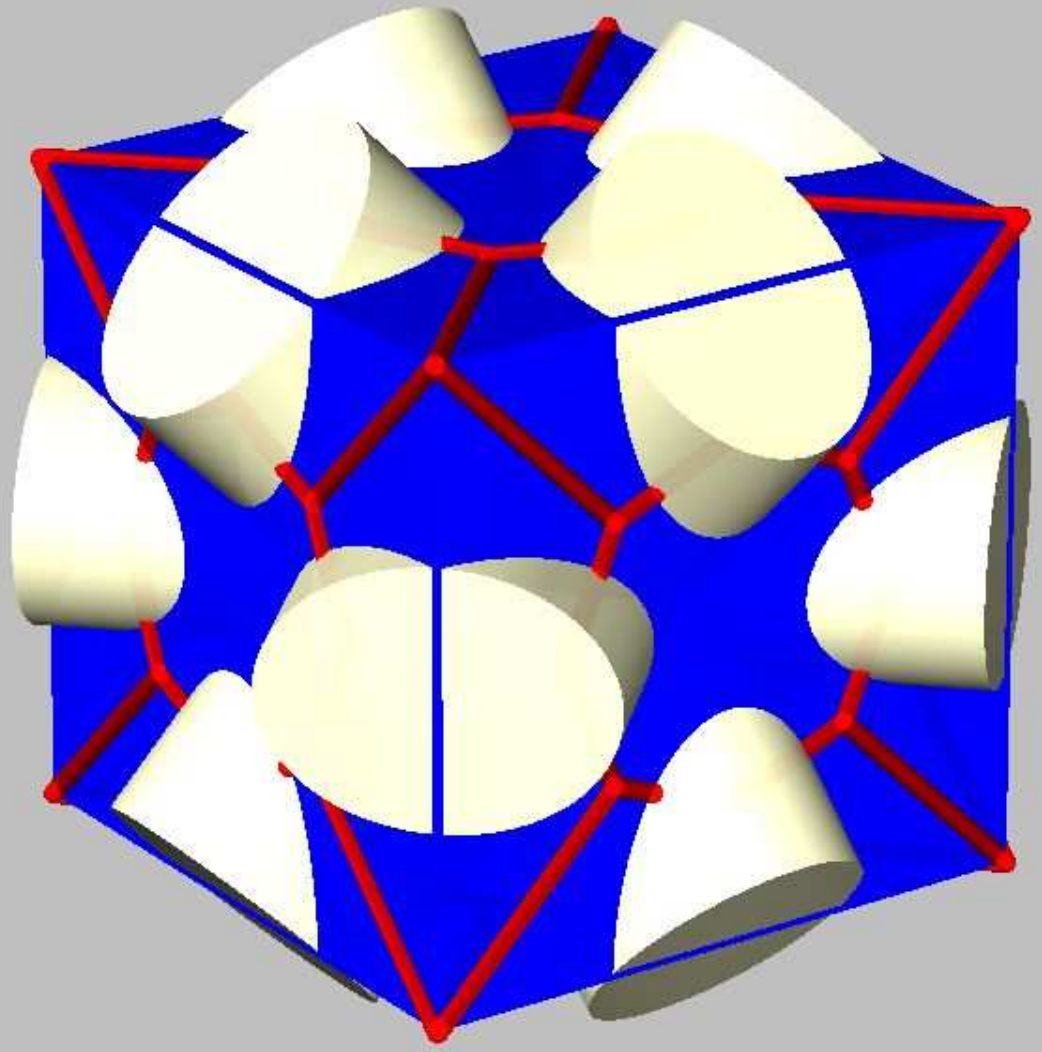


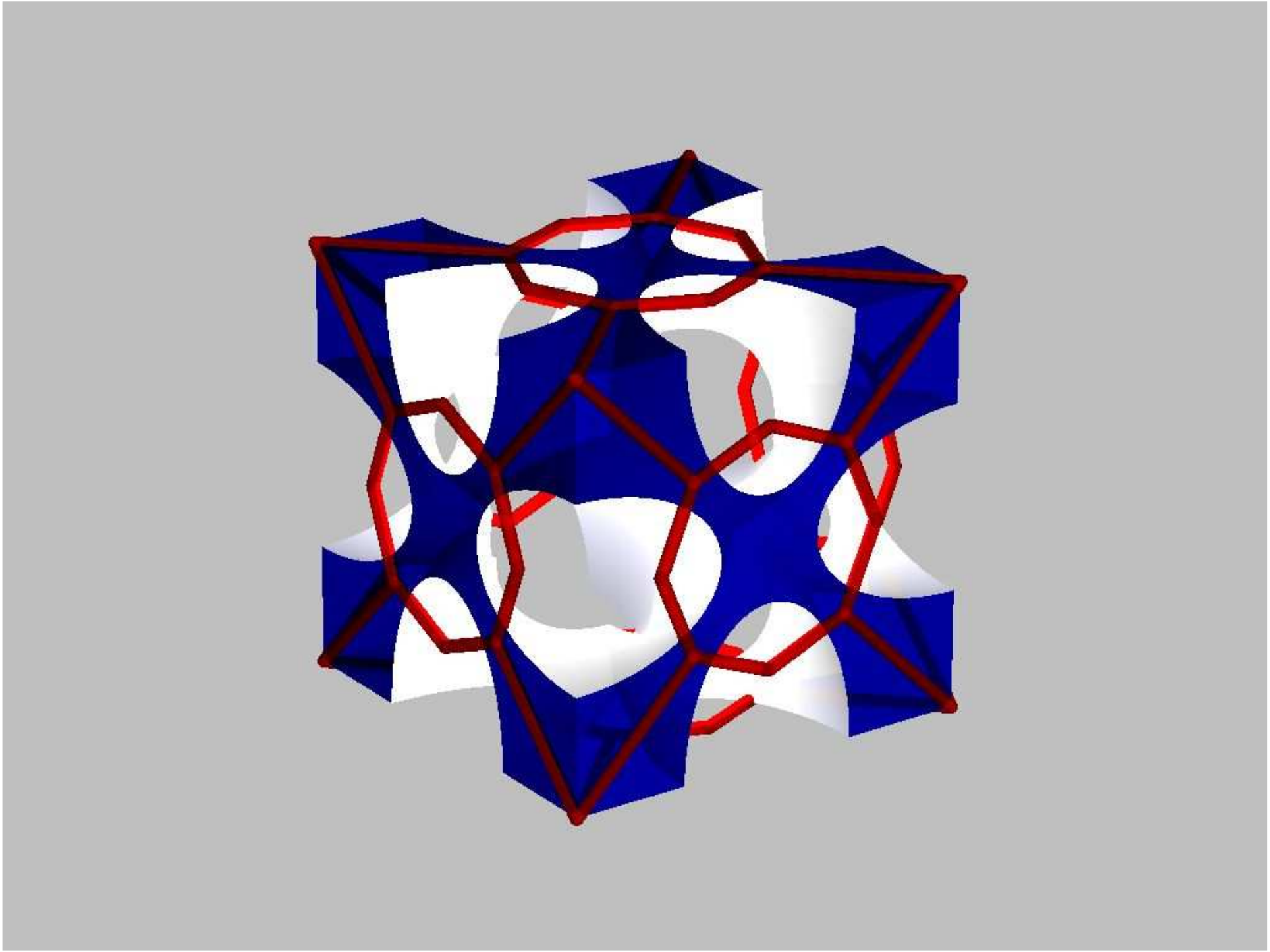
Und es gibt sogar Bälle aus Achtecken!

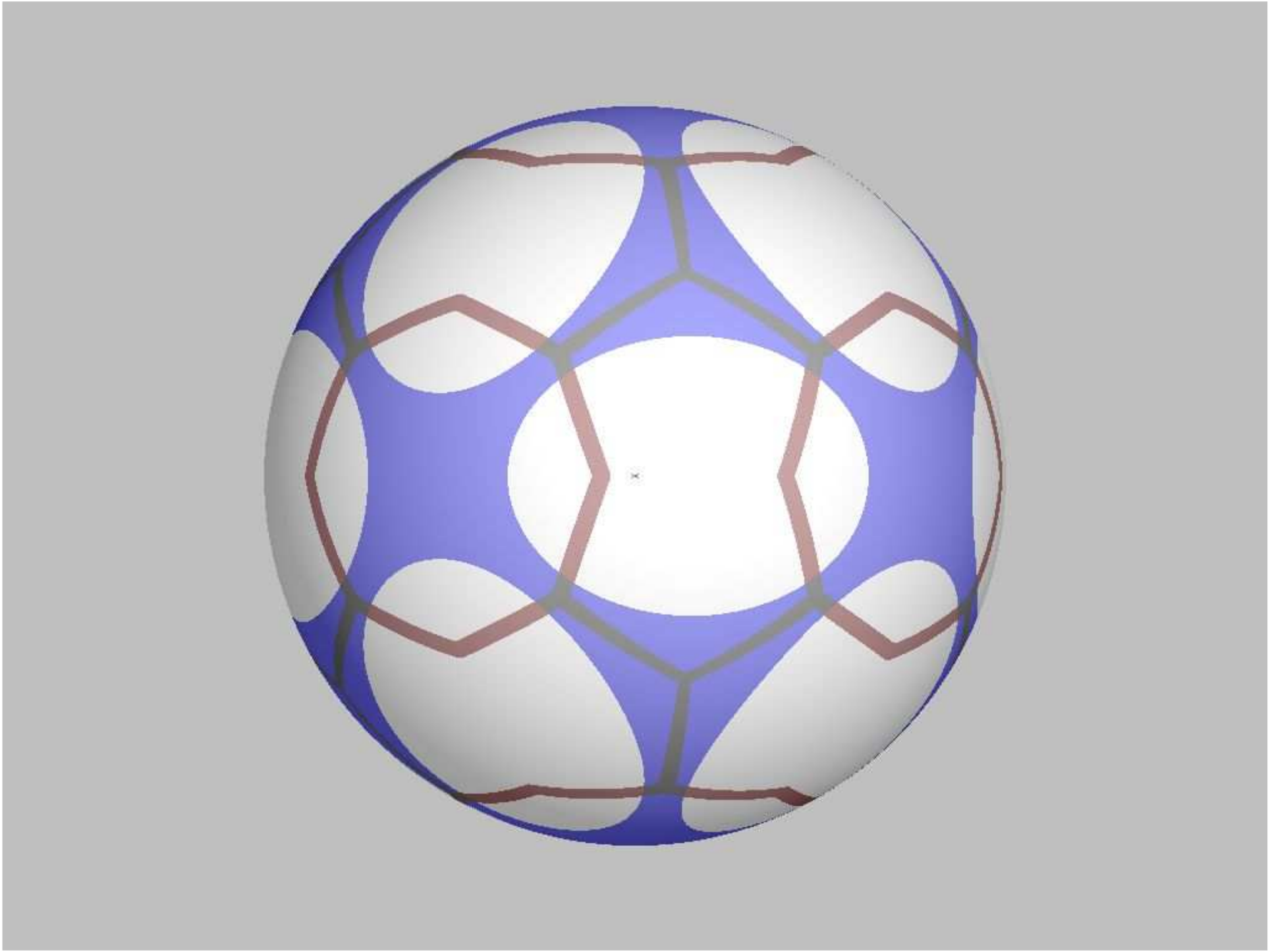
Und was steckt hier dahinter?

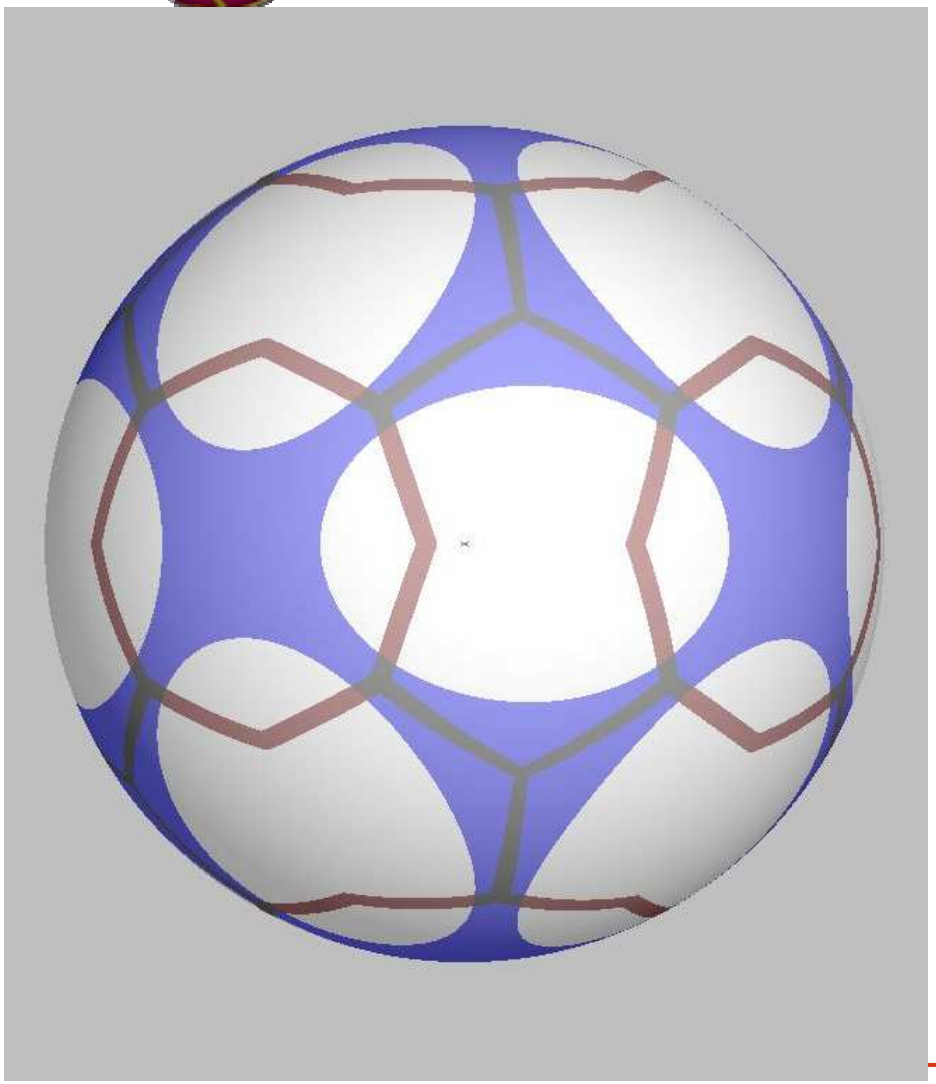
adidas
FIFA WORLD CUP
GERMANY
2006









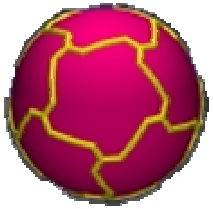


Matthias Ludwig
PH Weingarten

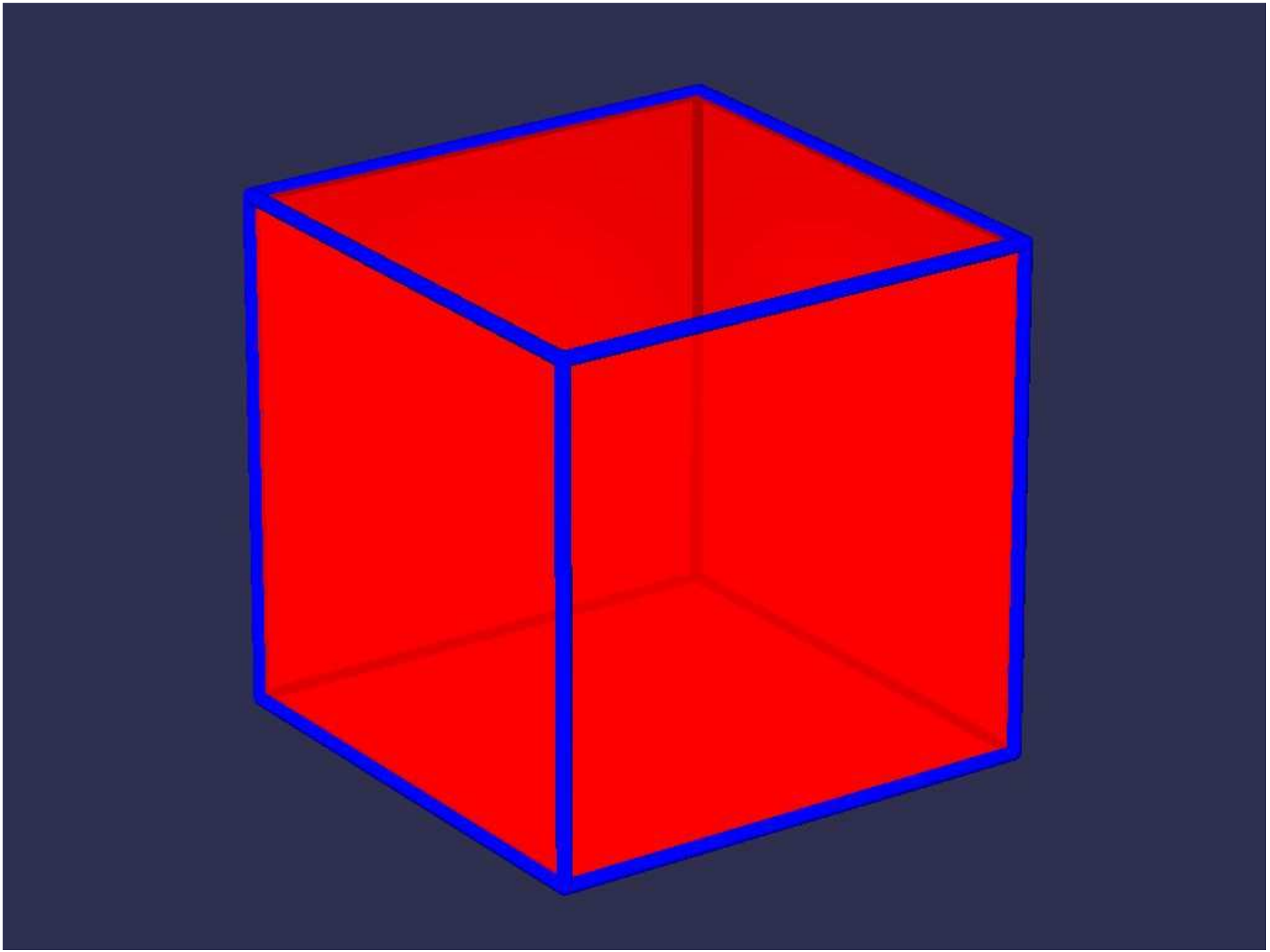
Fußballmathematik

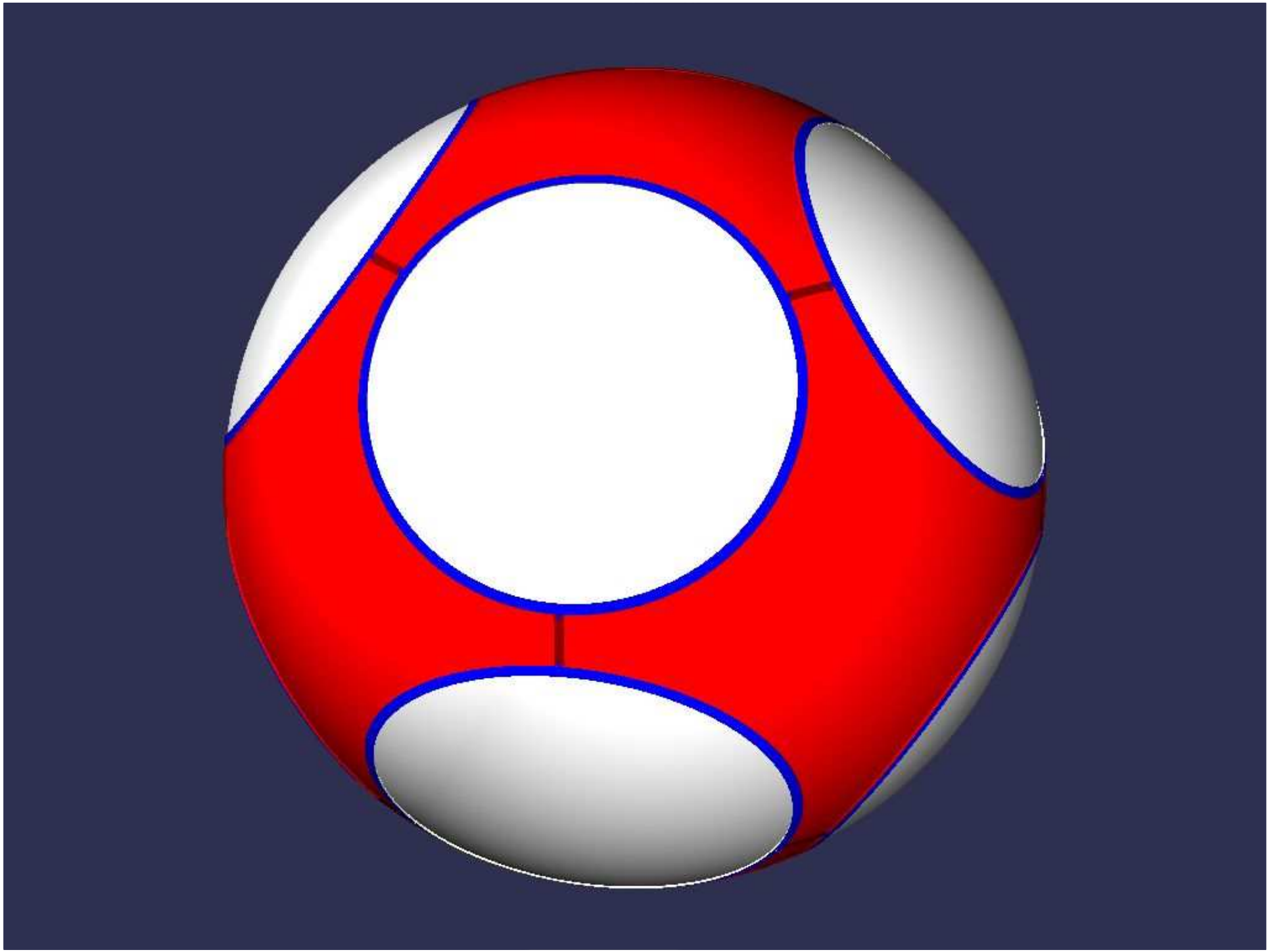
Wolfgang Weigel
Reichsstadt-Gym.

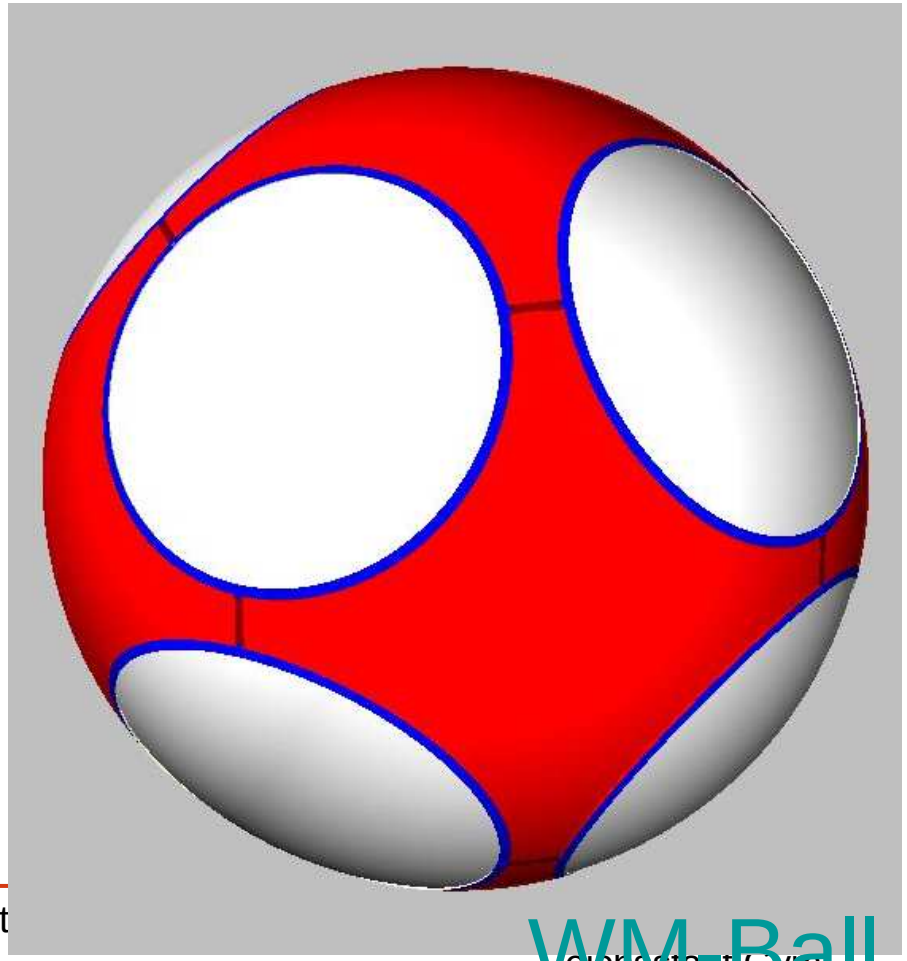
WM-Ball



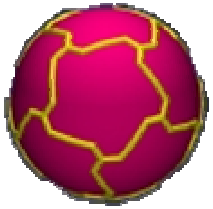
Ein Fußball aus Kreisen und Kreuzen?



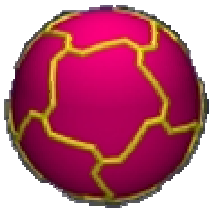


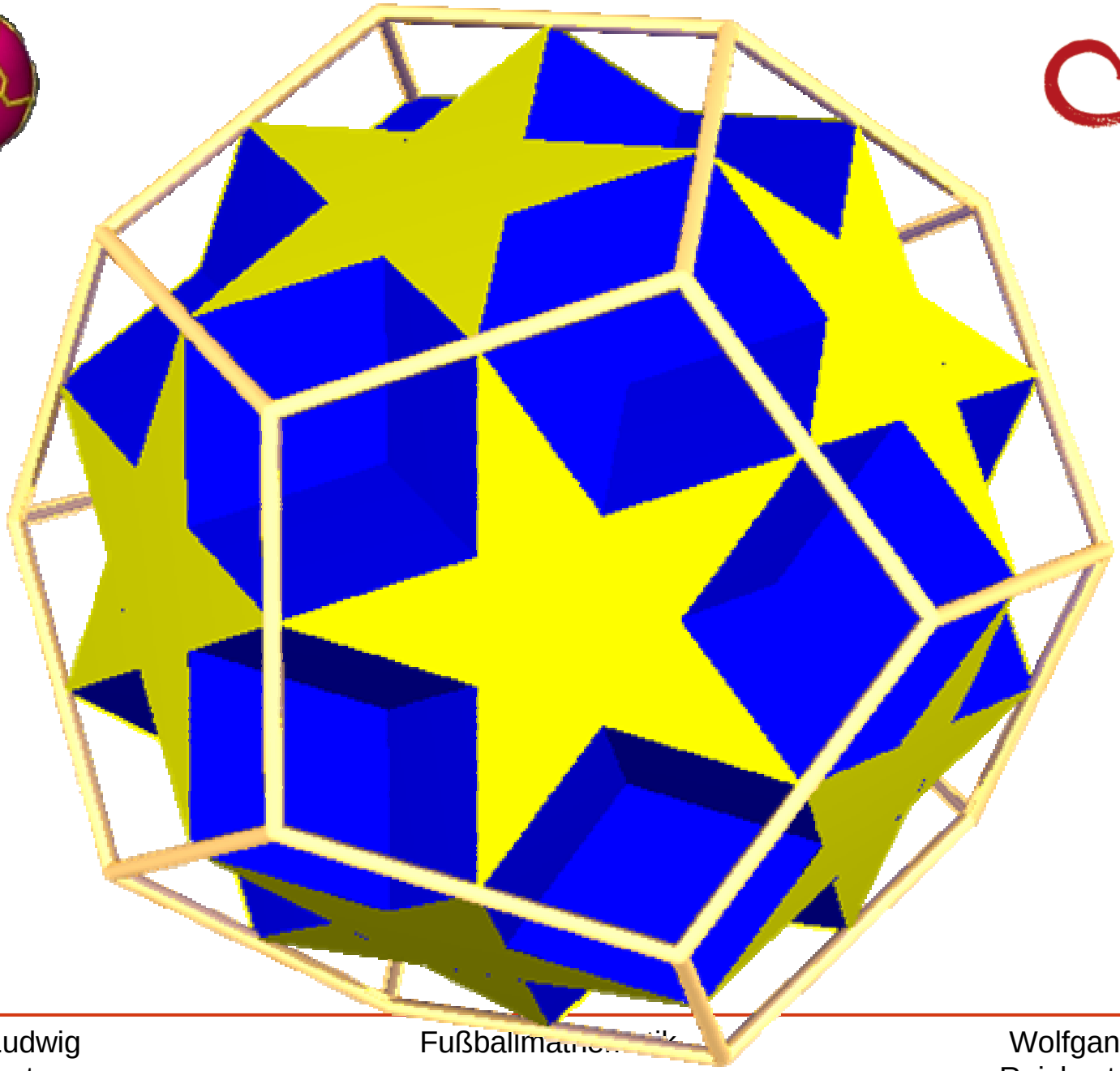


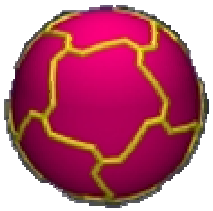
WM-Ball



Ein Fußball aus Sternen und Sechsecken?







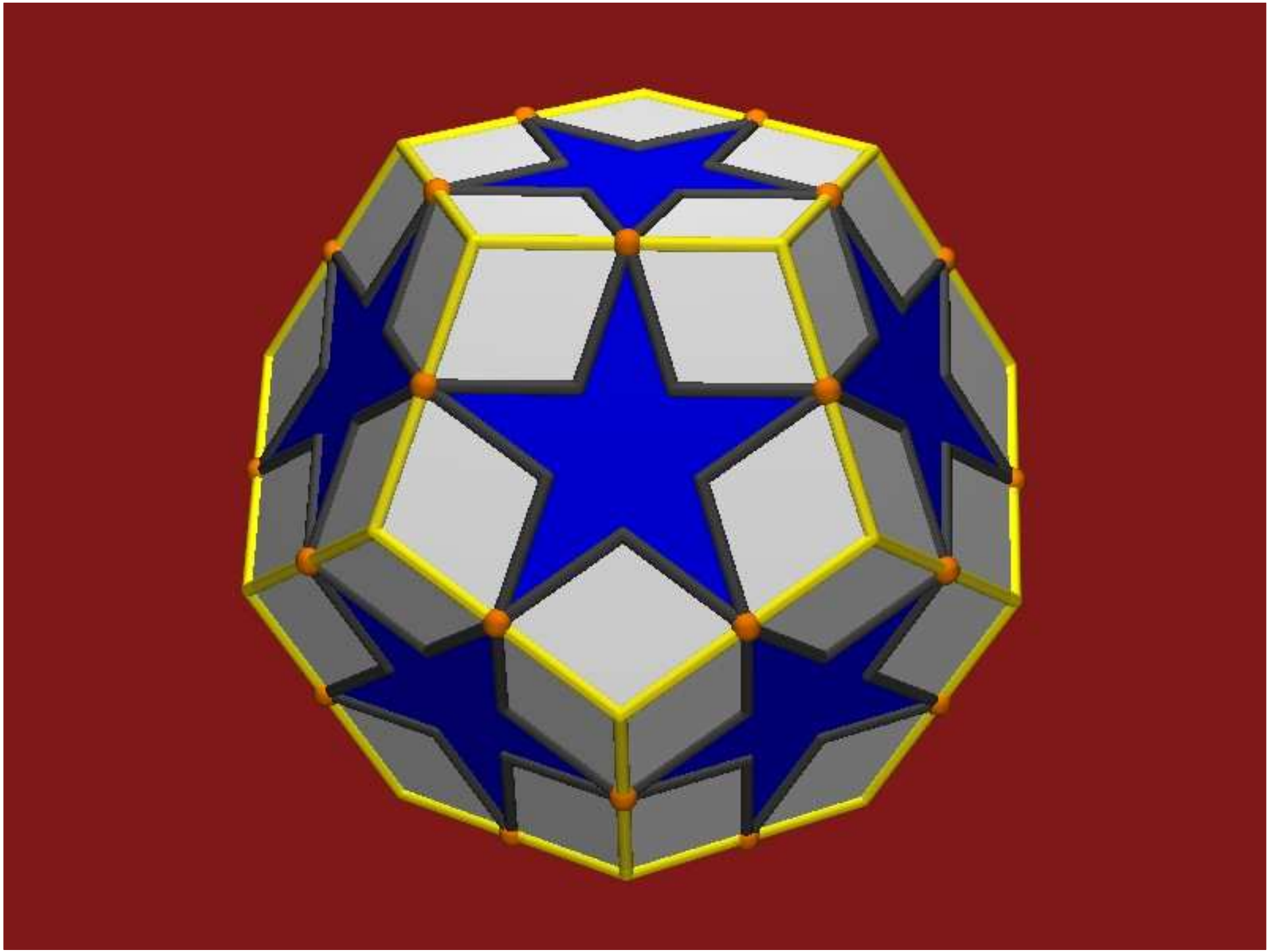
UEFA

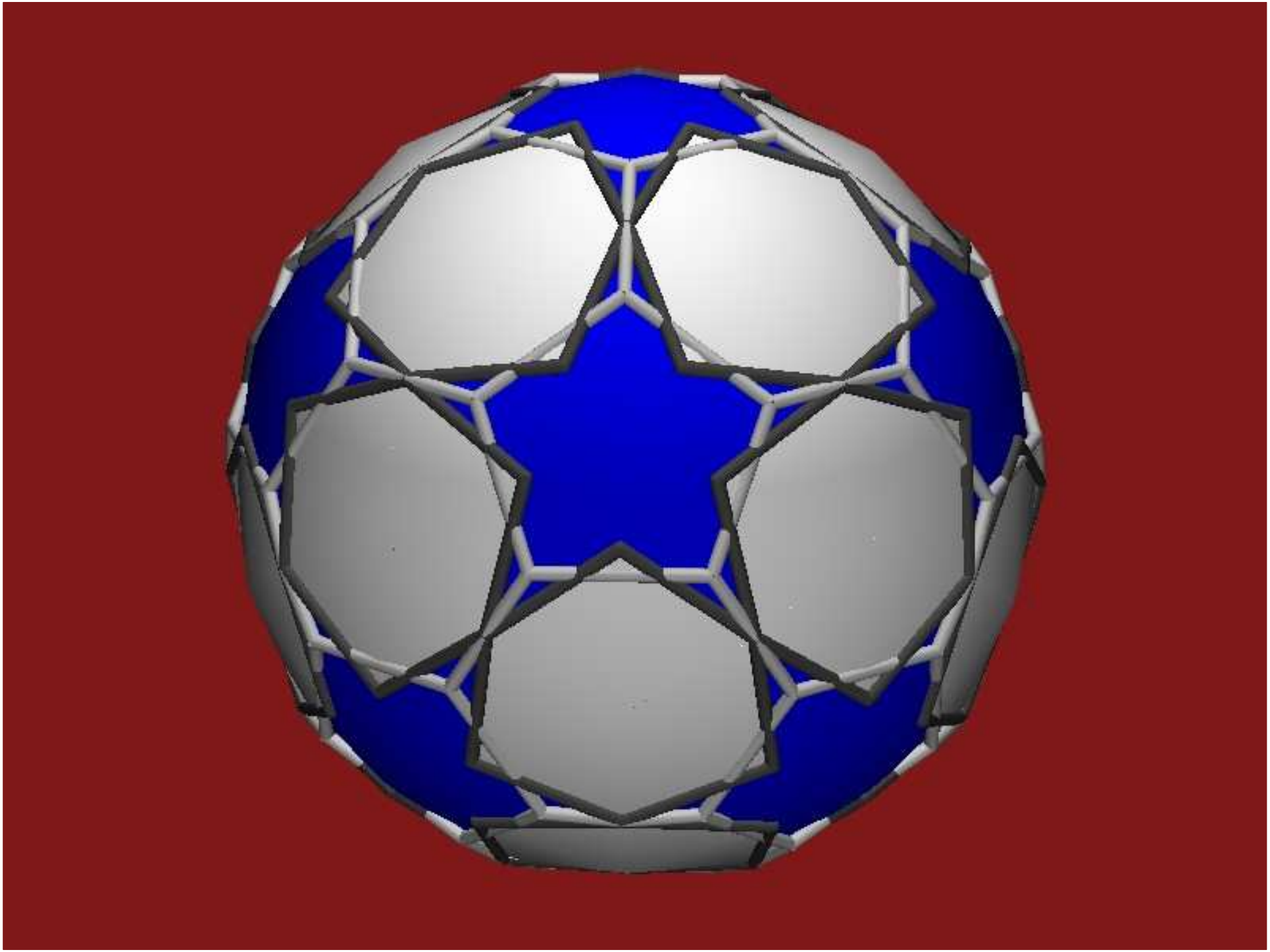
CHAMPIONS LEAGUE

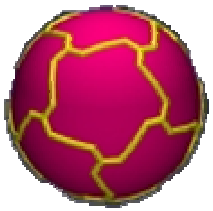
Matthias Ludwig
PH Weingarten

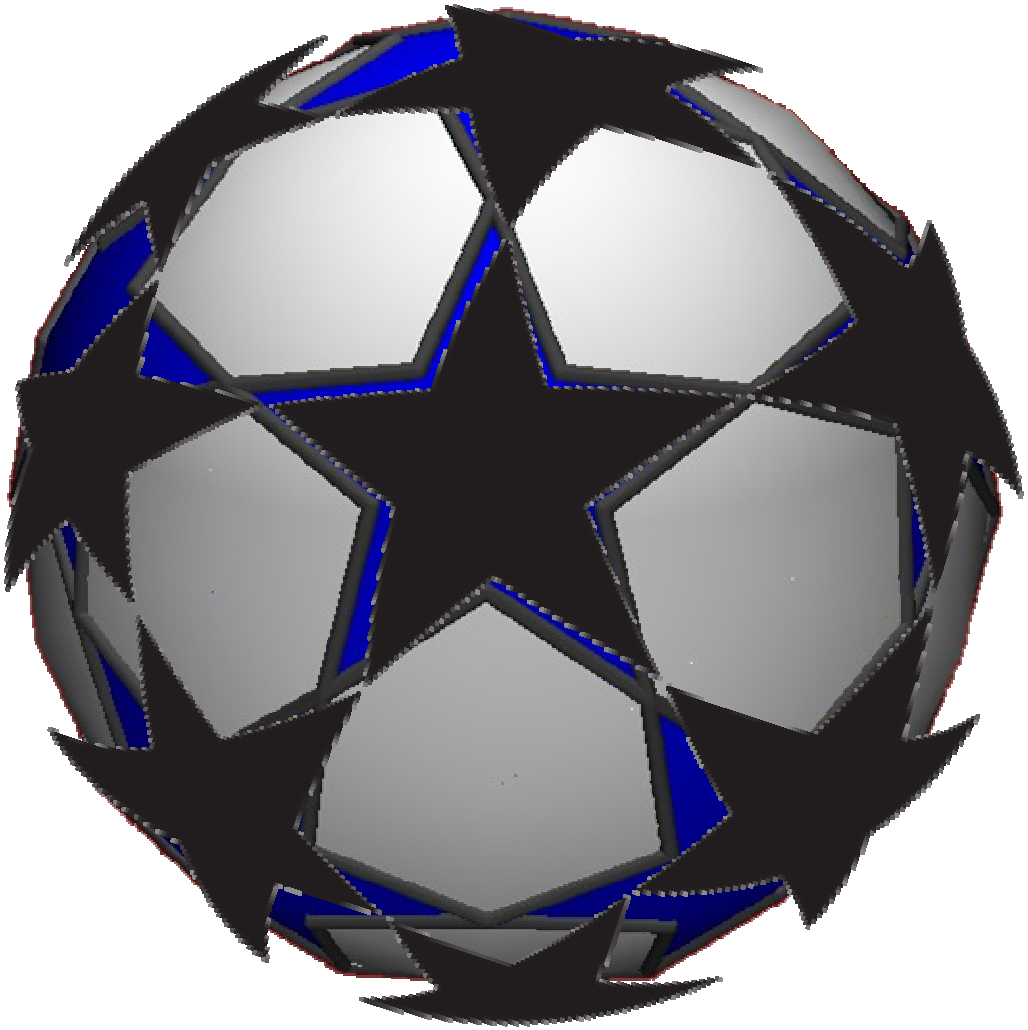
Fußball im Thema

Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

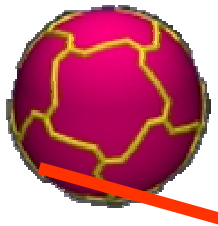


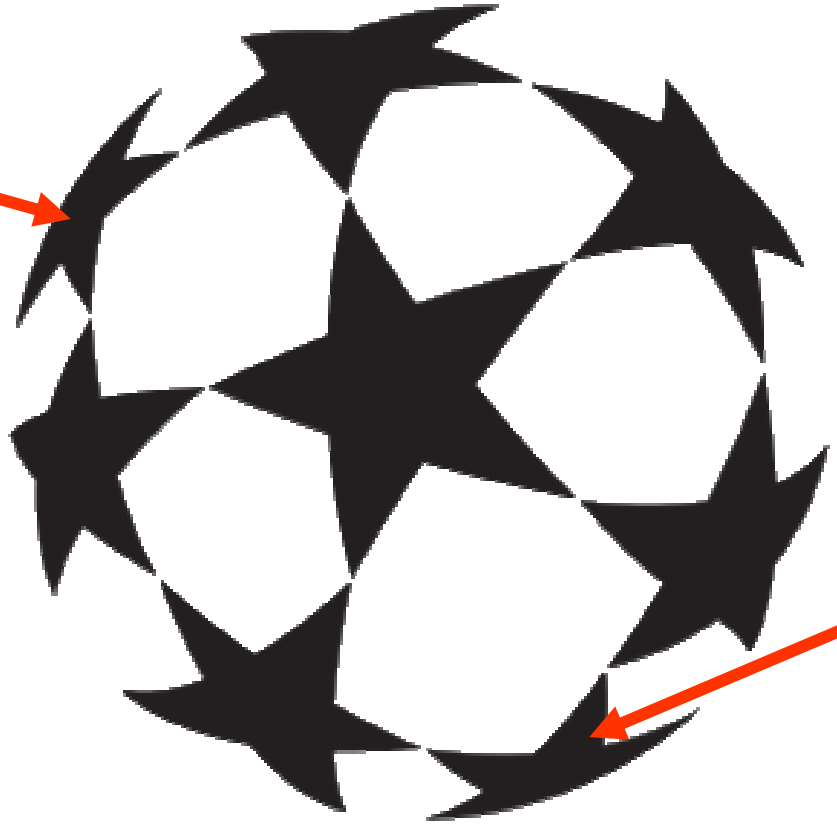


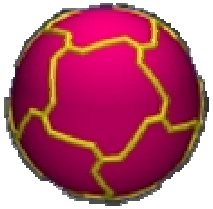




UEFA
CHAMPIONS
LEAGUE
adidas

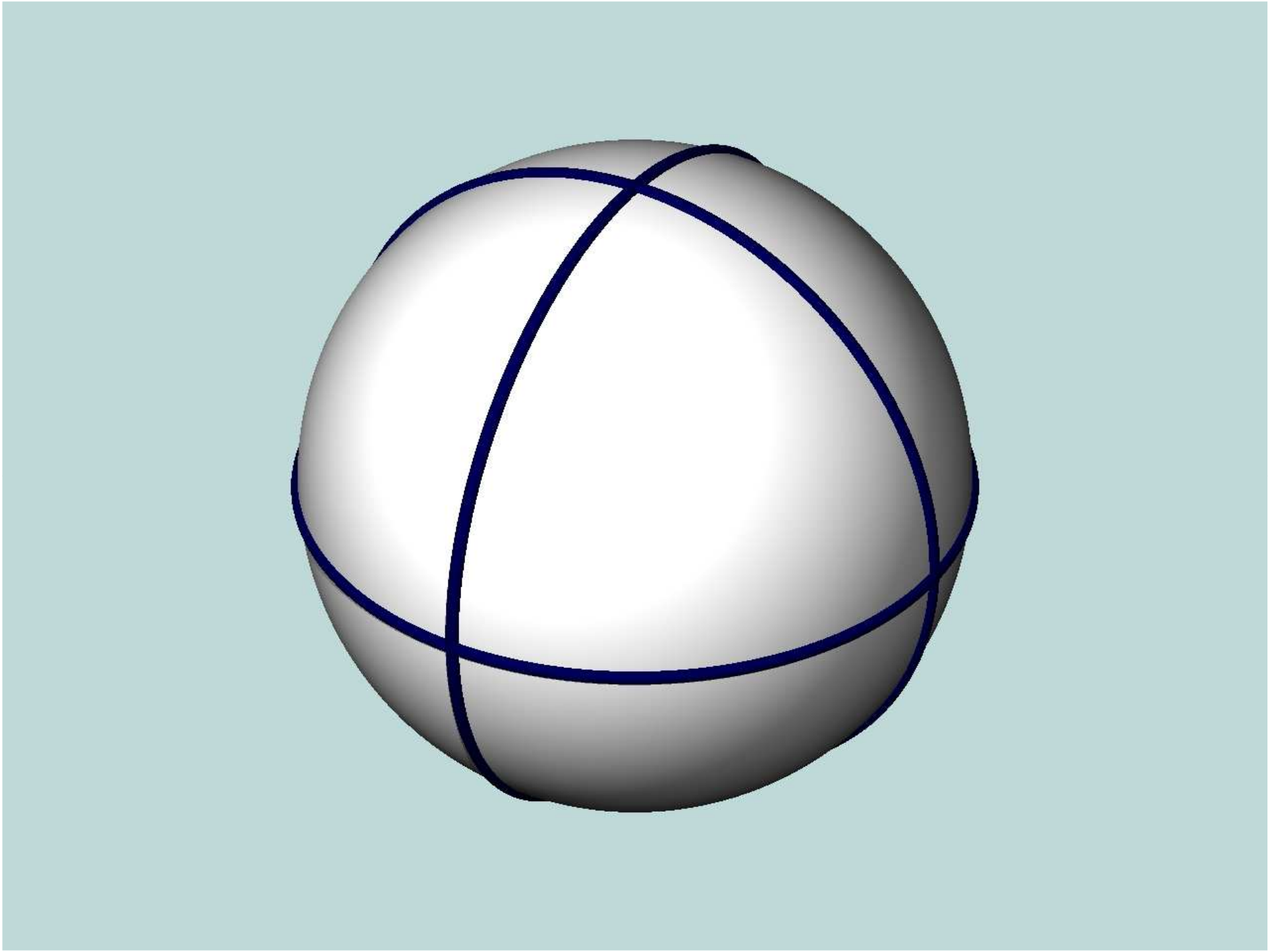


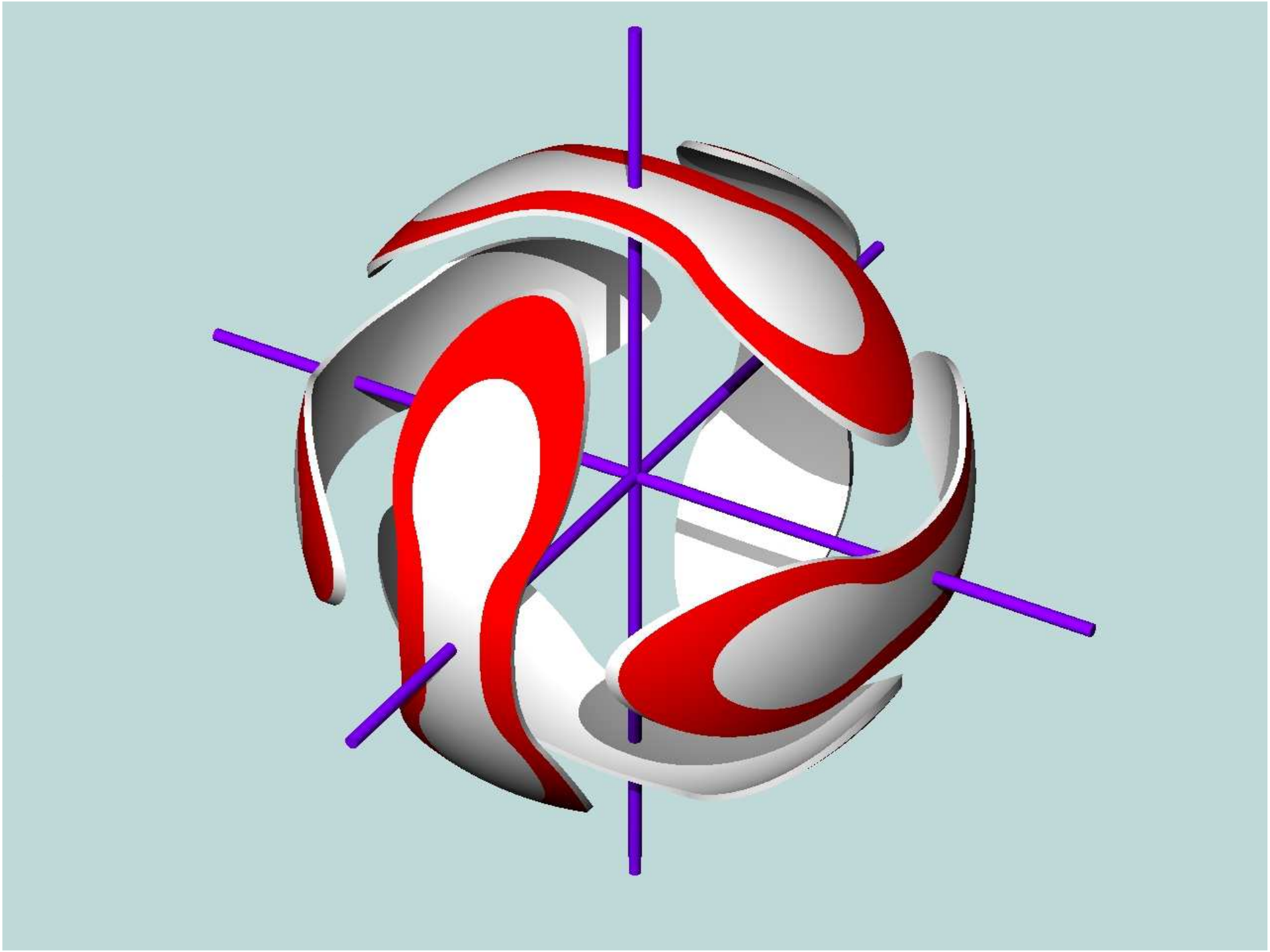


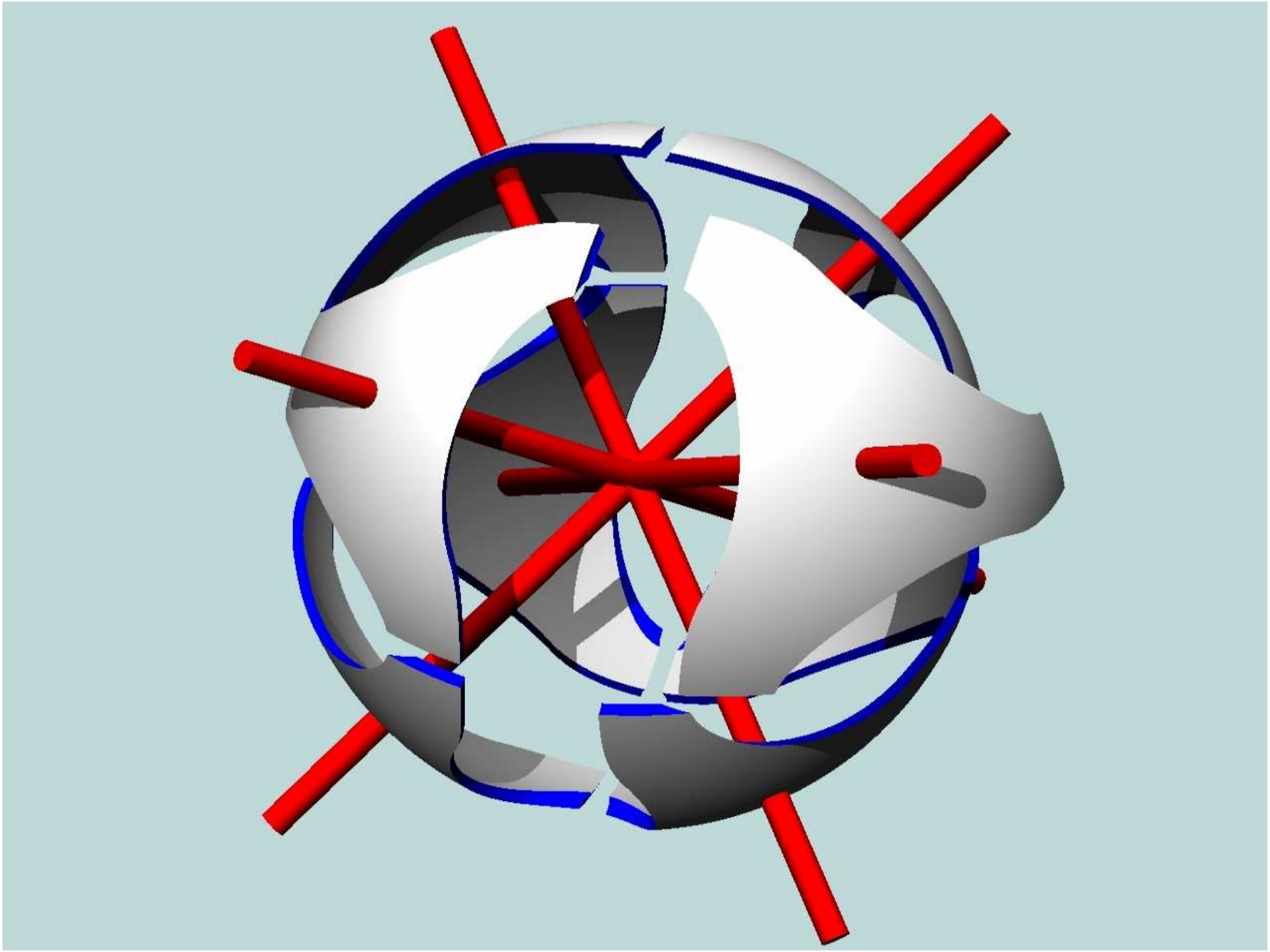


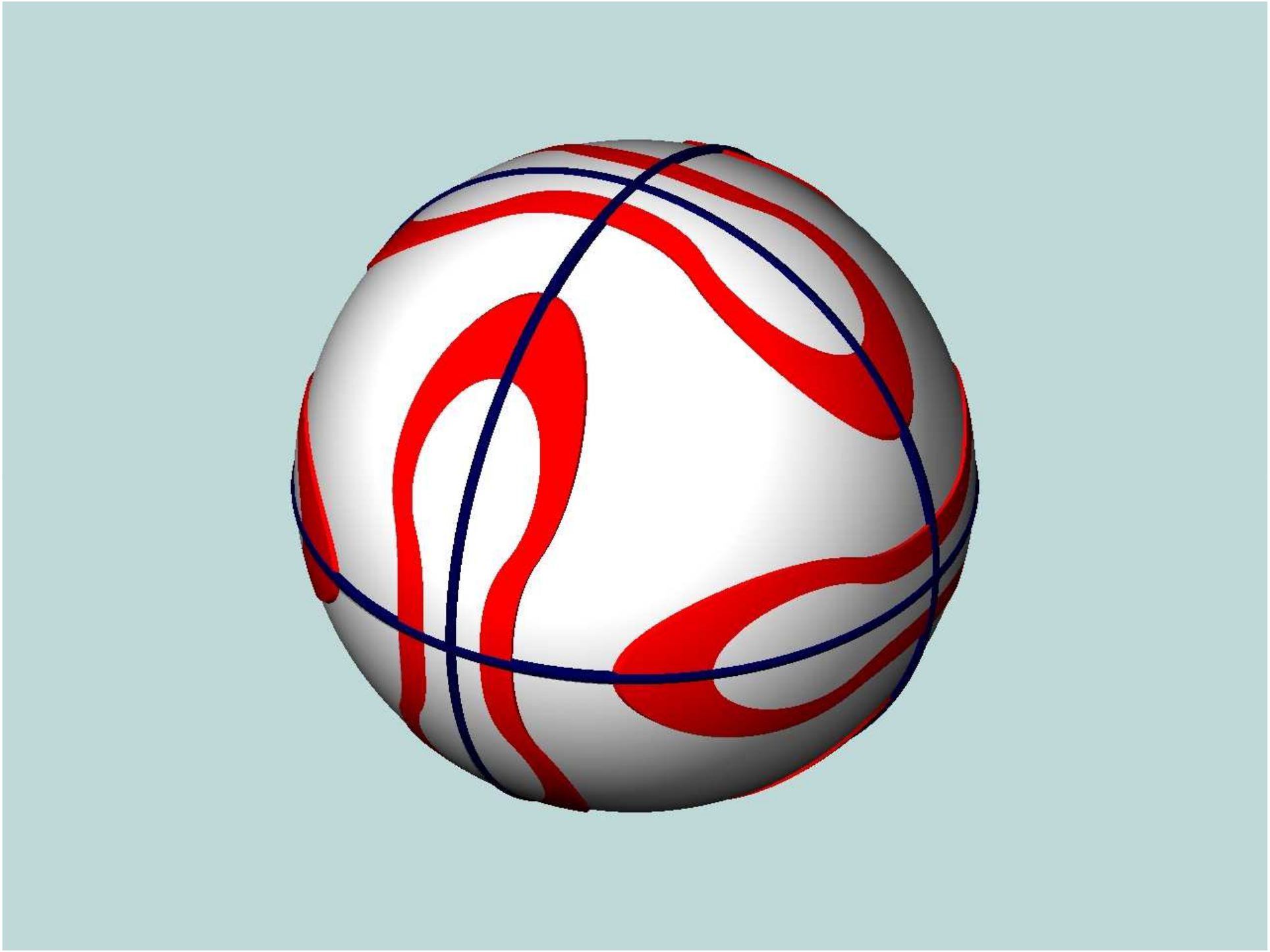
Der WM Ball von 2006

„+Teamgeist“

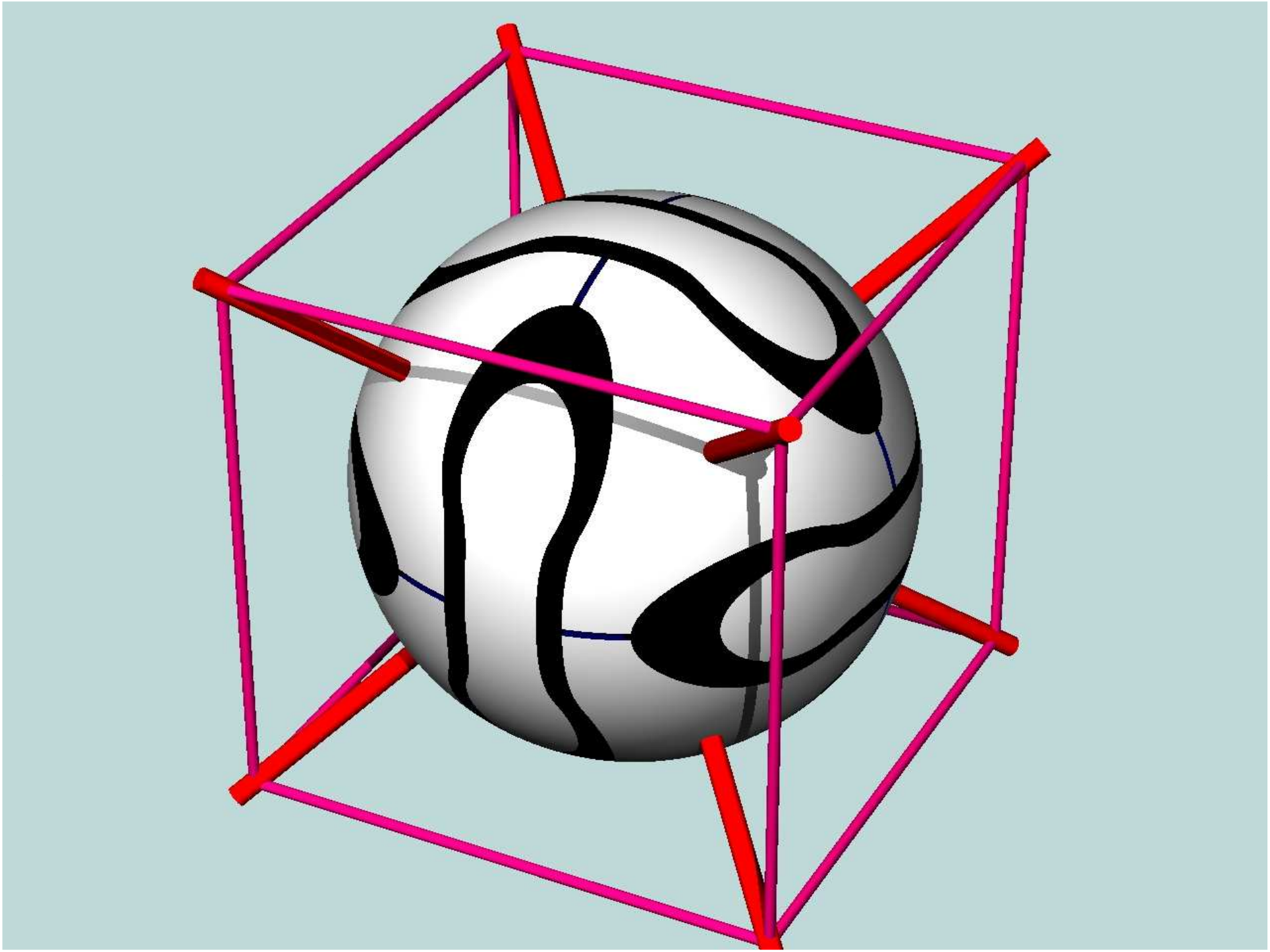


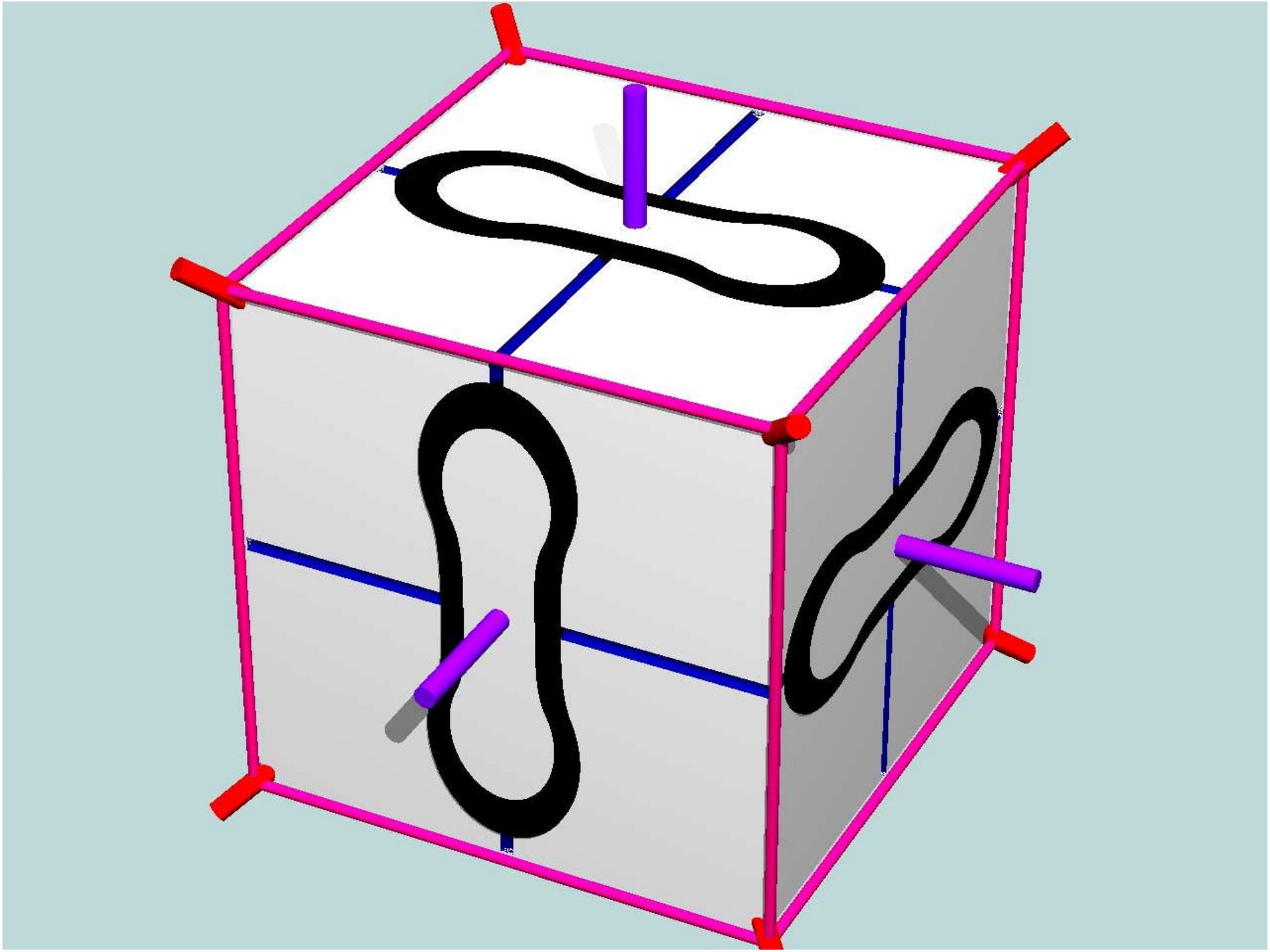


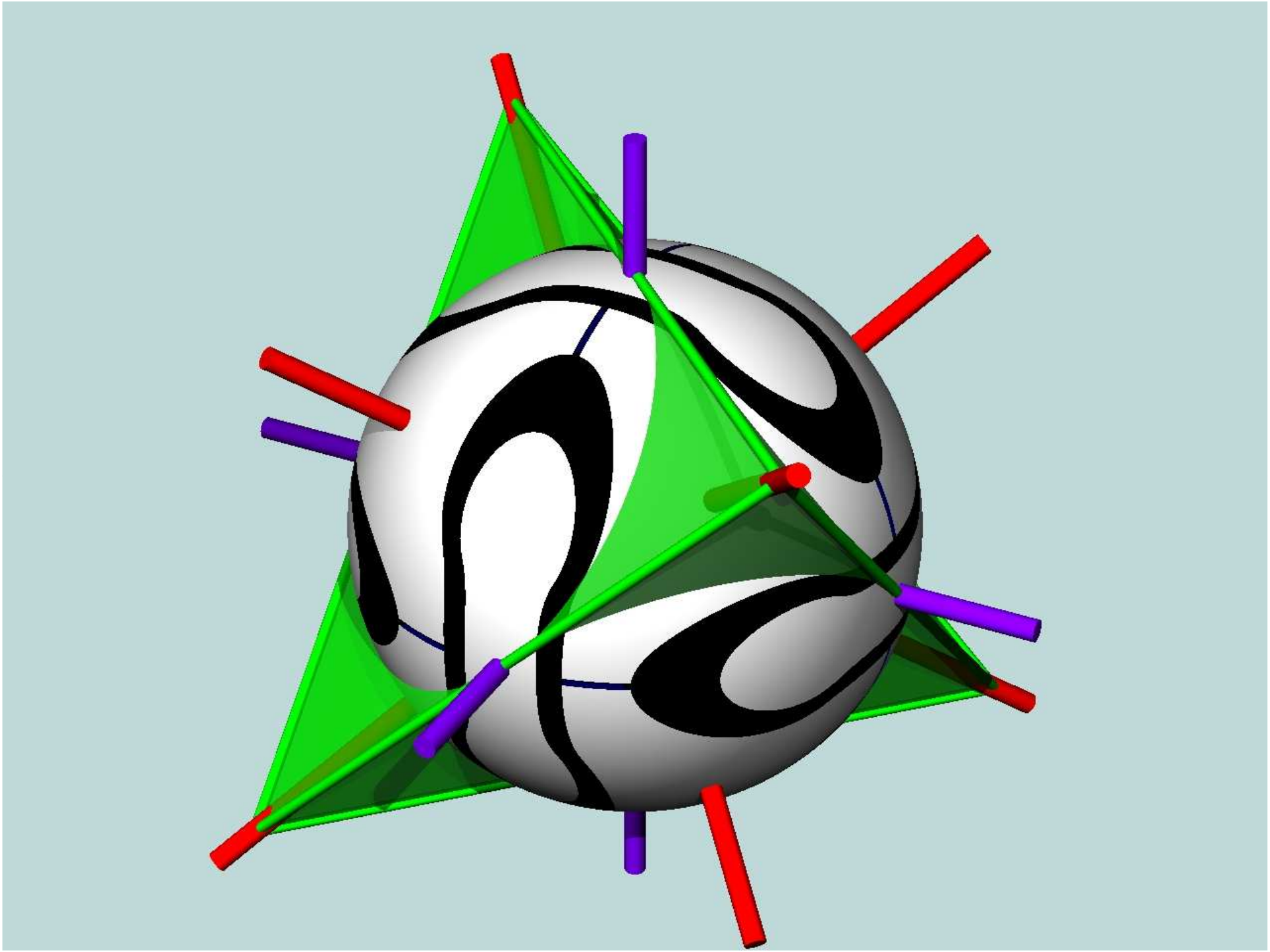


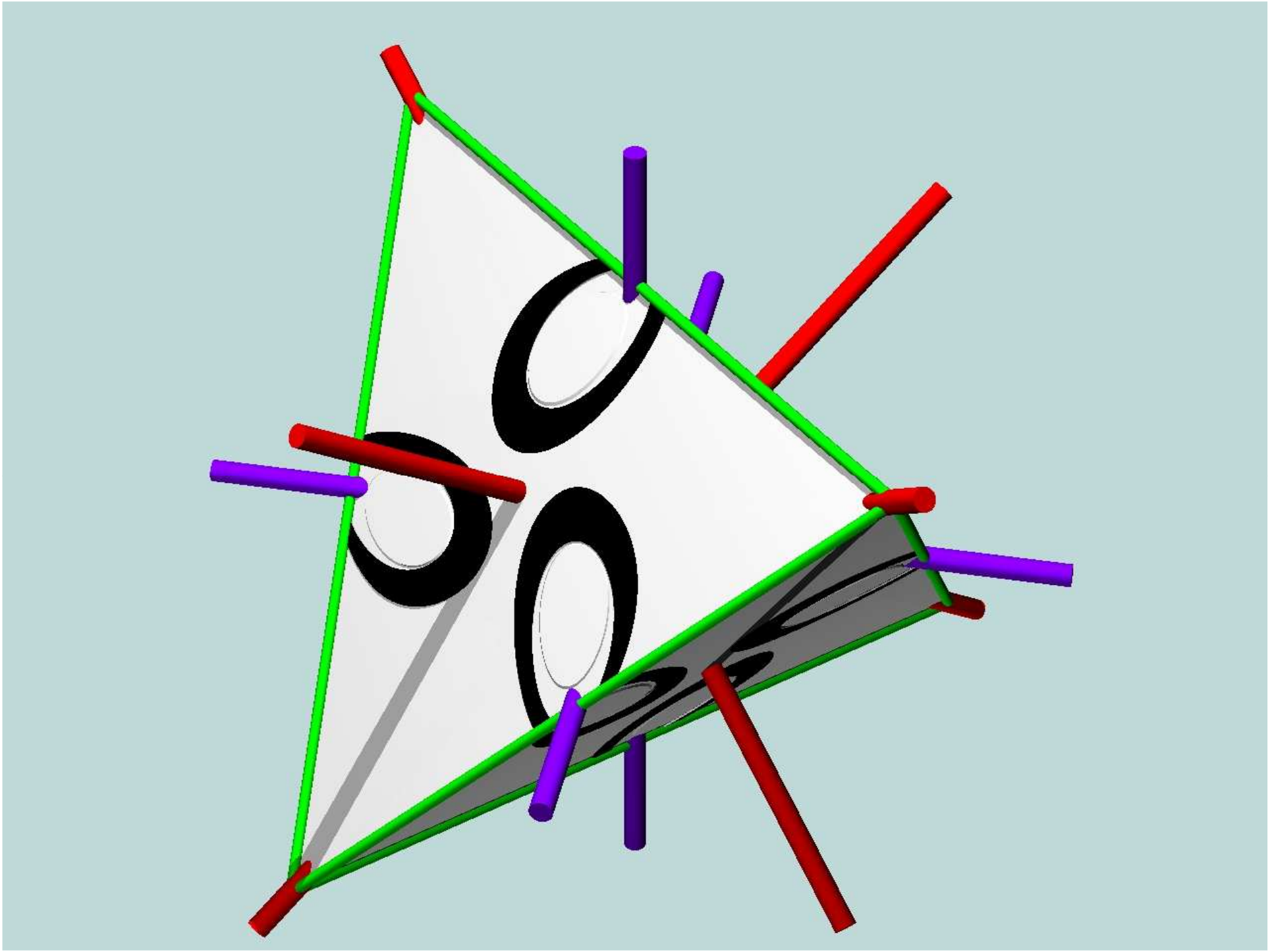


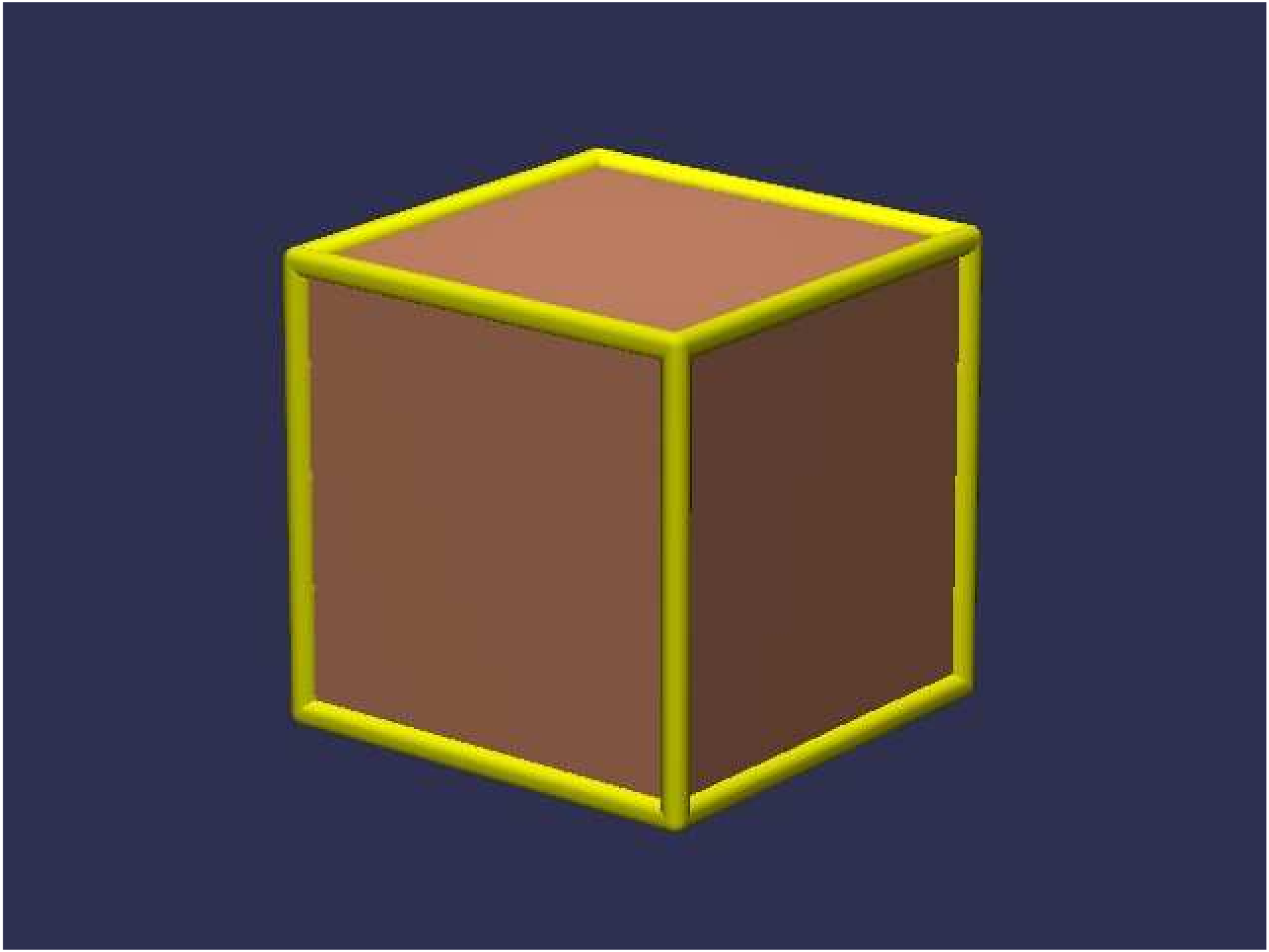
TEAMGEIST
FIFA

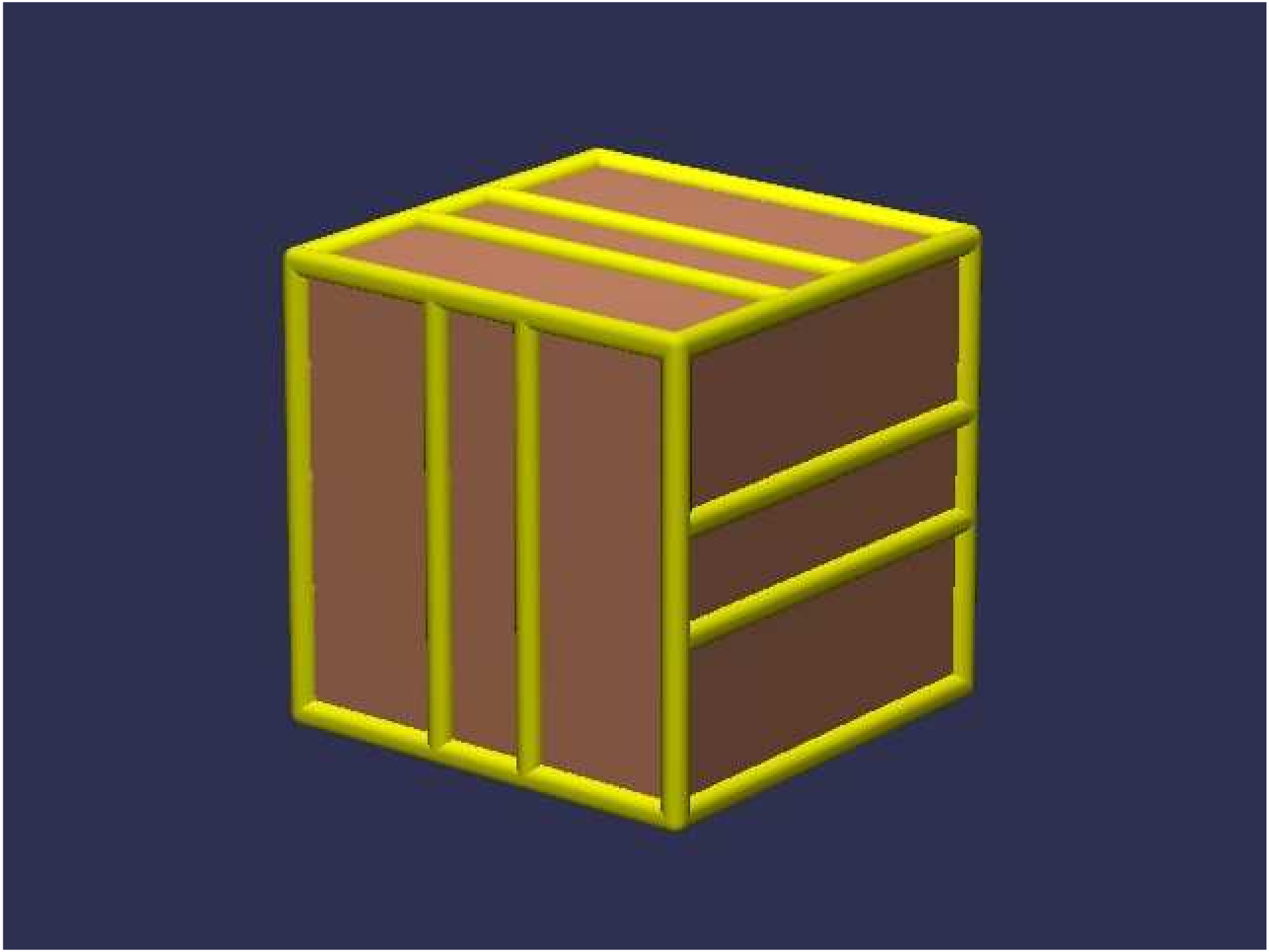


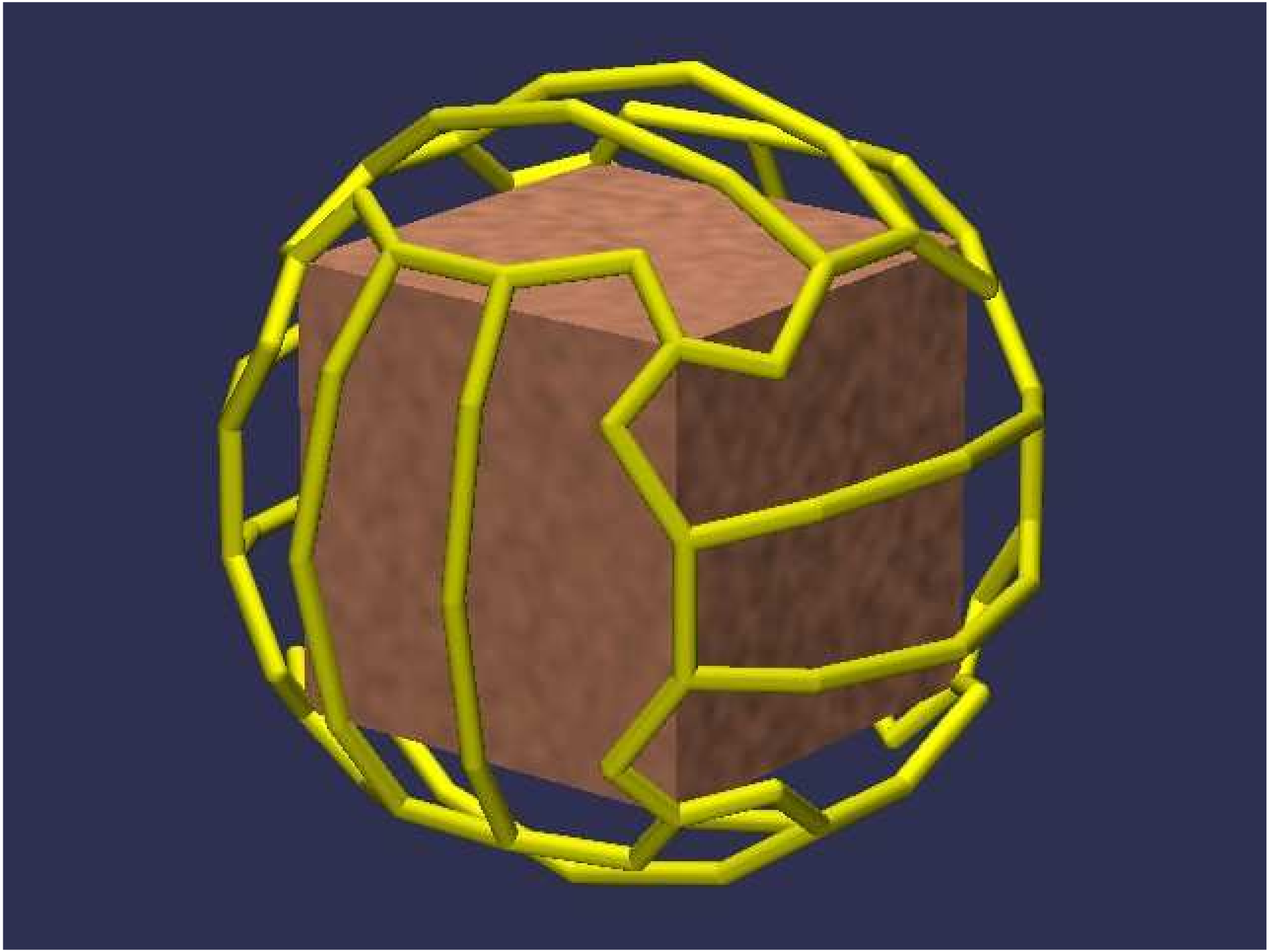


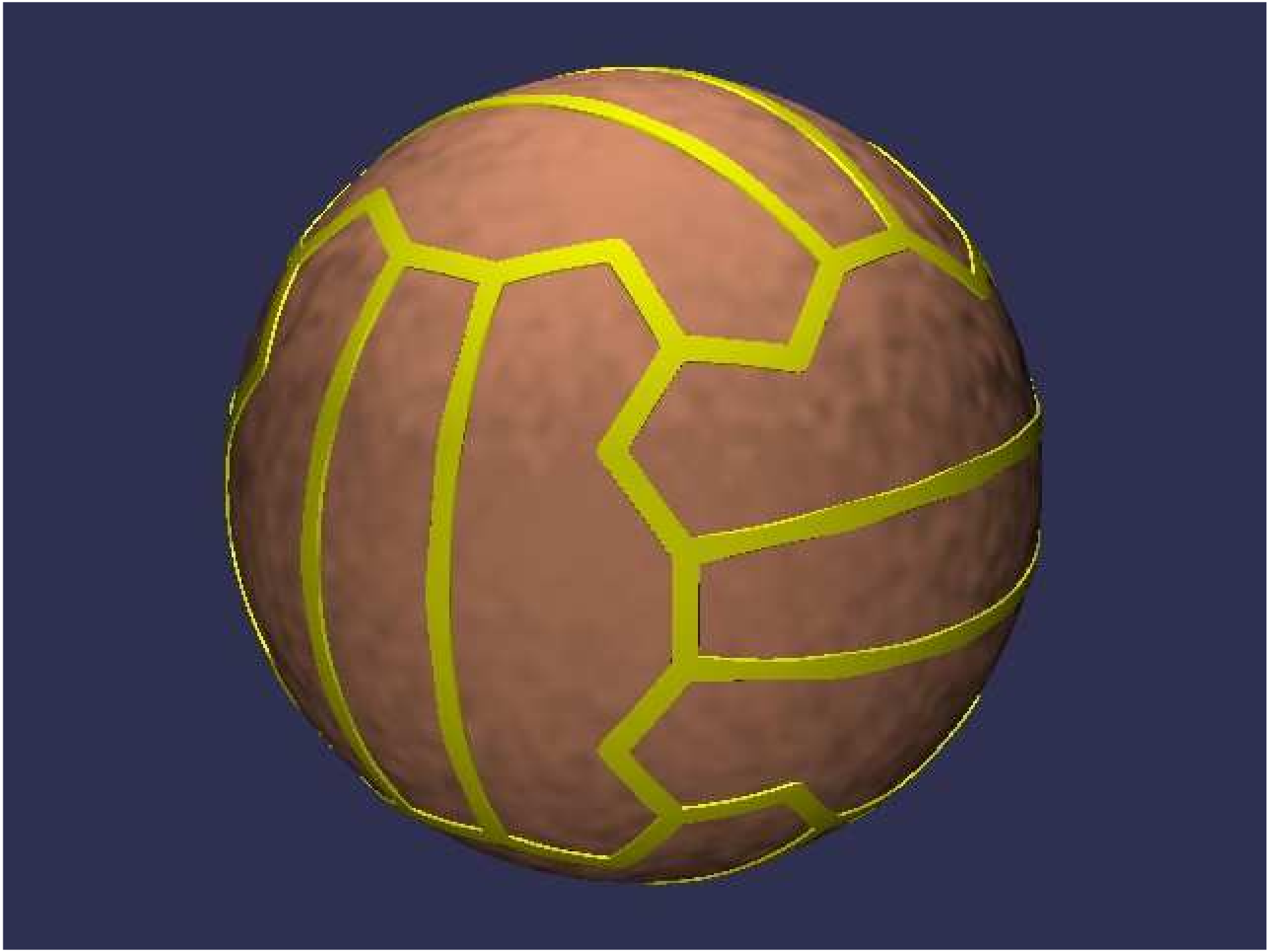


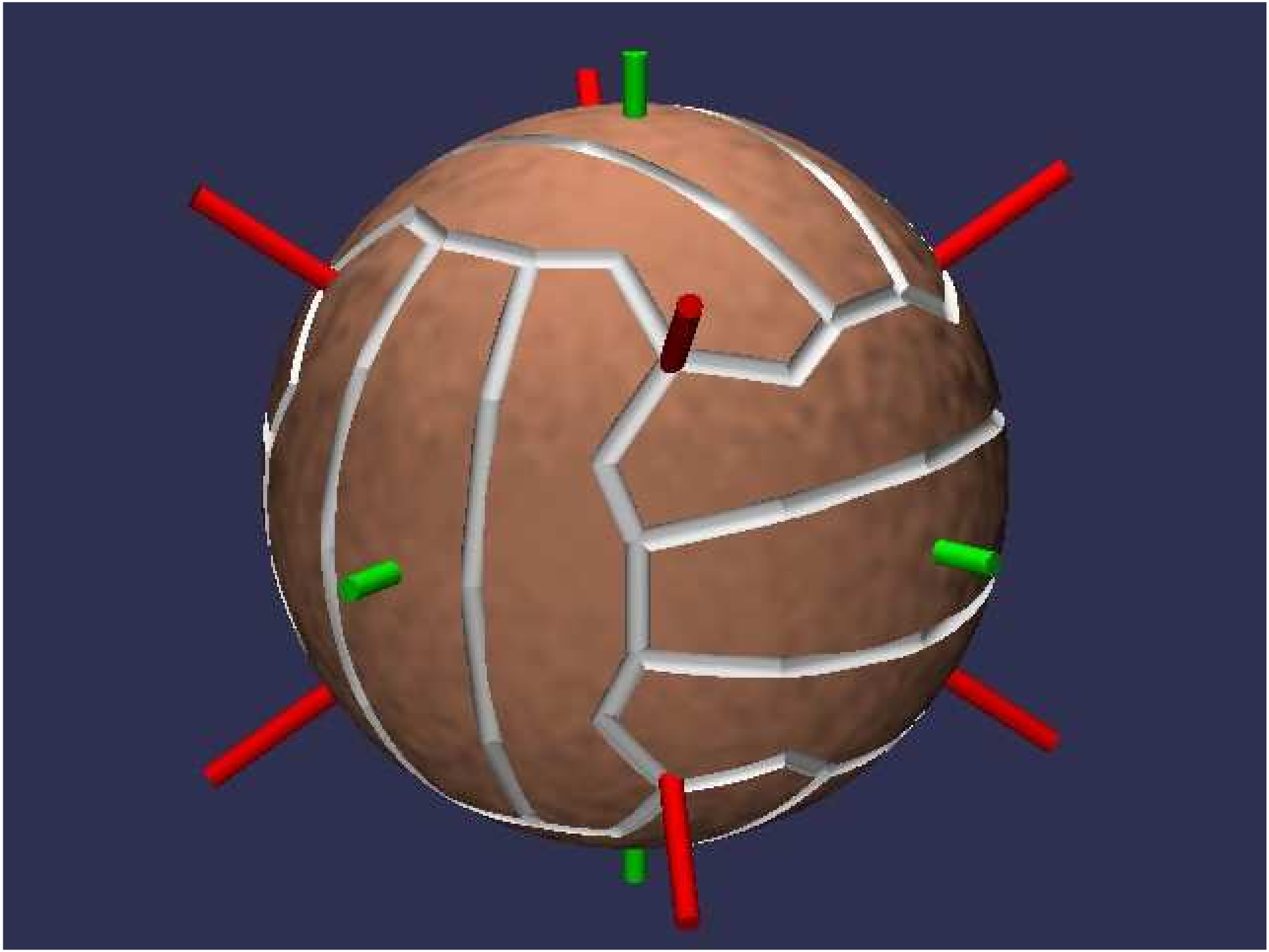


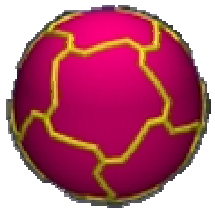








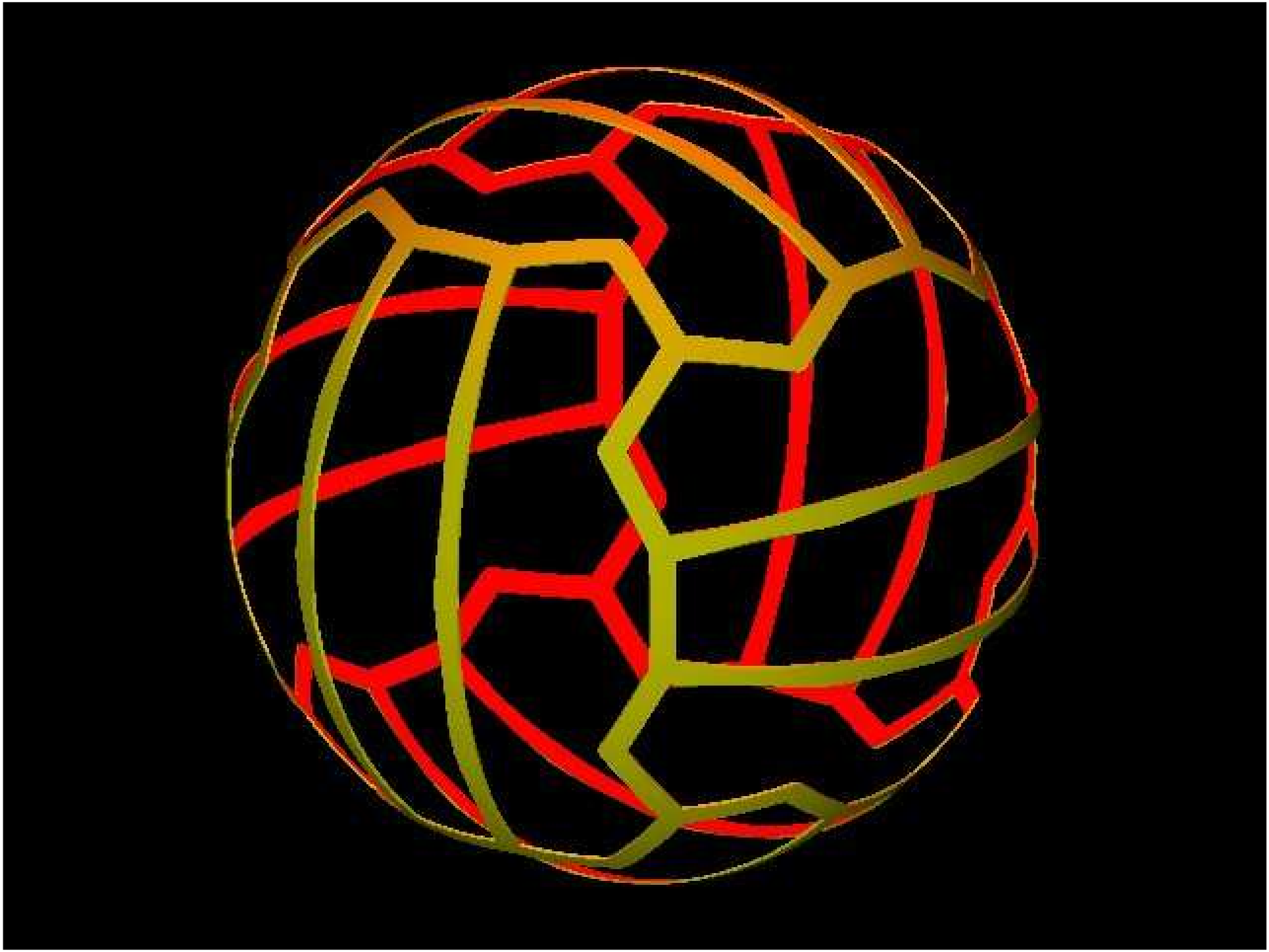


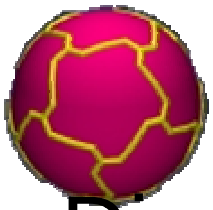


Matthias Ludwig
PH Weingarten

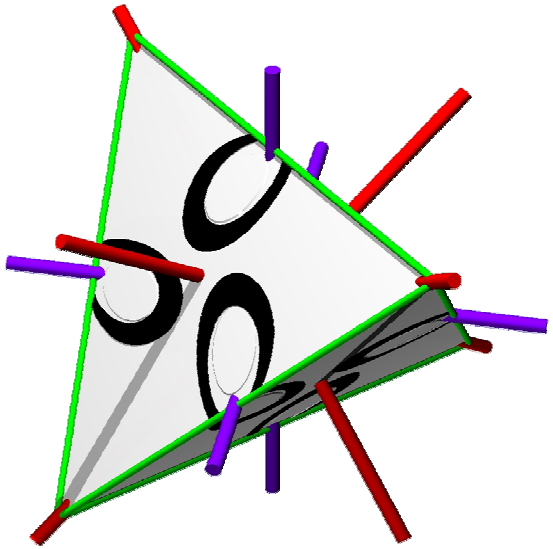
Fußballmathematik

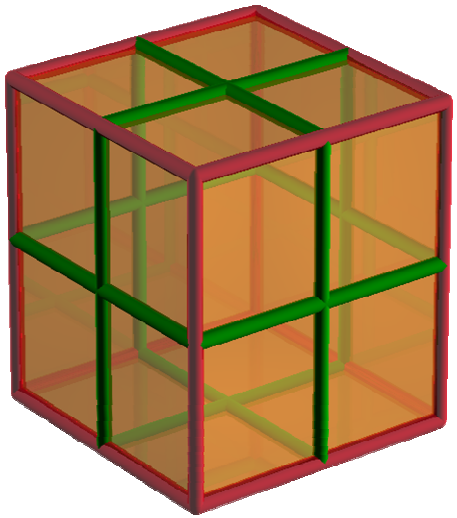
Wolfgang Weigel
Reichsstadt Gym.

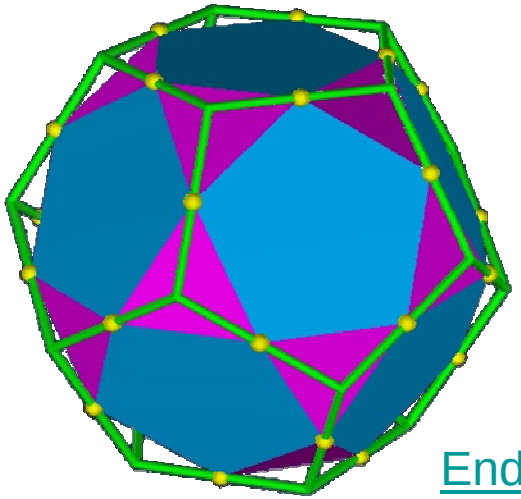




Die symmetrische Grundlage eines Fußballs ist entweder der **Tetraeder,** der **Würfel (Oktaeder)** oder der **Dodekaeder(Ikosaeder)**







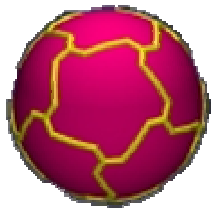
Ende

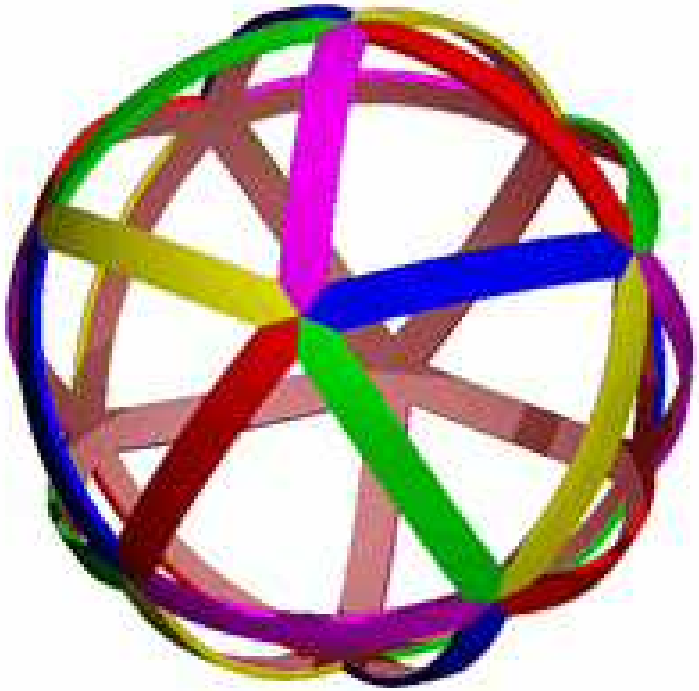
EURO PASS
adidas
EURO2008
Austria-Switzerland

EURO2008
Austria-Switzerland
EURO PASS

Ende

Okay warten wir auf 2010!





Fußballverwandlungen

Literaturh

- Mathewelt 135 (2006) (I
- Mathematik und Sport (
  Verlag)
- GSU 02/2009 Projekte i
- mathematik.ph-weingarten.de/
- Google: Matthias Ludwig