RheinlandPfalz

Mathematik hilft [fast] immer!

Mathematisches Modellieren in der Schule

Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend

Autorenteam:
Dietmar Fries
Gabriele Lapport
Alfred Simon
Georg Wiederstein

Graphische Gestaltung des Titelblatts:
mn design, Kaiserslautern

Layout:
Georg Wiederstein

Fotos und Grafiken auf der Titelseite:
Jörg Niebergall
Werbeagentur Höhn
Sendung mit der Maus, WDR
Gabriele Lapport
Alfred Simon
Georg Wiederstein

Druck:
Heinrich Fischer, Rheinische Druckerei
67547 Worms

© Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend
Rheinland-Pfalz 2004

Vorwort

Die Einbeziehung realistischer Frage- und Problemstellungen aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler in den Mathematikunterricht ist heute ein unbestrittenes Ziel, dessen Umsetzung aus verschiedenen Gründen als wichtig erachtet wird:

- Der Beitrag der Mathematik zur Vermittlung einer vertieften Allgemeinbildung wird darin gesehen, dass die Mathematik drei unterschiedliche Grunderfahrungen ermöglicht:
  - Mathematik als formale Wissenschaft
  - Mathematik als anwendbare Wissenschaft
  - Mathematik als Mittel zur Ausbildung heuristischer Fähigkeiten.

  In diesem Sinne wird eine angemessene Berücksichtigung des Anwendungsbezuges im Mathematikunterricht z.B. in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen für die Abiturprüfung (EPA) wie auch im rheinland-pfälzischen Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe gefordert. Die gleiche Intention wird in den Bildungsstandards Mathematik für den Mittleren Schulabschluss zum Ausdruck gebracht. Dort sind „Probleme mathematisch lösen“, „mathematisch argumentieren“ und „mathematisch modellieren“ als allgemeine mathematische Kompetenzen benannt, die Schülerinnen und Schüler in den Klassenstufen 5 bis 10 erwerben sollen.

- Um die Effizienz des Mathematikunterrichts zu steigern und kumulatives Lernen zu ermöglichen, ist es wichtig, dass Aufgabentypen und Problemstellungen zu Grunde gelegt werden, die unterschiedliche Herangehensweisen ermöglichen und ggf. auch unterschiedliche Lösungen haben können. In Übungsphasen müssen abwechslungsreiche Anwendungsaufgaben in variierenden Kontexten das bloße Training von Routineaufgaben ergänzen. Durch diese Veränderung der Aufgabenkultur wird auch eine Veränderung des Unterrichtsskripts bewirkt – hin zu einem stärker schüleraktiven, selbstregulierten Lernen.

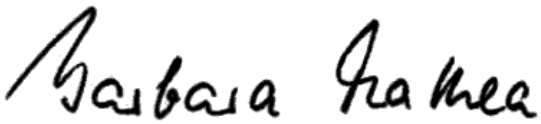
  In diesem Sinne ist einer der Arbeitsbereiche im Rahmen des bundesweiten Modellprojekts „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (SINUS)“ die Weiterentwicklung der Aufgabenkultur. Lehrerinnen und Lehrer, die sich auf diesen Weg einlassen, machen die Erfahrung, dass dadurch auch die Motivation der Schülerinnen und Schüler und das Interesse an Mathematik gesteigert werden können.

Die vorliegende Handreichung unterstützt Lehrkräfte, die anwendungsbezogenen Problemstellungen einen größeren Raum in ihrem Unterricht geben und die selbstständige Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen bei ihren Schülerinnen und Schülern fördern wollen. Sie umfasst methodische Anregungen und konkrete Beispiele zu den einzelnen Modellierungsschritten und -werkzeugen, eine umfangreiche Sammlung im Unterricht erprobter Beispiele, die ausführlich beschrieben und kommentiert sind, sowie weitere Beispiele einschließlich der benötigten Sachinformationen und Hinweisen zu möglichen Lösungsansätzen. Besonders hilfreich ist es, dass Aufgaben mit sehr unterschiedlichem Umfang vorgestellt werden: von „kleinen“ Übungsaufgaben bis hin zu umfangreicheren Problemstellungen, die für ein Projekt von mehreren Unterrichtsstunden geeignet sind. Auch die mathematischen Bezüge sind vielfältig, sodass Aufgaben für alle Jahrgangsstufen von 5 bis 13 zu finden sind.

Ich danke dem Autorenteam für die Erarbeitung dieser Handreichung, die für den Mathematikunterricht aller Jahrgangsstufen hilfreich ist. Die Mehrzahl der Beispiele wurde im Unterricht erprobt, sodass wirklich Anregungen aus der Praxis gegeben werden. Das Autorenteam besteht aus engagierten Mathematiklehrkräften, die alle bereits mindestens einmal an der so genannten Modellierungswoche teilgenommen haben, die vom Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern jährlich durchgeführt wird. Sie bringen daher auch fundierte eigene Erfahrungen aus dem Bereich der mathematischen Modellierung ein.

Mein Dank gilt auch dem Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern, vor allem Herrn Dr. Bracke, sowie dem Fachbereich Physik der Johannes-Gutenberg-Universität in Mainz und der EADS Space Transportation in Bremen, die die Arbeit durch Material, Software und Informationen unterstützt haben.

Den Mathematiklehrerinnen und -lehrern wünsche ich viel Freude beim „Stöbern“ in den attraktiven Beispielen und beim Einsatz im Unterricht. Vor allem wünsche ich ihnen, dass es gelingt, die eigene Freude am Fach und an interessanten Problemstellungen auch den Schülerinnen und Schülern zu vermitteln.



Barbara Mathea
Leiterin der Abteilung Gymnasien des Ministeriums
für Bildung, Frauen und Jugend

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 7

Hinweise zu den einzelnen Kapiteln dieses Heftes 9

Zur mathematischen Modellbildung 12
- Mathematik und Modellbildung 12
- Schritte der mathematischen Problemlösung 12
- Der Modellierungszyklus 14
- Modellieren in der Schule 15
- Organisationsformen 16

Kreativitätstraining 17
- Die Mauersteinaufgabe 17
- Heuristische Hilfsmittel bei der Lösung mathematischer Aufgaben 18
- Heuristische Strategien 18

Modellierungswerkzeuge 20
- Schätzen 20
- Vereinfachen 23
- Beschaffen von Informationen 26

Arbeiten am Modell 30
- Anpassen der Parameter 30
- Systematisches Probieren 35
- Optimieren des Modells 37

Kommentierte Beispiel 44
- Handy-Tarife 45
- Kabeltrommel 49
- Ariane 5 55
- Kostenfunktionen 68
- Pausen und Produktivität 75
- Qualitätssteigerung von Druckmessgeräten 82
- Elvis im Schraubverschluss 91
- Serielle Übertragungsraten 97
- Siegchancen beim Tennis 102

Weitere Beispiele 109
- Ballonflug 110
- Leicht verdientes Geld? 112
- Europarad 114
- Mondgröße 116

Riesenfässer 119
Teelicht 121
Moseltalbrücke 123
ICE-Tunnel 125
Baggerschaufel 127
Stadionausbau 129
Sonnencreme für Autos 131
Minenbleistift oder Spitzbleistift? 133
Telefonzelle 134
Ein Weltwunder 136
Countdown für eine Weltrekord-Brücke 138

Übersicht über die Beispiele im Heft mit der Zuordnung zu Klassenstufen 141

Literaturhinweise 143

Einleitung

Allenthalben kokettieren Politiker, Moderatoren, Stars und Sternchen aus Film und Fernsehen damit, in der Schule in Mathematik nichts verstanden zu haben. Dadurch, dass sie es zu Ruhm, Reichtum und Ansehen gebracht haben, vermitteln sie ihrem Publikum in scheinbar überzeugender Weise, dass Mathematik im wirklichen Leben nicht benötigt wird.

Bei derart beeinflussten Schülerinnen und Schülern werden Mathematiklehrkräfte mit den üblichen Argumenten

- In unserer technisierten Welt benötigt man Mathematik
- Mathematik schult das abstrakte Denken
- Mathematik schult das räumliche Anschauungsvermögen
- Mathematik schult das logische Denken und Argumentieren

vergeblich versuchen, Begeisterung für ihr Fach zu wecken.

Tatsächlich erleben unsere Schülerinnen und Schüler Mathematik im Unterricht oft als abstraktes, theoretisches Gedankengebäude ohne jeglichen Bezug zu ihrer Alltagswelt. In diesem Gebäude sind die mathematischen Teilgebiete voneinander unabhängig und die erarbeiteten Ergebnisse und Werkzeuge werden in z.T. künstlichen Pseudoanwendungen passend zum aktuellen Unterrichtsgegenstand eingesetzt. Auch die üblichen, häufig realitätsfernen Textaufgaben vermitteln den Eindruck, dass die Aufgaben so „konstruiert" sind, dass sie mithilfe derjenigen mathematischen Fertigkeiten gelöst werden können, die gerade im Unterricht behandelt werden. Daher ist die Vorstellung weit verbreitet, dass eine Aufgabe nur dann eine „echte" Mathematikaufgabe ist, wenn sie nach einem bestimmten vorgegebenen Algorithmus mit allen vorgegebenen Werten innerhalb kurzer Zeit gelöst werden kann und ein eindeutiges, exaktes Ergebnis hat. Das Ergebnis selbst hat in der Regel über den reinen Trainingseffekt hinaus keinerlei Bedeutung für die Schülerinnen und Schüler.

Eine nachhaltige Veränderung des mathematischen Weltbildes kann daher nur erreicht werden, wenn es durch die Auswahl der Aufgaben und die Gestaltung des Unterrichts gelingt, die Schülerinnen und Schüler von den oben beschriebenen Vorstellungen zu lösen. Eine 15-monatige Studie zur Veränderung der Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern über Mathematik und ihrer affektiven Einstellungen zur Mathematik durch Modellieren im Mathematikunterricht kommt u.a. zu dem Ergebnis, dass *„ein Schlüssel zu einem veränderten Bild von Mathematik ... in dem mathematischen Weltbild der Lehrenden liegt." [Maaß; MU 6/03]*

Haben Jugendliche erst einmal erkannt, dass Mathematik nützlich ist und sie selbst betrifft, so sind sie auch bereit, sich zur Schärfung ihrer mathematischen Werkzeuge mit abstrakten Inhalten auseinander zu setzen. In einem Mathematikunterricht, der im Alltag der Schülerinnen und Schüler verankert ist, wird die Frage „Wozu brauchen wir das?" nicht gestellt.

Bei der Bearbeitung alltagsbezogener Fragestellungen ist es nötig, zunächst geeignete mathematische Werkzeuge, geeignete mathematische Modelle, auszuwählen. Die Lösungsansätze liegen in der Regel nicht sofort auf der Hand. Erst recht sind sie meist nicht alleine mit der aktuellen Unterrichtsmathematik bearbeitbar. Vielmehr werden Kenntnisse aus zurückliegendem Mathematikunterricht sowie Kenntnisse aus dem Unterricht anderer Fächer benötigt. Mathematisches Modellieren ist immer auch fachübergreifend. Darüber hinaus müssen Alltagserfahrungen, eine gute Portion gesunder Menschenverstand und kommunikative Fähigkeiten eingebracht werden.

Das Bearbeiten von Modellierungsaufgaben führt bei Schülerinnen und Schülern zu einer beachtlichen Kompetenzerweiterung:

- Erkennen mathematischer Fragestellungen in Alltagssituationen
- Formulieren geeigneter Fragestellungen
- Beherrschen von Modellierungsstrategien
- Entwickeln von Alternativlösungen
- Schaffen von Beurteilungskriterien für die Nützlichkeit der Lösung
- Einordnen des eigenen Tuns innerhalb eines Teams

Wer sich mit Modellierungsaufgaben beschäftigt, wiederholt längst erlernten Stoff, verbindet die unterschiedlichsten Teilgebiete der Mathematik, argumentiert mathematisch mit seinen Mitschülerinnen und Mitschülern – kurz mathematisches Modellieren stärkt das Selbstvertrauen im Umgang mit Mathematik.

In der Literatur wird zwischen innermathematischer und anwendungsbezogener Modellierung unterschieden. Zur innermathematischen Modellierung gehören u.a. das Verallgemeinern sowie das Variieren von Aufgaben während unter anwendungsbezogener Modellierung das Bearbeiten von möglichst realistischen Fragestellungen aus den verschiedensten Anwendungsgebieten verstanden wird. Im vorliegenden Heft ist mit mathematischer Modellierung stets anwendungsorientierte Modellierung gemeint.

Die vorliegende Handreichung enthält zahlreiche mit Schülern erprobte Beispiele für Modellierungsprojekte und Aufgaben, mit deren Hilfe Fähigkeiten geübt werden können, die zur erfolgreichen Bearbeitung von Modellierungsprojekten benötigt werden. Ferner enthält sie Lösungsvorschläge und Schülerlösungen zu einzelnen Aufgaben, sowie Anregungen für die Unterrichtsgestaltung.

Durch die Vielfalt der Wissensgebiete, denen die Themen der Aufgaben entnommen sind, wird gezeigt, dass die Nützlichkeit mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten keineswegs auf Naturwissenschaft und Technik beschränkt ist. Die Fragestellungen sind unter anderem der Geographie, dem Umweltschutz, der Drogenberatung, dem Bauwesen, dem Sport, den Wirtschaftswissenschaften, dem Marketing, der Verbraucherberatung, ... entnommen.

Der Umfang der Aufgaben reicht von kleinen Übungsaufgaben über Aufgaben für eine Unterrichtsstunde und Aufgaben, die als „Wochen-Hausaufgabe“ oder für Gruppenarbeitsphasen geeignet sind, bis hin zu Modellierungsprojekten, für deren Bearbeitung mehrere Unterrichtsstunden, ein „Mathematik-Tag“ oder eine Projektwoche benötigt wird.

Auch die Vorstellung, dass Fragestellungen aus dem Alltag so komplex sind, dass sie allenfalls in der Oberstufe bearbeitet werden können, wird widerlegt. Schon in der Orientierungsstufe kann damit begonnen werden, die Werkzeuge für das mathematische Modellieren anhand realitätsnaher Aufgaben bereitzustellen. Auf Seite 141 ist den Aufgaben jeweils die niedrigste Jahrgangsstufe zugeordnet, in der sie nach dem derzeit gültigen rheinland-pfälzischen Lehrplan eingesetzt werden kann.

Die beiliegende CD enthält alle Aufgaben und Arbeitsblätter in digitaler Form, das vom Fachbereich Physik der Universität Mainz entwickelte Programm VIMPS, mit dessen Hilfe man Video-Sequenzen auswerten kann, sowie von Schülerinnen und Schülern erarbeitete Lösungen und Zusatzmaterial.

Hinweise zu den einzelnen Kapiteln dieses Heftes

Zur mathematischen Modellbildung (S. 12)

In Anlehnung an den Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe wird eine allgemeine Darstellung zur mathematischen Modellbildung gegeben. Dabei stehen der Prozess der Modellbildung sowie die Veranschaulichung des Modellierungszyklus im Mittelpunkt der Betrachtungen. Empfehlungen zum Modellieren in der Schule runden die Ausführungen ab.

Kreativitätstraining (S. 17)

Die in dieser Handreichung behandelten Beispiele stellen Alltagssituationen dar, die nicht in typischer mathematischer Formulierung gegeben sind. Diese Alltagssituationen müssen zunächst analysiert und dann mit mathematischen Werkzeugen beschrieben werden. Dazu ist ein hohes Maß an Kreativität und Flexibilität erforderlich. In diesem Kapitel werden Möglichkeiten aufgezeigt, diese Fähigkeiten im Hinblick auf das Mathematische Modellieren zu trainieren.

Modellierungswerkzeuge (S. 20)

Da bei der Entwicklung mathematischer Modelle häufig unbekannte Größen aufgrund plausibler Vorstellungen geschätzt, vereinfachende Annahmen gemacht und Zusatzinformationen beschafft werden müssen, ist es sinnvoll, den Gebrauch dieser Modellierungswerkzeuge zunächst zu üben. Dazu werden einfache Modellierungsbeispiele vorgestellt, bei deren Bearbeitung jeweils eines dieser Werkzeuge im Vordergrund steht.

Schätzen (S. 20)

Das Beispiel *„Man sollte mal wieder Zeitung lesen!*“ zeigt, dass Bilder, die kommentarlos auf einer Folie präsentiert werden, die Fantasie Jugendlicher anregen und zum Einsatz von Modellierungswerkzeugen führen. Schätzaufgaben können bereits in der Orientierungsstufe gewinnbringend eingesetzt werden; Schätzungen mithilfe von Vergleichen sind ab Klassenstufe 7 zur Einführung, zum Üben und Wiederholen der Dreisatzmethode jederzeit möglich.

Vereinfachen (S. 23)

Am Beispiel „*ICE-Neubaustrecke*“ wird verdeutlicht, dass komplexe reale Situationen erst nach vereinfachenden Annahmen durch ein mathematisches Modell beschrieben werden können.

Beschaffen von Informationen (S. 26)

Die Fragestellung „*Wie schwer ist ein Haus?*“, angeregt durch ein Bild, kann nur sinnvoll bearbeitet werden, wenn zusätzliche Informationen über Baumaterialien u.a. aus den verschiedensten Quellen verwendet werden.

Arbeiten am Modell (S. 30)

Anpassen der Parameter (S. 30)

Die entwickelten mathematischen Modelle müssen dem Vergleich mit der Realität standhalten. Bei derartigen Überprüfungen tritt häufig der Fall auf, dass das grundsätzliche Verhalten von Größen durch das Modell richtig beschrieben wird, die berechneten Werte jedoch nicht mit bekannten Werten aus der Wirklichkeit übereinstimmen. Dazu müssen Modellparameter variiert und angepasst werden. Beispielhaft wird bei „*Kalter Kaffee?*“ ein mathematisches Modell zur

Beschreibung eines Abkühlvorgangs entwickelt und durch Variation von Parametern der realen Situation angepasst. Beispiele zur Beschreibung von Abkühl- und Erwärmungsvorgängen können ab der Klassenstufe 10 eingesetzt werden.

Systematisches Probieren (S. 35)

Systematisches Probieren wird anhand des Zeitungsartikels „*Nichtrauchen ist cool*“, das ab Klasse 7 einsetzbar ist, beschrieben. Das mächtige Werkzeug Systematisches Probieren ist dann besonders hilfreich, wenn für eine geschlossene, algorithmische Lösung das notwendige Handwerkszeug noch nicht zur Verfügung steht.

Optimieren des Modells (S. 37)

Häufig können komplexe, reale Situationen, wie bereits weiter oben beschrieben, durch vereinfachende Annahmen in einem mathematischen Modell erfasst werden. Eine schrittweise Berücksichtigung zunächst vernachlässigter Parameter, Größen oder Zusammenhänge führt zur Weiterentwicklung des Modells und damit zu Lösungen, die die Wirklichkeit besser beschreiben. Am Beispiel „*Videoanalyse beim Kugelstoßen*“ wird diese in der Jahrgangsstufe 11 durchgeführte Weiterentwicklung eines Modells erläutert.

Kommentierte Beispiele (S. 44)

In diesem Kapitel werden ausführlich beschriebene und kommentierte Beispiele aus den verschiedenartigsten Bereichen des Alltags bereitgestellt. Die Beispiele *„Handy-Tarife“* und *„Kabeltrommel“* eignen sich zur Einführung in mathematisches Modellieren und können in der Sekundarstufe I bearbeitet werden.

Für bereits erfahrenere „Modellierer“ werden umfangreichere Modellierungsbeispiele vorgestellt: „*Ariane 5*“, „*Kostenfunktionen*“, „*Pausen und Produktivität*“, „*Qualitätssteigerung von Druckmessgeräten*“, „*Elvis im Schraubverschluss*“, „*Serielle Datenübertragung*“ und „*Siegchancen beim Tennis*“. Diese Aufgaben eignen sich jeweils auch für eine BLL, Facharbeit, Bearbeitung an Projekttagen oder zum Einsatz in einer Projektwoche.

Weitere Beispiele (S. 109)

In diesem Kapitel sind vielfältige Beispiele aus dem Alltag zusammengestellt:
„*Ballonflug*“, *„Leicht verdientes Geld?*“, „*Europarad*“, „*Mondgröße*“, *„Riesenfässer*“, „*Teelicht*“, „*Moseltalbrücke*“, *„ICE-Tunnel*“, „*Baggerschaufel*“, „*Stadionausbau*“, „*Sonnencreme für Autos*“, „*Minenbleistift oder Spitzbleistift?* “, „*Telefonzelle*“, „*Ein Weltwunder*“ und „*Countdown für Weltrekord-Brücke*“.

Zu jeder Beispielaufgabe enthält das Heft eine Kopiervorlage. Zur individuellen Gestaltung von Arbeitsblättern ist jede Kopiervorlage als Datei auf der CD gespeichert. Die Beispiele werden jeweils durch weitere Informationen in einem Kasten ergänzt, der meist nach folgendem Schema aufgebaut ist:

1. *Thema der Modellierungsaufgabe, in Klammern: mögliche und naheliegende Fragen*
2. *Allgemeine Hinweise zur Aufgabe*
3. *Notwendige Materialien und Informationen*
4. *Klassenstufe, ab der die Aufgabe einsetzbar ist*
   Vorausgesetzte Kenntnisse
   Benötigte Unterrichtszeit
5. *Lösungshinweise*
   Hinweise auf mögliche Schwierigkeiten
   Hilfestellungen durch die Lehrkraft
   Mögliche Teillösungen und evtl. weiterführende Überlegungen
   Organisationsformen

Zu jedem Beispiel werden Lösungsmöglichkeiten in Kurzform oder in einer ausführlichen Darstellung unter Einbeziehung von Unterrichtserfahrungen vorgestellt.

Zur mathematischen Modellbildung

Im Lehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe ist diesem Thema unter der Überschrift „Problemlösen mit mathematischen Methoden – Modellbildung“ ein eigenes Kapitel gewidmet. Der dort in knapper Form beschriebene Prozess der Modellbildung und seine Bedeutung für die Methodenkompetenz wird hier erläutert. Anschließend werden Möglichkeiten und Empfehlungen zur unterrichtlichen Umsetzung aufgezeigt.

Mathematik und Modellbildung

Die mathematische Modellierung ist ein sehr vielschichtiger und komplexer Prozess. Die Mathematik stellt bei diesem Prozess nicht nur eine mächtige, weitgehend formalisierte Sprache und auch die Instrumente bereit, die zur Formulierung einer abstrakten Beschreibung des Problems und zu seiner logischen Durchdringung dienen, sondern liefert gleichzeitig auch die notwendigen Lösungswerkzeuge. Sie stellt damit also die Hilfsmittel zur präzisen Beschreibung, zur Analyse und zur Lösung des Problems zur Verfügung.

Insofern werden beim mathematischen Modellieren – zumindest in komplexeren Anwendungszusammenhängen – tiefergehende Kenntnisse der mathematischen Sprache und Methoden benötigt. Erfahrungen beim mathematischen Modellieren können daher Schülerinnen und Schülern in besonderer Weise zum Erwerb fachspezifischer Kenntnisse motivieren. Andererseits erfordert der sachgerechte Einsatz der mathematischen Hilfsmittel eine sorgfältige und exakte Diskussion der verwendeten Begriffe und Methoden und festigt daher die im Fach erworbenen Kenntnisse. Mathematisches Modellieren als besondere Form der Auseinandersetzung mit Mathematik fördert daher die fachliche Kompetenz der Schülerinnen und Schüler.

Schritte der mathematischen Problemlösung

In der Wissenschaft und bei Anwendungen in Unternehmen erfordert das Bearbeiten von Problemen mithilfe mathematischer Methoden oft eine Zusammenarbeit von Anwendern und Mathematikern und stellt damit mathematisches Modellieren in seiner komplexesten Form dar. Zur besseren Beschreibung kann man diesen Prozess in sechs Schritte gliedern (siehe auch Lehrplan Mathematik S II, S. 19ff.).

1. Erfassen des Problems des Anwenders

Zunächst muss aus dem in der Sprache des Anwenders beschriebenen Problem die von dem Mathematiker zu bearbeitende Problemstellung herausgearbeitet werden. Nach einer evtl. vorzunehmenden Ein- bzw. Abgrenzung ist eine präzise Formulierung der Fragestellungen und auch eine erste Beschreibung der erwarteten Ergebnisse erforderlich. Diese Phase muss nicht bei allen Anwendungsproblemen notwendig durchlaufen werden. Sie ist noch weitgehend mathematikfrei und erfordert eine enge Zusammenarbeit zwischen dem Anwender und dem Mathematiker, wobei der Anwender federführend ist.

2. Präzisieren der Problembeschreibung

In dieser zweiten Phase werden zunächst die vorliegenden Informationen im Hinblick auf die Fragestellung und auf die erwarteten Ergebnisse geordnet und auf Vollständigkeit geprüft.

Die Mathematik verfügt über eine durch ihre Theorien und Notationen, ihre Definitionen, Sätze und Algorithmen geprägte Sprache, mit deren Hilfe der Mathematiker in enger Zusammenarbeit mit dem Anwender in einem kreativen Prozess das Problem formalisiert, logisch strukturiert und quantifiziert. Der Einsatz der durch die Begriffe und Methoden der Mathematik geprägten Sprache führt beinahe zwangsläufig zu einer gedanklichen Durchdringung und Präzisierung des

Problems und ist ein erster Schritt hin zu einem abstrakten mathematischen Modell. Durch die Formulierung ergeben sich oft schon erste Hinweise auf die Art der Modellierung und die zu verwendenden Hilfsmittel der Mathematik.

Auch diese Phase erfordert eine Zusammenarbeit zwischen Anwender und Mathematiker, der aktivere Part liegt nun aber eher beim Mathematiker.

3. Modellieren des Problems

In der dritten Phase wird das praktische Problem in eine formal-mathematische Darstellung übersetzt. Dabei werden als typische Hilfsmittel z.B. Mengen, algebraische Strukturen, Relationen, funktionale Zusammenhänge, speziell strukturierte Gleichungen und Ungleichungen (lineare Gleichungen, Gleichungssysteme, Differentialgleichungen usw.), geometrische Objekte sowie Methoden (Differenzieren, Integrieren, Berechnung von Erwartungswerten und Wahrscheinlichkeiten, Optimierungsalgorithmen usw.) verwendet. Die verständige Auswahl der für die Bearbeitung des Problems geeigneten mathematischen Strukturen und Verfahren erfordert nicht nur ein entsprechendes Überblickswissen, sondern auch Detailkenntnisse über die Eigenschaften bzw. Möglichkeiten und Grenzen der verwendeten Werkzeuge.

4. Mathematische Lösung in dem gewählten Modell

Die mathematische Lösung in dem gewählten Modell kann auf sehr verschiedene Arten erfolgen und stellt nur in seltenen Fällen eine eindeutige Lösung dar, wie sie etwa im Mathematikunterricht in Textaufgaben meist verlangt ist. Zunächst können – mit dem Ziel, die Korrektheit des Modells zu prüfen – verschiedene Ausgangssituationen im mathematischen Modell durchgerechnet werden. Daran anschließend können für die Fragestellung interessante Anwendungssituationen studiert werden, um daraus gute Lösungsvorschläge zu entwickeln. Ebenso lassen sich auf diese Weise der Einfluss und die Bedeutung bestimmter Randbedingungen besser einschätzen und innerhalb bestimmter, angebbarer Grenzen auch Prognosen abgeben. In diesem Sinn sind Lösungen Konsequenzen, die sich beim Durchrechnen realitätsnaher Varianten in dem Modell ergeben.

Es kann sich jedoch auch zeigen, dass eine Lösung in dem gewählten Modell zu aufwändig oder sogar unmöglich ist. In diesem Fall muss ein neuer Modellierungsansatz gefunden werden.

5. Überprüfen und Bewerten der Lösung

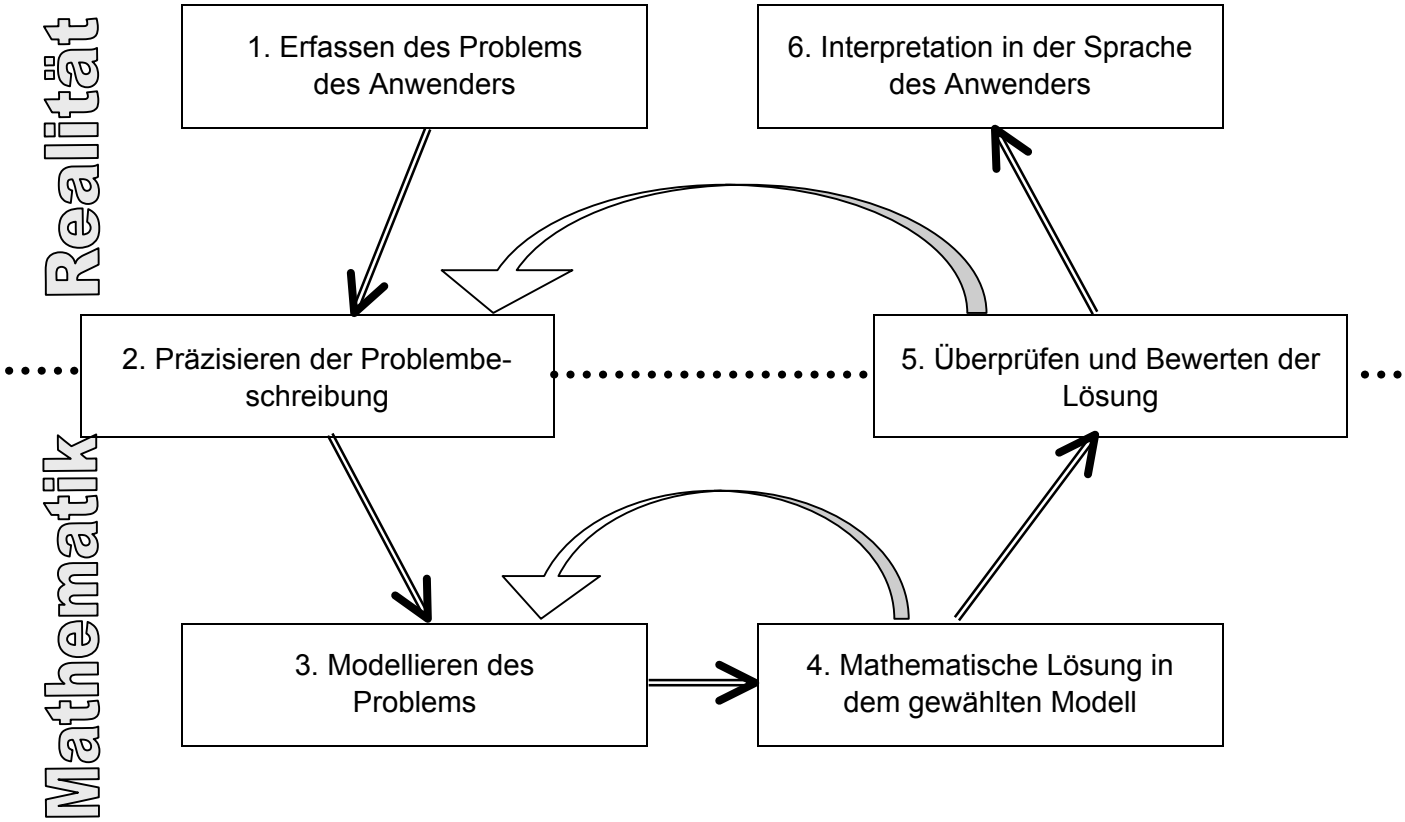
Die entwickelten mathematischen Modelle müssen einen Bezug zur realen Welt haben, der durch Beobachtung, Vergleich oder Prognose validiert werden muss. Erst bei hinreichender Übereinstimmung der Modellaussagen mit der Wirklichkeit ist das mathematische Modell für die Lösung des Problems geeignet. Dazu gehört auch eine kritische Reflexion und Bewertung des eingeschlagenen Lösungsweges. Dabei können erneut Verbesserungen und Präzisierungen notwendig werden, die eine Modifikation der mathematischen Lösung oder eine andere Auswahl mathematischer Strukturen und Verfahren erforderlich machen.

6. Interpretieren in der Sprache des Anwenders

Abschließend wird die Lösung des Problems in der Sprache des Anwenders formuliert. Dabei werden auch zusätzliche Bewertungen, Erläuterungen zu den vorgenommenen Vereinfachungen und Einschränkungen bei den Lösungen (Grenzen des Modells) ausdrücklich erwähnt.

Der Modellierungszyklus

Die Abfolge der erwähnten Schritte darf – siehe auch Lehrplan MSS – keinesfalls als lineare Abfolge der einzelnen Phasen verstanden werden. Die einzelnen Phasen sind noch nicht einmal eindeutig gegeneinander abgrenzbar. In der Regel werden vor allem die Schritte 2 bzw. 3 bis 5 mehrfach zyklisch durchlaufen.



Häufig wird zunächst ein einfaches Modell gewählt, das an realitätsnahen Ausgangssituationen getestet und Zug um Zug durch Erhöhung der Komplexität so verbessert wird, dass es die zu betrachtende Situation hinreichend genau beschreibt. Dabei kann sich durchaus zeigen, dass das gewählte Modell nicht für eine weitere notwendige Verfeinerung geeignet ist und ein völlig neuer Modellierungsansatz gefunden werden muss.

Ebenso kann in solchen Zyklen die Methode der schrittweisen Vereinfachung angewendet werden. Komplexe Modelle und Fragestellungen lassen sich oft schon aus rechentechnischen Gründen nicht vollständig bearbeiten. Bei der Modellierung werden daher schrittweise Vereinfachungen vorgenommen, wobei jeweils aus der fachspezifischen Sicht oder an einem Teilmodell geprüft wird, ob die vorgenommene Reduzierung unbedeutend bzw. für die betrachtete Situation hinnehmbar ist.

Eine weitere hier anzuführende Methode ist die Methode der Zerlegung in Teilprobleme. Deren je nach Komplexität gegebenenfalls in mehreren Zyklen gewonnenen Lösungen werden anschließend zur Gesamtlösung zusammengesetzt und bewertet.

Die Entwicklung mathematischer Modelle stellt in dem beschriebenen Sinn immer einen Prozess dar, der in einer Abfolge von Modellierungszyklen abläuft und eine Annäherung an die Realität wiederspiegelt.

Modellieren in der Schule

In der Diskussion um die internationalen Vergleichsuntersuchungen TIMSS und PISA und das dahinterstehende Bildungsverständnis sind Kompetenzen wieder stärker in den Blickpunkt gerückt, auf deren Ausbildung viele Kolleginnen und Kollegen in ihrem Unterricht immer schon hingearbeitet haben. Gerade die im PISA-Rahmenkonzept genannten prozessgesteuerten mathematischen Kompetenzen, nämlich die Fähigkeiten

- mathematisch zu denken, zu argumentieren und zu kommunizieren
- mathematisch zu modellieren, Probleme zu stellen und zu lösen
- mit mathematischen Darstellungen umgehen
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen und ihre Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen

können Schülerinnen und Schülern durch die aktive Gestaltung von Modellbildungsprozessen in besonders eindrucksvoller Weise vermittelt werden.

Natürlich genügt es nicht, wenn sie diesen Prozess einige wenige Male in der oben beschriebenen, äußerst komplexen Form erleben und dabei die Schritte lediglich nachvollziehen. Vielmehr sollte das Modellieren als eine der Leitlinien den Mathematikunterricht durchziehen und damit sicherstellen, dass die Instruktion durch die Lehrerinnen und Lehrer und die Konstruktion der Modelle durch die Schülerinnen und Schüler in einem ausgewogenen Verhältnis stehen.

In diesem Heft sollen daher auch Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie Schülerinnen und Schüler an das mathematische Modellieren herangeführt werden können.

Schon in den unteren Klassenstufen können sie anhand relativ einfacher, anwendungsbezogener Probleme typische Modellierungswerkzeuge kennen und anwenden lernen. Anregungen und Hilfen dazu werden im Kapitel „*Modellierungswerkzeuge*“ gegeben. Bei diesen einfachen Problemen wird in der Regel das einmalige Durchlaufen des Modellierungszyklus ausreichen. Anders als in den meist exakt und eindeutig lösbaren Lehrbuchaufgaben geht es zunächst darum, mithilfe der Mathematik die Realität möglichst sinnvoll zu beschreiben und sich dabei immer die Grenzen der gefundenen Lösung bewusst zu machen. Dazu eignen sich insbesondere einfache Schätzaufgaben.

Bei einigen Beispielen sind in diesem Heft Originalmaße und -daten angegeben. Diese werden jedoch nicht etwa als Ergebnisse erwartet, sondern können im Nachhinein genannt werden und den Schülerinnen und Schüler Bestätigung und Motivation geben.

Im Unterschied zu den üblichen Sachaufgaben werden in diesem Heft keine Fragen- bzw. Problemstellungen formuliert, die schon Anknüpfungspunkte zur Mathematik mitliefern würden. Die Lösung würde sich sonst auf die eingeengte Suche nach einem „versteckten“ Algorithmus reduzieren, der dann nur noch abgespult werden müsste. Der insbesondere in den Schritten 1 und 2 enthaltene Übersetzungsprozess von der Realität zur Mathematik, der ein hohes Maß an Kreativität und Flexibilität erfordert, würde übersprungen. Dieses Heft soll dazu beitragen, dass der wichtige Aspekt der Modellierung, der im üblichen Mathematikunterricht doch immer wieder zu kurz kommt, auch in der Schule trainiert wird (siehe Kapitel „*Kreativitätstraining*“).

Mit etwas komplexeren Problemen werden zunehmend die Schritte 3 bis 5 und damit das „*Arbeiten am Modell*“ in den Blickpunkt gerückt. Typische Methoden, die mit dem Modellierungszyklus in einem engen Zusammenhang stehen, werden in dem gleichnamigen Kapitel an Beispielen erläutert. Wurden vorher die Schritte der mathematischen Problemlösung lediglich angewendet, können sie jetzt thematisiert und damit den Schülerinnen und Schülern bewusst gemacht werden.

Nachdem die Schülerinnen und Schüler auf diese Weise typische Werkzeuge und Methoden mathematischen Modellierens kennen gelernt haben, können sie nun selbstständig und mit selbstgesuchten Informationen und Mitteln Anwendungsprobleme aus möglichst unterschiedlichen Bereichen bearbeiten. Die Aufgabenstellungen können offen gehalten sein und sollen unterschiedliche Modellierungsansätze erlauben. Oft sind dazu auch Recherchen sowie Berechnungen und Simulationen am Computer notwendig. Die Auseinandersetzung mit dem gestellten Problem wird daher geraume Zeit beanspruchen.

Organisationsformen

Selbstverständlich sind die Organisationsformen von der Art der zu bearbeitenden Probleme sowie von den räumlichen und zeitlichen Möglichkeiten abhängig. Die Bearbeitung erfolgt in der Regel zumindest teilweise in Gruppen geeigneter Größe. Im Folgenden sind einige mögliche Formen skizziert, die sich in der Praxis bewährt haben.

Einfache Problemstellungen lassen sich sicher problemlos an geeigneten Stellen in den Mathematikunterricht integrieren. Der zeitliche Umfang beschränkt sich zumeist auf höchstens eine Doppelstunde und erfordert keinen zusätzlichen Organisationsaufwand.

Überschreitet der Zeitaufwand eine Doppelstunde, kann die Bearbeitung des Problems nach der Diskussion eines ersten Modellierungsansatzes unter Umständen in mehrere Arbeitsschritte zerlegt werden, deren Bearbeitung in den nächsten Unterrichtsstunden oder in den Hausaufgaben erfolgt. Oft zeigt sich, dass die Organisation durch die Arbeitsgruppen selbst sehr zielgerichtet und effektiv ist.

Viele Aufgabenstellungen lassen sich auch als kleine, fachübergreifende Projekte bearbeiten. Liegen die Unterrichtsstunden der beteiligten Fächer in zeitlicher Nähe, lassen sich in einfacher Weise größere zeitliche Blöcke zur Bearbeitung schaffen.

Für die Bearbeitung komplexerer Probleme hat sich in besonderer Weise die Durchführung eines Projekttags bewährt. Dabei werden die Schülerinnen und Schüler in Gruppen von 3 bis 6 Personen und einem Gruppenleiter eingeteilt bzw. organisieren sich selbst in Gruppen festgelegter Größen mit einem Leiter. Jede Gruppe wählt ein Problem aus einem Aufgabenpool bzw. bekommt ein Problem zugeteilt. Bei der Bearbeitung sollten geeignete Literatur und Computer zugänglich sein. Die Fachlehrer stehen für Fragen und zur Beratung zur Verfügung, geben aber nur im Ausnahmefall steuernde Hinweise. Die Herangehensweise, die Wahl der besonderen Schwerpunkte, die Art des gewählten Modells und die Überprüfung und Bewertung der Lösung wird allein durch die Gruppe organisiert. Lediglich der zeitliche Rahmen der Bearbeitung, der durchaus 6 Zeitstunden erreichen kann, ist vorgegeben. Zu einem zu Beginn der Veranstaltung angegebenen Termin stellt jede Gruppe am Ende des Tages die Problemstellung und die gefundene Lösung allen Teilnehmern vor. Dabei wird auch Wert auf eine überzeugende Präsentation gelegt.

Bei den Erprobungen arbeiteten fast alle Teilnehmer an einer solchen Veranstaltung sehr ernsthaft und zielstrebig an den gestellten Aufgaben und gaben sich große Mühe bei der Präsentation ihrer Lösung.

Hat man mehrere Projekttage oder eine komplette Projektwoche zur Verfügung, so können in dieser größeren Zeitspanne auch vertiefende Aspekte bei der Bearbeitung eines Problems untersucht werden. Dabei können die Schülerinnen und Schüler ein mehrfaches Durchlaufen des Modellierungszyklus bewusst erleben. Die am Ende der Projekttage anstehende Präsentation kann intensiver vorbereitet werden und vor einem größeren Publikum stattfinden.

Natürlich sind auch andere Organisationsformen als die hier beschriebenen möglich!

Kreativitätstraining

In der vorliegenden Handreichung soll an einer Vielzahl sehr verschiedenartiger Beispiele gezeigt werden, dass mathematische Werkzeuge bei der Bewältigung fast aller Alltagssituationen nutzbringend eingesetzt werden können.

Da Alltagsprobleme in der Regel nicht in typisch mathematischer Formulierung vorliegen, müssen zunächst Anknüpfungspunkte zur Mathematik gefunden werden. Mit anderen Worten: Das Alltagsproblem muss in eine oder mehrere Fragen übersetzt werden, die mithilfe mathematischer Werkzeuge beantwortet werden können. Dieser Übersetzungsprozess verlangt ein hohes Maß an Kreativität und Flexibilität. Um einen Lösungsweg zu finden, müssen heuristisch, d.h. ohne weitere Hilfsmittel, Ideen produziert werden. „Intuitive Problemlöser", die mit Leichtigkeit knifflige Aufgaben lösen, verwenden häufig überraschende, ungewohnte Zugänge. „Wenn es gelingt, die unterbewusst verfügbaren Problemlösemethoden geistig besonders beweglicher Personen herauszuarbeiten und diese **bewusst** in Form von Heurismen zu erlernen und anzuwenden, können ähnliche Problemlöseleistungen erbracht werden wie von intuitiven Problemlösern" [2]. Dabei steht der Begriff „Heurismus" für eine Strategie, die dabei hilft sowohl die Problemsituation als auch die mathematischen Hilfsmittel unter möglichst vielen verschiedenen Aspekten zu betrachten.

Im Folgenden wird beschrieben, wie heuristische Fähigkeiten trainiert werden können.

Die Mauersteinaufgabe

> *Wer findet in einer Minute die meisten Verwendungsmöglichkeiten für einen Mauerstein?*

„Wer innerhalb einer Minute zehn und mehr echt voneinander verschiedene Verwendungen findet, gilt (in diesem Bereich) bereits als geistig sehr beweglich" [2]. Im Unterricht wird man nach einer Möglichkeit suchen, die Fülle der Beispiele zu strukturieren. Es bietet sich an, dazu die Eigenschaften des Mauersteins (Form, Material, Gewicht, ...) als Kategorien zu verwenden. In der Regel werden beim strukturierten Sammeln der Ergebnisse weitere Verwendungsmöglichkeiten gefunden.

Um die Methode des systematischen Suchens anhand von Objekteigenschaften vollends deutlich zu machen, sollte man sie an mindestens einem weiteren Objekt (ein großer rechteckiger Karton, ein Bleistift, ein Seil, ein Brett, ...) üben.

„Es wurden mit dieser Strategie immer deutlich mehr Verwendungsmöglichkeiten gefunden als ohne sie. Ein solcher messbarer Erfolg macht Mut und schafft Vertrauen in die eigene auf diese Weise „geschulte" Kreativität und lässt die Nützlichkeit von heuristischen Strategien erkennen." [1]

Nachdem die Nützlichkeit heuristischer Strategien herausgearbeitet worden ist, sollten sie auch auf „mathematikhaltige Situationen" übertragen werden (vgl. auch „*Zeitungsstapel*", „*Baggerschaufel*", ,...):

> *Bäcker Müller hat die Idee, eine neue Konfektsorte zu entwickeln. Überlege, welche Fragen er bei seiner Neuentwicklung stellen muss, bei denen Mathematik verwendet wird!*
>
> *Welche Informationen werden benötigt, um von der Idee bis zu verkaufsfähigen Konfektstückchen zu gelangen?*

Selbstverständlich kann das Fragenfinden auch in Klassenarbeiten gefordert werden:

> *Nenne zwei verschiedene interessante Fragen zu ..., zu deren Lösung auch Mathematik beitragen kann.*

Heuristische Hilfsmittel bei der Lösung mathematischer Aufgaben

Kreativität wird nicht nur beim Finden mathematischer Fragestellungen, sondern auch bei deren Bearbeitung benötigt. Dies ist insbesondere bei der Lösung von Transfer- oder Textaufgaben, für die dem Lernenden kein Algorithmus bekannt ist, der Fall. Häufig beklagen Lehrkräfte, dass Lernende die Arbeit an einer solchen Aufgabe nach einem gescheiterten ersten Lösungsversuch aufgeben. Dies liegt oft daran, dass zum Finden von Lösungswegen kein Gebrauch von heuristischen Hilfsmittel wie *informative Figuren, Tabellen oder Gleichungen aufstellen* gemacht wird. Dem kann wirksam begegnet werden, indem im Unterricht häufig zu einer Aufgabe mehrere Lösungswege erarbeitet und in einer Reflexionsphase miteinander verglichen werden.

Zum Beispiel können Textaufgaben zum Schnitt zweier linearer Funktionen mithilfe eines Diagramms (informative Figur), einer Tabelle (systematisches Probieren) oder von Gleichungen gelöst werden. (vgl. auch: „*Kabeltrommel*“, „*Nichtrauchen ist cool*“, „*Handy-Tarife*“). In der Reflexionsphase sollten anschließend u.a. folgende Fragen gestellt werden:

Welche Lösungsstrategien haben weitergeholfen?

Welcher Lösungsweg eignet sich am besten für das Problem?

Heuristische Strategien

Die im Mathematikunterricht am häufigsten benutzte heuristische Strategie ist das ***Vorwärtsarbeiten*** (vgl. „*Zeitungsstapel*“, „*Riesenfässer*“):

Was ist gegeben?

Was weiß ich über das Gegebene?

Was kann ich daraus ermitteln?

Um den Schülerinnen und Schülern diese Vorgehensweise bewusst zu machen, kann folgende Aufgabe eingesetzt werden:

Formuliere mathematische Fragestellungen, die für eine der folgenden Situationen von Interesse sein könnten. Versuche dabei die Strategie des Vorwärtsarbeitens anzuwenden!

a) Du bist bei einer Firma tätig, die Saft in Tetra-Packs herstellt.

b) Du bist bei Ferrero angestellt und arbeitest in der Hanuta-Abteilung.

c) Du hilfst zu Hause, das Badezimmer zu renovieren.

d) Du willst eine Kerze gießen.

Aber auch das ***Rückwärtsarbeiten*** ist beim Problemlösen hilfreich (vgl. „*Kalter Kaffee?*“, „*Kostenfunktionen*“):

Was ist gesucht?

Was weiß ich über das Gesuchte?

Was benötige ich, um das Gesuchte zu ermitteln?

Auch ***Mischformen*** beider Strategien können erfolgreich angewandt werden. Ein weiteres heuristisches Werkzeug ist das *Analogieprinzip* (vgl. „*ICE-Neubaustrecke*“, *„Riesenfässer*“):

Wie sind wir in ähnlichen Situationen vorgegangen?

Was kommt euch an dieser Aufgabe bekannt vor?

Kann diese Aufgabe auf einen bekannten Aufgabentyp zurückgeführt werden?

Vergleicht die letzten Aufgaben(lösungen) miteinander – welche Gemeinsamkeiten gibt es?

Die Beispiele sind [1] und [2] entnommen. Eine ausführliche Darstellung heuristischer Methoden findet man in [3]. In [4] ist eine Fülle von Unterrichtsbeispielen zu finden.

[1] Regina Bruder: Lernen, geeignete Fragen zu stellen, mathematiklehren Heft 115 Dezember 2002.

[2] Regina Bruder: Methoden und Techniken des Problemlösenlernens, SINUS-Materialien, Januar 2003

[3] Helmut König: Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen, MU Heft 3/92

[4] Thomas Werth (Hrsg.): Kreativität, mathematiklehren Heft 106, Juni 2001

Modellierungswerkzeuge

Schätzen

Bei der Entwicklung mathematischer Modelle zur Bearbeitung komplexer Sachverhalte ist es oft notwendig, Größen, die nicht gegeben sind, aufgrund plausibler Annahmen zu schätzen. Häufig können diese Annahmen im weiteren Verlauf der Modellierung durch Vergleichen der Ergebnisse mit der Realität überprüft und gegebenenfalls variiert werden.

In der professionellen Modellierung entspricht dieses Schätzen der Einschränkung der Definitionsbereiche von Parametern.

Schülern, die Mathematik mit eindeutig lösbaren Lehrbuchaufgaben identifizieren, ist das Schätzen zunächst oft suspekt. Dennoch konnte in allen Klassen, in denen durch Schätzaufgaben die Mathematik mit dem Alltag der Jugendlichen in Verbindung gebracht wurde, eine deutliche Steigerung der Motivation im Unterricht festgestellt werden.

Das Schätzen ist ein Werkzeug, das durch Training geschärft werden kann. Aufgaben zum Üben des Schätzens können schon in der Orientierungsstufe gestellt werden.

Schätzaufgaben, die sich situationsbezogen ergeben

In Zusammenhang mit der Organisation eines Wandertages ergeben sich folgende Fragen:

- Schätzen von Entfernungen anhand von Karten
- Wie weit kann eine Schulklasse an einem Vormittag wandern?
- Kann man in den Sommerferien Deutschland vom Bodensee bis Flensburg durchwandern?
- Kann man in einem Menschenleben zum Mond (zur Sonne) wandern?

Eine Friedensdemonstration könnte Anlass zu folgenden Fragen sein:

- Wie viele Menschen bilden eine 10 km lange Kette?
- Kann man eine Menschenkette vom Bodensee bis nach Flensburg aus Deutschen bilden?
- Reicht die derzeitige Weltbevölkerung aus, um eine Kette rund um die Erde zu bilden?

Beim Bericht über Ferienerlebnisse ergeben sich folgende Fragen:

- Wie viele Menschen befinden sich in einem 25 km langen Autobahnstau?
- Wie viele Menschen kann eine Seilbahn/Skilift an einem Morgen auf den Berg transportieren?
- Wie viel Liter heiße Getränke muss das Rote Kreuz bereitstellen, um Menschen zu versorgen, die auf 25 km Autobahn eingeschneit übernachten mussten?
- Wie viel Platz hat jede Person, wenn alle Deutschen gleichzeitig im Bodensee baden? (Übertragbar auf lokale Verhältnisse!)
- Um wie viel steigt der Pegel des Bodensees, wenn alle Deutschen gleichzeitig darin baden? (Übertragbar auf lokale Verhältnisse!)

Besonders interessant wird der Unterricht, wenn die Schülerinnen und Schüler selbst Aufgaben erfinden.

Allen Schätzaufgaben gemeinsam ist, dass es „die richtige Lösung“ nicht gibt. Das Ergebnis ist stets ein Intervall, in dem der „wahre Wert“ liegt. Dabei kann dieser „wahre Wert“ z.B. beim Schätzen von Wanderstrecken oder der Länge von Menschenketten durchaus individuell verschieden sein. Daher kann eine vollständige Lösung nicht nur darin bestehen, ein Intervall an-

zugeben. Vielmehr wird die Begründung der Wahl der Schätzwerte zum wichtigen Bestandteil der Lösung. Je plausibler und überzeugender die Überlegungen zur Auswahl der Schätzwerte begründet werden, desto glaubwürdiger ist das Lösungsintervall.

Bilder regen zu Schätzaufgaben an

Bilder regen die Fantasie in besonderer Weise an. Da Bilder in der Regel keine Zahlen enthalten eignen sie sich hervorragend für Schätzübungen. Im Folgenden wird anhand eines Beispiels ein möglicher Verlauf einer Stunde zur Einführung in das Thema „Dreisatz“ aufgezeigt.

Im Unterricht wurde der Klasse das Bild (S. 22) zunächst kommentarlos auf einer Folie präsentiert. Die Schülerinnen und Schüler äußerten sich spontan zum Inhalt des Bildes:

- Wie ist der Leser auf den Stapel gekommen?
- Was passiert, wenn der Fahrer bremst?
- ...

Als nach mit Mathematik bearbeitbaren Aufgabestellungen gefragt wurde, kamen Fragen wie

- Wie hoch ist der Zeitungsstapel?
- Wie viele Zeitungen enthält der Stapel?
- Wie hoch über der Straße sitzt der Zeitungsleser?
- ...

Da die Schülerinnen und Schüler noch keine Erfahrung mit Schätzaufgaben hatten, wurden zunächst in einem Unterrichtsgespräch die beiden für die Lösung nötigen Schritte

1. Finden eines Gegenstandes auf dem Bild, dessen Länge man ungefähr kennt.
2. Bestimmung der gesuchten Länge anhand der geschätzten Länge.

herausgearbeitet. Da bei der Abarbeitung dieser Schritte Diskussionsbedarf besteht, wurde in Gruppen gearbeitet.

Als „Vergleichsgegenstände“ zogen die Schülerinnen und Schüler die Länge des Oberkörpers, eines Armes oder eines Kopfes, die Höhe des Sattels oder den Durchmesser des Hinterrades heran. Die „Ergebnisse“ lagen zwischen 1 m und 1,5 m.

Da es bei dieser Aufgabe das eine richtige Ergebnis nicht gibt, bot die Präsentation der Gruppenergebnisse Gelegenheit, darüber zu sprechen, was hier unter einer Lösung zu verstehen ist. Als Ergebnis wurde ein Intervall angeben, in dem der „wahre Wert“ mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt. Auch der Schüler, der zu Hause oder im Internet, den Durchmesser eines 28-Zoll-Rades recherchiert hatte und stolz versicherte, dass er alleine die richtige Lösung hat, musste einsehen, dass man anhand der Messung der Stapelhöhe auf dem Bild kein exaktes Ergebnis bekommen kann. Ganz davon abgesehen, dass nicht bekannt ist, welche Reifengröße das Fahrrad auf dem Bild hat.

Abgerundet wurde die Stunde mit einem Vergleich der Rechenwege, die alle so geordnet werden konnten, dass die Dreisatz-Methode erkennbar wurde.

In Kapitel „*Weitere Beispiele*“ sind Bilder zu finden, die zu Schätzaufgaben anregen (vgl. „*Baggerschaufel*“, „*Stadionausbau*“).

Schätzaufgaben, die sich aus Zeitungsmeldungen ergeben

Aus Erfahrung weiß jeder Erwachsene, dass Zahlenangaben in Zeitungen mit äußerster Vorsicht behandelt werden müssen. In allen Tageszeitungen findet man immer wieder unstimmiges Zahlenmaterial, das als Grundlage für interessante Unterrichtsstunden dienen kann. Allerdings sollte man darauf achten, dass das Thema der Zeitungsmeldung für Jugendliche interessant genug ist (vgl. „*Nichtrauchen ist cool*“).

Man sollte mal wieder Zeitung lesen!

Das zugehörige Foto steht nur in der Druckversion zur Verfügung!

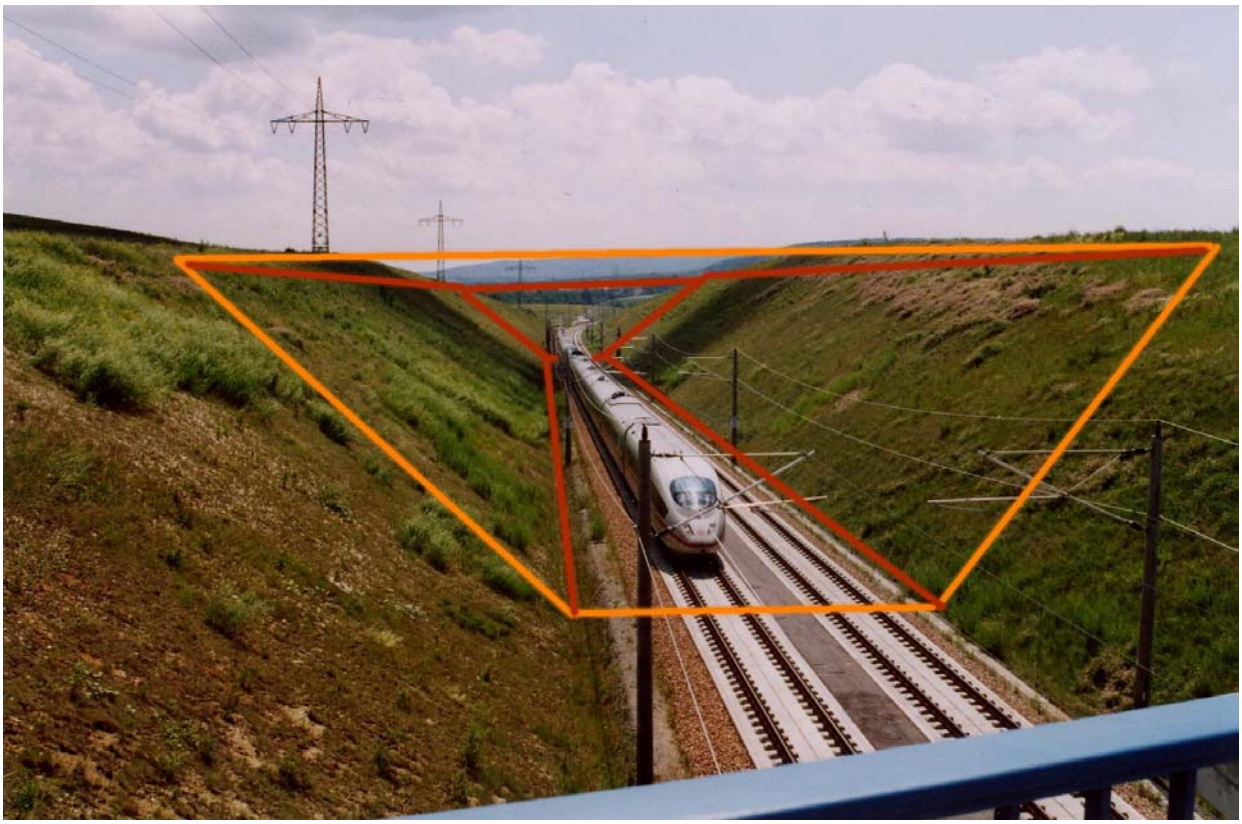
Vereinfachen

Reale Situationen, die durch ein mathematisches Modell beschrieben werden sollen, sind oft so komplex, dass sie erst durch vereinfachende Annahmen handhabbar werden. Ein für den Unterricht geeignetes Beispiel wird im Folgenden dargestellt.

Aus den Bildern des Arbeitsblattes (folgende Seite) ergeben sich Fragestellungen wie:

- Wie viele Lkw-Ladungen Erde mussten bei dem abgebildeten Geländeeinschnitt abtransportiert werden?
- Wie viel Erde musste beim gesamten Bau der ICE-Neubaustrecke Frankfurt – Köln bewegt werden?
- Wie viele Mannarbeitstage waren dazu nötig?

Im ersten Moment hält man die Fragen wahrscheinlich für nicht beantwortbar.
Zum einen stehen nur wenige Informationen zur Verfügung, zum anderen haben die gezeigten Geländeeinschnitte nicht die Form eines der im Unterricht üblicherweise behandelten Körper. Auf dem oberen Bild sind die Kammlinien gewölbt. Der Geländeeinschnitt auf dem unteren Bild liegt in einer Kurve der Bahnlinie. Neben dem Schotter unter den Schienen befinden sich auf beiden Seiten Vertiefungen, deren Form nur schwer zu erkennen ist.
Nimmt man jedoch an, dass der Geländeeinschnitt auf dem mittleren Bild nahezu die Form eines Prismas mit einem Trapez als Grundfläche hat, so kann die Größenordnung der bewegten Erdmasse recht genau abgeschätzt werden. Zur Berechnung des Prismenvolumens benötigt man zunächst Schätzwerte, mit deren Hilfe der Flächeninhalt des Trapezes berechnet werden kann.



Als Bezugsgröße für Streckenlängen bieten sich die Abmessungen des Zuges an. Da viele Schülerinnen und Schüler schon mit einem ICE gefahren sind, sind sie in der Lage, Länge, Höhe und Breite zu schätzen. Eine Internetrecherche (vgl. *„Beschaffen von Informationen“*, S. 26) liefert:

Länge eines Wagens: ca. 25 m; Höhe des Zuges: ca. 4 m; Breite des Zuges: ca. 3 m. Der Abstand zwischen zwei Haltemasten der Oberleitung beträgt 66 $^{2}/_{3}$ m.

ICE-Neubaustrecke

Bilder der ICE-Strecke Frankfurt – Köln.

Die Geländeeinschnitte sind beachtlich.

Für das Trapez ergeben sich daraus folgende Schätzwerte:

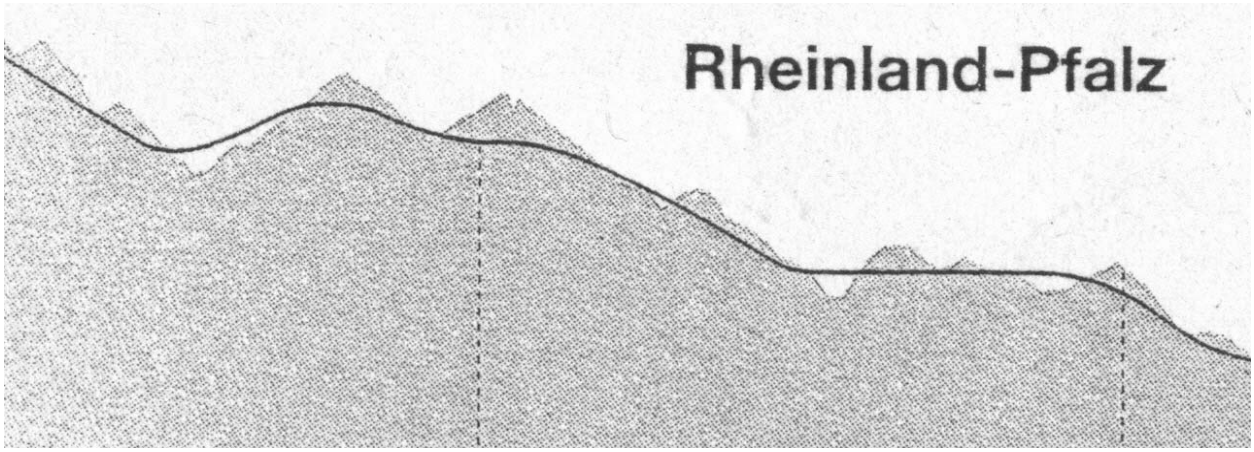
Breite des Trapezes unten: etwa 15 m (5fache Breite des Zuges)
Höhe h des Geländeeinschnitts: etwa 8 m (doppelte Höhe des Zuges)
Neigungswinkel der Böschung: etwa 45° (aus dem oberen Bild oder Internetrecherche)
Damit erhält man für die obere Breite des Trapezes eine Länge von etwa 30 m
(15 m + 2 · 8 m = 31 m).

Den Fotos entnimmt man, dass der Zug aus 8 Waggons besteht. Wenn man annimmt, dass das Prisma etwa doppelt so lang ist wie der Zug, erhält man für den Einschnitt eine Länge von ungefähr 400 m.
Für das Volumen des Prismas ergibt sich daraus ein Schätzwert von
$0{,}5 \cdot (15\text{m} + 30\text{ m}) \cdot 8\text{ m} \cdot 400\text{ m} = 72\,000\text{ m}^3$.

Ein Baustellenfahrzeug mit einem Ladevolumen von 30 m³ müsste also 2400-mal fahren, um den Aushub für einen Geländeeinschnitt der Neubaustrecke abzutransportieren.
In Klassen, die großes Interesse für die Aufgabe zeigen, kann das mathematische Modell verfeinert werden, indem die Wölbung der Kammlinie durch Teilprismen unterschiedlicher Höhe berücksichtigt wird. Auch die Beschreibung der Kammlinie durch eine geeignete Funktion mit anschließender Integration ist denkbar.

Wie viel Erde wurde entlang der Neubaustrecke insgesamt bewegt?

Auch bei der Bearbeitung dieser Frage sind grobe Vereinfachungen angebracht.
Die Bahn gibt die Gesamtlänge der Neubaustrecke mit 177 km an. In der Region um die Großstädte Frankfurt und Köln verläuft die Bahnlinie ca. 40km durch ebenes Gelände.
Die 30 Tunnel und 18 großen Talbrücken haben zusammen etwa eine Länge von 50 km.
Es bleibt also eine Strecken von ca. 90 km (177 km – 90 km = 87 km) Länge, die durch Geländeeinschnitte und Aufschüttungen für die Bahntrasse eingeebnet werden musste.
Wie auch das untenstehende Bild und der Ausschnitt aus dem Streckenprofil belegen, kann davon ausgegangen werden, dass der Erdaushub, der bei den Geländeeinschnitten anfiel, für die Aufschüttungen verwendet wurde. Nimmt man an, dass die Trasse so gelegt wurde, dass der Aushub etwa das gleiche Volumen hat wie die Aufschüttung, so muss man bei der Bearbeitung der Aufgabe nur die Erdmassen der Einschnitte berücksichtigen.



Überhöhtes Geländeprofil und Streckenführung der ICE-Strecke Köln – Frankfurt zwischen km 66 und km 78

Nur wo tiefere Einschnitte nötig gewesen wären, wurden Tunnels gebaut.

Daher kann das Ergebnis der ersten Aufgabe auf die übrigen Einschnitte übertragen werden. Nach obiger Schätzung müssen für einen Geländeeinschnitt von 400 m Länge ungefähr 72 000 m³ Erde bewegt werden. Daher hat ein Geländeeinschnitt von 1 km Länge ein Volumen von etwa 180 000 m³. Geht man davon aus, dass die eingeebnete Strecke je zur Hälfte aus Geländeeinschnitten und Aufschüttungen besteht, ergibt sich für die ICE-Neubaustrecke von Köln nach Frankfurt insgesamt ein Erdvolumen von etwa 8,1 Mio. m³.

Dieses mithilfe grober Abschätzungen erreichte Ergebnis stimmt in seiner Größenordnung mit einem in der Presse veröffentlichten Wert von 9,3 Mio. m³ überein. Der Vergleich mit dem offiziellen Wert vermittelt den Schülerinnen und Schülern neben dem Erfolgserlebnis ein Gefühl dafür, welche Genauigkeit von Abschätzungen mit starken Vereinfachungen erwartet werden darf. Darüber hinaus werden die Jugendlichen dazu ermuntert, ihre Umwelt mit wachem Verstand zu betrachten, der auch vor mathematischen Überlegungen nicht zurückschreckt.

Beschaffen von Informationen

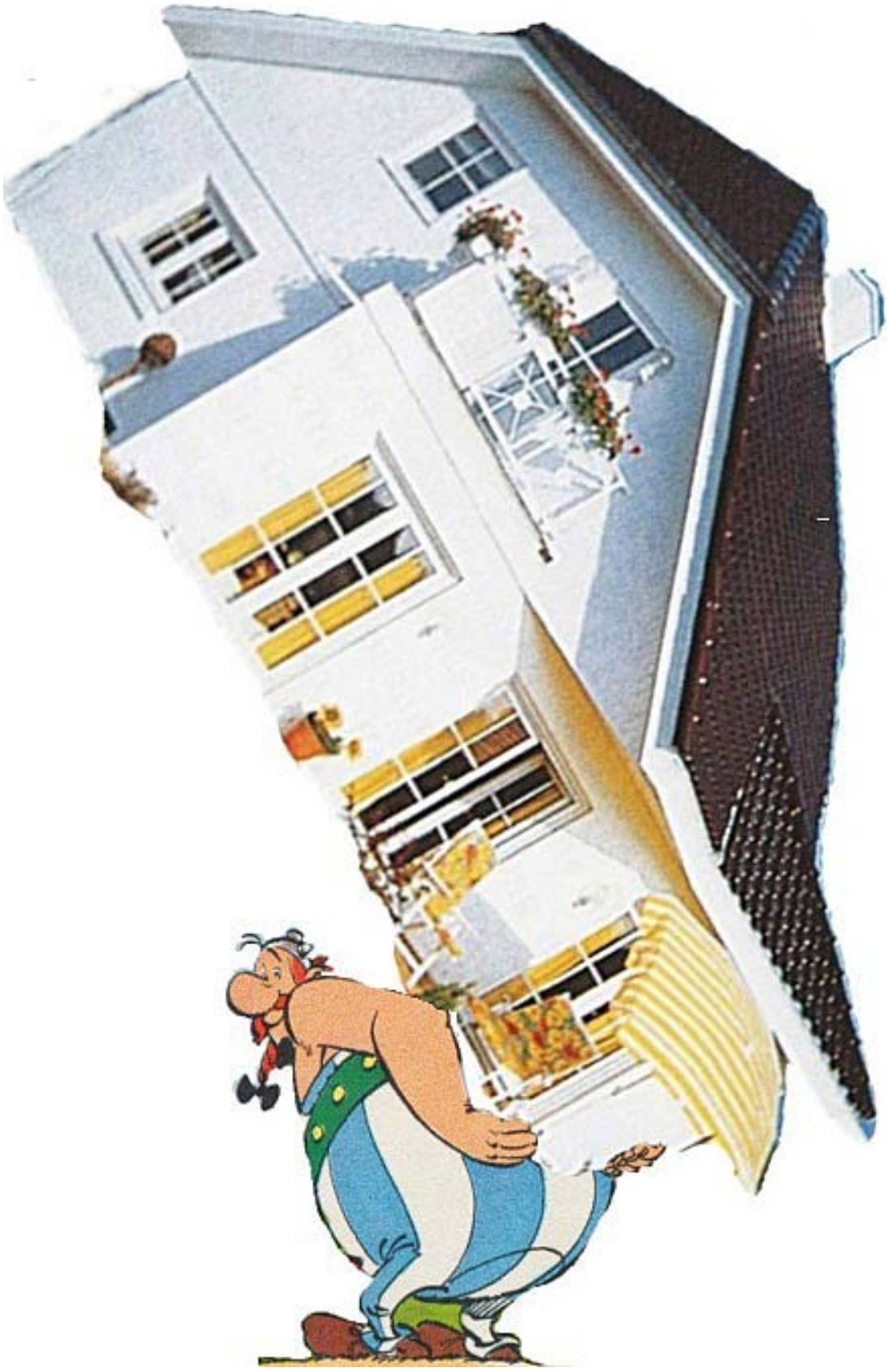
Im Abschnitt „*Vereinfachen*“ (S. 23) wurde gezeigt, wie man mithilfe von Vereinfachungen die Größenordnung eines Wertes schätzen kann, dessen Bestimmung mit einfachen mathematischen Hilfsmitteln auf den ersten Blick nicht möglich zu sein scheint. Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt stark von der Genauigkeit der Werte ab, die in die Rechnung eingehen. In obigem Beispiel sind dies Höhe, Breiten und Länge des Prismas. Führt man eine Schätzung auf der Grundlage wiederum geschätzter Werte, im Beispiel Schätzung der Prismenhöhe aufgrund der von der Klasse geschätzten Höhe des Zuges, durch, so kann es leicht vorkommen, dass das Ergebnis sehr weit vom tatsächlichen Wert abweicht und damit unbrauchbar ist. Daher ist es sinnvoll, sich möglichst viele zuverlässige Informationen zu beschaffen. Im Beispiel wurden die Abmessungen des Zuges im Internet recherchiert. In vielen Fällen ist es auch nötig, sich über die Zusammenhänge der Parameter in der Fachliteratur zu informieren.

In der Schule bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Nachschlagen in Fachbüchern und Lexika
- Beschaffung von Werten aus Tabellen und Diagrammen
- Suchen im Internet
- Befragen eines Experten
- Durchführen einer Messung

Im Folgenden wird berichtet, wie Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe umgegangen sind, deren Bearbeitung ohne die Beschaffung von Zusatzinformationen nicht möglich ist.

Ein ungewöhnlicher Hinkelstein!



Wie schwer ist ein Haus?

Die Schülerinnen und Schüler einigten sich zunächst darauf, die Masse eines Einfamilienhauses in Massivbauweise ohne Kellergeschoss zu bestimmen. Im Internet fanden sie einen entsprechenden Bauplan. Aus den Maßen berechneten sie die Flächen der Wände. Die Dicke der Außen- und Innenwände wurden in der Schule gemessen. Im Internet fanden sie Tabellen mit Angaben zur Dichte von Wänden:

11 Dachdeckungen

11.1 Deckung aus Dachziegeln und Betondachsteinen[1])

(Rechenwerte in kN/m²)

Die folgenden Werte gelten für 1 m² Dachfläche ohne Sparren, Pfetten und Dachbinder sowie ohne Mörtel, aber einschließlich Lattung (falls nicht anders angegeben).
Bei Vermörtelung sind 0,1 kN/m² zuzuschlagen.

1	Betondachsteine mit mehrfacher Fußverrippung und hochliegendem Längsfalz	
	bis 10 Stck./m²	0,50
	über 10 Stck./m²	0,55
2	Betondachsteine mit mehrfacher Fußverrippung und tiefliegendem Längsfalz	
	bis 10 Stck./m²	0,60
	über 10 Stck./m²	0,65
3	Biberschwanzziegel (DIN 456) 155/375 und 180/380 und Biberschwanzbetondachsteine	
	bei Spließdach (einschl. Schindeln)	0,60
	bei Doppeldach und Kronendach	0,75
4	Falzziegel, Reformpfannen, Falzpfannen, Flachdachpfannen (DIN 456)	0,55
5	Großformatige Pfannen bis 10 Stck./m²	0,50
6	Kleinformatige Biberschwanzziegel und Sonderformate (DIN 456)	0,95
7	Krempziegel, Hohlpfannen (DIN 456)	0,45
	in Pappdocken verlegt	0,55
8	Mönch und Nonne (mit Vermörtelung)	0,90
9	Strangfalzziegel (DIN 456)	0,60

[1]) Glasdachsteine bei gleicher Deckungsart entsprechen den ersten 4 Deckungsarten.

Ein Bekannter, der als Handwerker am Bau arbeitet, wurde telefonisch nach dem Material der Außenwände gefragt. Die Gruppe berechnete die Größe der Dachfläche und benutzte wieder eine Tabelle aus dem Internet, um die Masse des Daches zu bestimmen:

5 Mauerwerk

5.1 Mauerwerk aus natürlichen Steinen (einschließlich Fugenmörtel ohne Putz)

1	Erstarrungsgesteine	kN/m³	3	Schichtgestein	kN/m³
	Basalt, Melaphyr, Diorit	30		Grauwacke, Sandstein, Nagelfluh	27
	Gabbro	30		Kalkstein und Dolomit, dichter (fester),	
	Diabas	29		einschließlich Muschelkalk und Marmor	28
	Granit, Syenit, Porphyr	28		Kalkstein, sonstiger, einschließlich	
	Trachyt	26		Kalkkonglomeraten, Travertin u. ä.	26
	Basaltlava	24		Vulkanischer Tuffstein	20
2	Metamorphe Gesteine				
	Gneis, Granulit 30 kN/m³; Schiefer 28 kN/m³; Serpentin 27 kN/m³				

5.2 Mauerwerk aus künstlichen Steinen (vgl. auch Abschnitt „Mauerwerk", S. 7.3)

Bei Verwendung von Leichtmörtel sind die nachfolgenden Rechenwerte um 1 kN/m³ zu vermindern.

Steinrohdichte (g/cm³)	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,1	2,2	2,5
Rechenwert (kN/m³)	7	8	9	10	11	12	14	15	17	18	20	21	22	25

Anhand einer weiteren Tabelle wurde die Masse der Innenwände berechnet. Die Größe der Fenster wurde geschätzt. Auch die Masse eines Fensters mit Größenangaben fanden die Jugendlichen im Internet. Mithilfe der Dreisatzmethode wurde die Masse der übrigen Fenster und Glastüren bestimmt. Mit weiteren Tabellen berechneten die Schülerinnen und Schüler die Massen der Zwischendecken, der Dachkonstruktion, der Putze sowie der Bodenbeläge.

Aus Zeitgründen verzichteten die Schülerinnen und Schüler darauf, die Massen für der elektrischen und sanitären Installationen sowie der Heizung zu berücksichtigen. Da die Leitungen und Rohre unter Putz verlegt werden und hohl sind, können die Installationen bei der Abschätzung der Gesamtmasse vernachlässigt werden. Das Ergebnis der Schülergruppe lag bei einem Haus mit einer Grundfläche von 68 m² bei etwas über 100 t. Das entspricht etwa 1,5 t/m². Für die Auslegung der Stärke von Grundplatten rechnen Architekten bei der Planung von Einfamilienhäusern in Massivbauweise mit ca. 2 t/m² überbauter Fläche. Das Ergebnis der Schülerinnen und Schüler stimmt damit in guter Näherung überein.

Zum Abschluss der Arbeit ließ es sich die Schülergruppe nicht nehmen, im Internet die Masse eines Hinkelsteins zu recherchieren. Zur allgemeinen Freude der Gruppe, hatte der Hinkelstein etwa die gleiche Masse wie „ihr“ Haus. Obelix sollte das Haus also ohne Mühe tragen können.

[Die hier abgebildeten Tabellen sind entnommen:
Schneider, Klaus-Jürgen: Bautabellen mit Berechungshinweisen Beispielen und europäischen Vorschriften, Werner-Verlag, 10. Auflage]

Arbeiten am Modell

Im Abschnitt „*Modellierungswerkzeuge*“ (S. 20) wurde gezeigt, wie man anhand einfacher Aufgaben den Gebrauch der Grundwerkzeuge des mathematischen Modellierens üben kann. Diese Werkzeuge sind wichtige Hilfsmittel bei der Erarbeitung eines ersten mathematischen Modells für das zu untersuchende Anwendungsproblem. In der Regel werden die Ergebnisse, die der erste Modellierungszyklus (vgl. S. 14) liefert, den betrachteten Sachverhalt zu ungenau, zu unrealistisch oder auf irgend eine andere Art unzureichend beschreiben. Enthält das Modell geeignete Parameter, so kann es durch Variation der Variablen oder systematisches Probieren den Erfordernissen der Aufgabenstellung angepasst werden. Zeigen erste Test jedoch, dass das Modell nicht alle wesentlichen Aspekte des Sachproblems berücksichtigt, so muss es in weiteren Modellierungszyklen erweitert werden.

Im Folgenden wird an drei Beispielen gezeigt, wie das Arbeiten am Modell in der Schule umsetzbar ist.

Anpassen der Parameter

Das Beispiel „Kalter Kaffee?“ wurde in einem Kurs der Jahrgangsstufe 11 erprobt.

Kalter Kaffee?

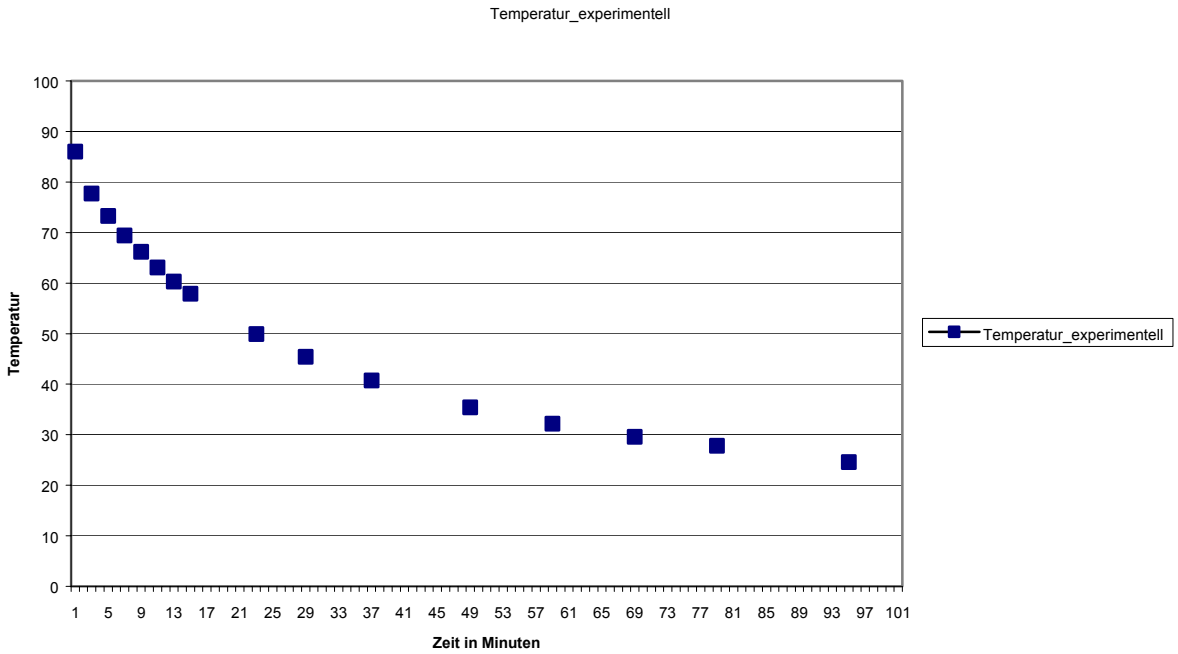
Eine Tasse Kaffee wird mit einem modernen Kaffeeautomaten hergestellt. Da die Kaffeetemperatur höher ist als die Raumtemperatur, kühlt der Kaffee allmählich ab.

Das Bild und eigene Erfahrungen veranlassten die Schülerinnen und Schüler, danach zu fragen, wie lange man bei einer frisch aufgebrühten Tasse Kaffee warten muss, um den ersten Schluck gefahrlos genießen zu können.

Aus dem Kurs kam die Idee, eine Messreihe aufzunehmen. Die folgenden Werte wurden parallel zur Erarbeitung des mathematischen Modells gemessen:

t [min.]	0	2	4	6	8	10	12	14	22	28	36	48	58	68	78	98
T [° C]	86	77,7	73,3	69,4	66,2	63,1	60,3	57,9	49,9	45,4	40,7	35,4	32,2	29,6	27,8	24,6

Zunächst vermuteten die Schülerinnen und Schüler einen proportionalen Zusammenhang zwischen Kaffeetemperatur und Zeit: Je länger man wartet, desto kälter ist der Kaffee. Das Argument, dass der Kaffee nach diesem Modell nach einiger Zeit gefrieren müsste, veranlasste den Kurs die Messpunkte in einem Diagramm zu veranschaulichen:



Das Diagramm zeigte, dass die Abkühlung des Kaffees umso langsamer abläuft, je weniger sich die Kaffeetemperatur von der Umgebungstemperatur unterscheidet.
Die Frage nach einer Klasse von Funktionen, deren Graphen qualitativ so verlaufen wie in obigem Diagramm, führt direkt zu Exponentialfunktionen der Form

$$f : t \mapsto a \cdot b^t + c \quad mit \quad a,b \in R^+; c \in R\,.$$

Durch Lösen eines Gleichungssystems und/oder systematisches Probieren (siehe S. 35) können die Parameter so bestimmt werden, dass der Graph der Exponentialfunktion mit dem Diagramm weitgehend übereinstimmt. Sollen Gleichungssysteme zu verschiedenen Messpunkten gelöst werden, empfiehlt sich der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms. Abschließend kann eine Fehlerbetrachtung durchgeführt werden.

Am Graphen der Exponentialfunktion können die benötigten Abkühlzeiten in Abhängigkeit von der gewünschten Trinktemperatur abgelesen werden.

Bei der Erprobung der Aufgabe wurde der Abkühlvorgang mithilfe einer Differenzengleichung simuliert:

Unter der Annahme, dass die Temperaturänderungsrate proportional zur Temperaturdifferenz ist, erhält man folgenden Ansatz für die Temperaturänderung pro Zeiteinheit:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -k \cdot (T - T_U)$$

Dabei bedeutet *T* die momentane Kaffeetemperatur und T_U die Umgebungstemperatur. Die Proportionalitätskonstante k lässt sich als Abkühlfaktor interpretieren.

Für die ersten beiden Minuten liefert die Tabelle eine Temperaturabnahme von ungefähr 8° C. Daraus kann der Abkühlfaktor bestimmt werden:

$$-4 = -k \cdot (86 - 24) \quad \Leftrightarrow \quad k = 0{,}0645 \quad \text{(ohne Maßeinheiten)}$$

Die Kaffeetemperatur T kann nun nach jedem Zeitschritt Δt z.B. mit der Rekursionsformel des Euler-Cauchy-Verfahrens

$$T(t + \Delta t) = T(t) + \frac{\Delta T}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

berechnet werden. Bei der Erprobung wurden die folgenden Startwerte verwendet:

Kaffeetemperatur	T_0 = 86° C
Umgebungstemperatur	T_U = 24° C

Diese Berechnungen sind mit jeder Tabellenkalkulation möglich. Das folgende Tabellenblatt enthält die notwendigen Anweisungen:

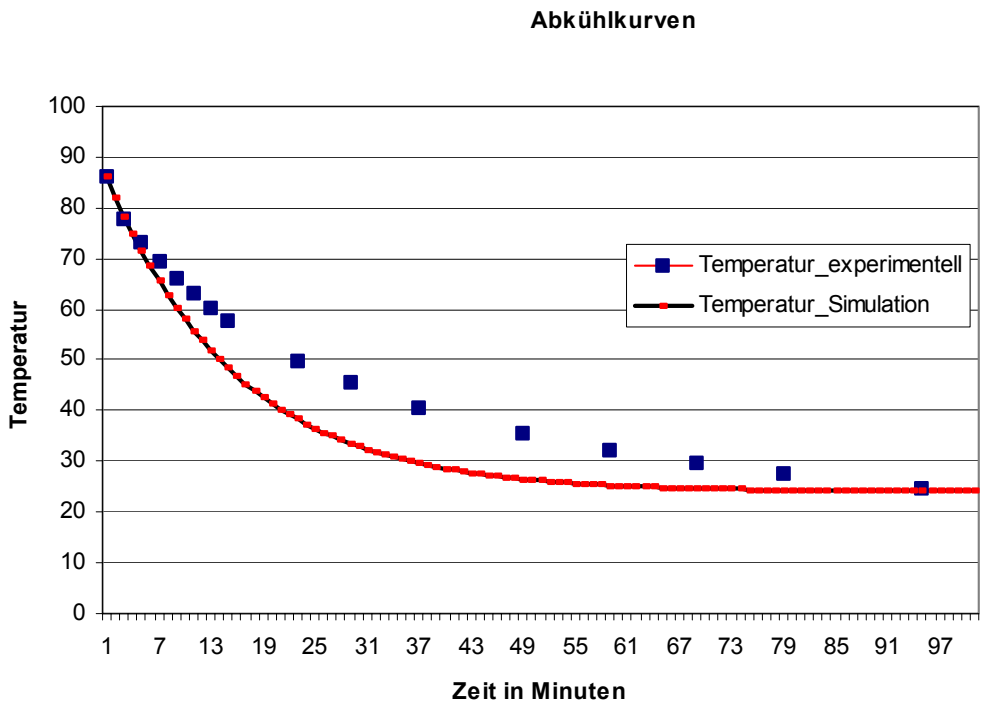
	A	B	C	D
1	Abkühlvorgang	Experiment	Simulation	
2				
3	Temperatur Anfang	86	86	
4	Umgebungstemperatur	24	24	
5	Abkühlfaktor k		0,0645	
6	Zeitschritt dt		1	
7	Zeit	Temperatur_experimentell	Temperatur_Simulation	
8	0	86	86	
9	=A8+1		=C8-$C$5*(C8-$C$4)*$C$6	
10	=A9+1	77,7	=C9-$C$5*(C9-$C$4)*$C$6	
11	=A10+1		=C10-$C$5*(C10-$C$4)*$C$6	
12	=A11+1	73,3	=C11-$C$5*(C11-$C$4)*$C$6	
13	=A12+1		=C12-$C$5*(C12-$C$4)*$C$6	
14	=A13+1	69,4	=C13-$C$5*(C13-$C$4)*$C$6	
15	=A14+1		=C14-$C$5*(C14-$C$4)*$C$6	
16	=A15+1	66,2	=C15-$C$5*(C15-$C$4)*$C$6	
17	=A16+1		=C16-$C$5*(C16-$C$4)*$C$6	
18	=A17+1	63,1	=C17-$C$5*(C17-$C$4)*$C$6	
19	=A18+1		=C18-$C$5*(C18-$C$4)*$C$6	
20	=A19+1	60,3	=C19-$C$5*(C19-$C$4)*$C$6	
21	=A20+1		=C20-$C$5*(C20-$C$4)*$C$6	
22	=A21+1	57,9	=C21-$C$5*(C21-$C$4)*$C$6	
23	=A22+1		=C22-$C$5*(C22-$C$4)*$C$6	
24	=A23+1		=C23-$C$5*(C23-$C$4)*$C$6	
25	=A24+1		=C24-$C$5*(C24-$C$4)*$C$6	
26	=A25+1		=C25-$C$5*(C25-$C$4)*$C$6	
27	=A26+1		=C26-$C$5*(C26-$C$4)*$C$6	
28	=A27+1		=C27-$C$5*(C27-$C$4)*$C$6	
29	=A28+1		=C28-$C$5*(C28-$C$4)*$C$6	
30	=A29+1	49,9	=C29-$C$5*(C29-$C$4)*$C$6	
31	=A30+1		=C30-$C$5*(C30-$C$4)*$C$6	

Mit den angegebenen Werten für T_0, T_U und k erhält man die nachstehende Tabelle:

	A	B	C	D
1	Abkühlvorgang	Experiment	Simulation	
2				
3	Temperatur Anfang	86	86	
4	Umgebungstemperatur	24	24	
5	Abkühlfaktor k		0,0645	
6	Zeitschritt dt		1	
7	Zeit	Temperatur_experimentell	Temperatur_Simulation	
8	0	86	86	
9	1		82,001	
10	2	77,7	78,2599355	
11	3		74,76016966	
12	4	73,3	71,48613872	
13	5		68,42328277	
14	6	69,4	65,55798103	
15	7		62,87749125	
16	8	66,2	60,36989307	
17	9		58,02403497	
18	10	63,1	55,82948471	
19	11		53,77648295	
20	12	60,3	51,8558998	
21	13		50,05919426	
22	14	57,9	48,37837623	
23	15		46,80597096	
24	16		45,33498584	
25	17		43,95887925	
26	18		42,67153154	
27	19		41,46721775	
28	20		40,34058221	
29	21		39,28661466	
30	22	49,9	38,30062801	
31	23		37,3782375	

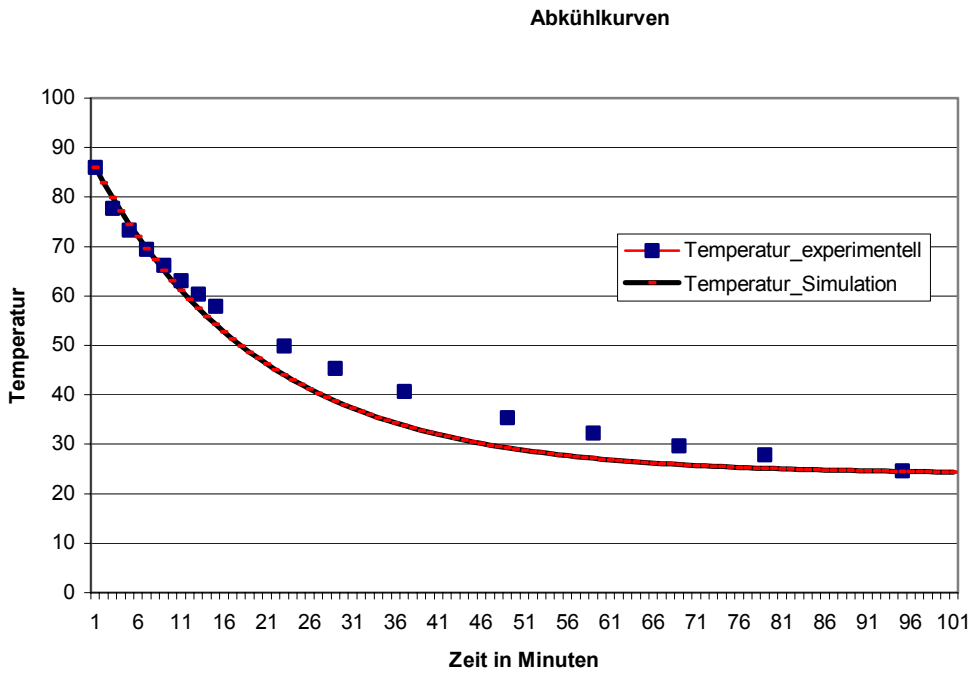
Zum Vergleich wurden die experimentell ermittelten Werte und die mithilfe des Modells bestimmten Werte in einem gemeinsamen Diagramm dargestellt.

Für k = 0,0645 ergibt sich

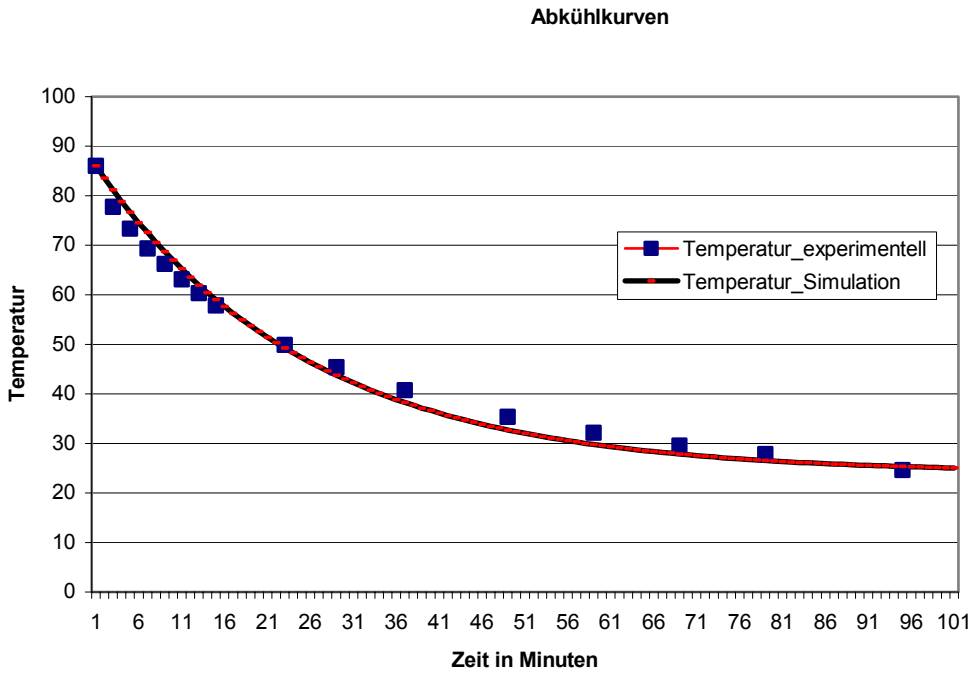


Die simulierte Abkühlkurve weicht teilweise deutlich von den realen Messpunkten ab, den prinzipiellen Verlauf spiegelt sie wieder. Da die beiden Kurven für t = 0 min und für große t gut übereinstimmen wurde k variiert:

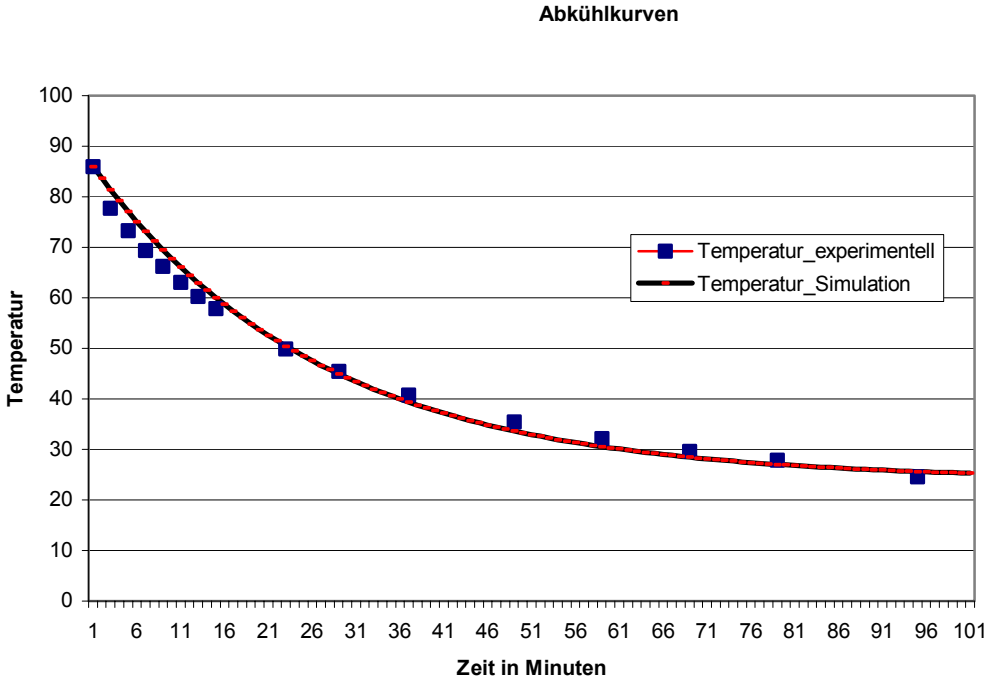
k = 0,05



k = 0,04



k = 0,038



Es ist sicherlich nicht zu erwarten, dass die experimentell ermittelten Messpunkte exakt auf der simulierten Abkühlkurve liegen, da eine Vielzahl von Faktoren – wie z.B. Material der Tasse, Kaffeevolumen, Verdunstung usw. – im Modell nicht berücksichtigt wurden.

Anmerkung:

Für $\Delta t \to 0$ geht die oben behandelte Differenzengleichung in die Differentialgleichung

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - U)$$

über. Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-kt} + T_U$$

mit der Anfangstemperatur T_0. In diesem Modell muss nur der Faktor k passend gewählt werden. k hängt von vielen äußeren Bedingungen ab: Gefäß, Volumen usw.

Systematisches Probieren

Auch das systematische Probieren ist eine effiziente Methode zur Anpassung von Parametern, die insbesondere dann hilfreich ist, wenn das mathematische Handwerkszeug für eine geschlossene, algorithmische Lösung noch nicht zur Verfügung steht. Zum Beispiel ist es möglich, Aufgaben wie „In welchem Jahr übersteigt ein mit dem Zinssatz p angelegtes Kapital K_0 den Wert 1,5 K_0?“ ohne Verwendung von Logarithmen in Klassenstufe 7 durch systematisches Probieren zu lösen. Auch Aufgaben, in denen nach ganzzahligen Lösungen linearer Gleichungen gesucht wird (vgl. Landeswettbewerb Mathematik 1. Runde 2003 Aufgabe 2) können sehr effizient durch Probieren gelöst werden. Die Bearbeitung mathematischer Aufgaben durch systematisches Probieren im Unterricht bietet Gelegenheit, das mathematische Selbstbewusstsein der Schülerinnen und Schüler zu stärken. Mit vergleichsweise geringen mathematischen

Kenntnissen können Aufgaben gelöst werden, deren geschlossene Lösung fortgeschrittene Kenntnisse erfordert.

Im Folgenden wird eine Unterrichtseinheit beschrieben, die als Abrundung des Kapitels „Zinsrechnung“ in einer 7. Klasse erprobt wurde.

Nichtrauchen ist cool

Genf/München (KNA/dpa) Täglich sterben weltweit rund 11 000 Menschen an den Folgen des Rauchens. Das erklärte die Weltgesundheitsorganisation (WHO) zum internationalen Nichtrauchertag, der weltweit am Mittwoch begangen wird. Die meisten der etwa 1,2 Milliarden Raucher hätten bereits als Minderjährige zur Zigarette gegriffen. Eine „aggressive Werbe- und Verkaufswirtschaft“ locke schon Neunjährige zum Nikotinkonsum an, indem suggeriert werde, Zigaretten zeugten von Freiheit und vom Erwachsensein, so die WHO. Daher fordert die Organisation absolutes Werbeverbot für Tabakprodukte.

Zu einem verblüffenden Rechenergebnis kam der Ärztliche Arbeitskreis Rauchen und Gesundheit in München: 50 Jahre Nichtrauchen können einen Menschen zum Doppelmillionär machen. Bei einer klugen Anlagestrategie ließen sich mehr als zwei Millionen Mark erwirtschaften. Stecke ein Raucher die täglichen fünf Mark für eine Schachtel Zigaretten nicht in den Automaten, sondern in ein Sparschwein, sei das nach einem Jahr mit 1825 Mark gefüllt. Wenn ein junger Mann diesen Betrag von seinem 15. Lebensjahr an in Aktienfonds mit einer Wertsteigerung von zehn Prozent investiere, besitze er mit 65 Jahren mehr als 2,1 Millionen Mark, errechneten die Ärzte.

Alleine von den zehnprozentigen Zinsen dieses Vermögens ergebe sich eine monatliche Zusatzrente von rund 17 700 Mark. Nichtraucher leben nach Angaben der Mediziner statistisch gesehen zudem zehn Jahre länger als hartnäckige Qualmer, Rauchen sei die mit Abstand größte vermeidbare Ursache für häufige Erkrankungen und vorzeitigen Tod.

(Potsdamer Neue Nachrichten, 31. 5. 2000)

Zum Abschluss einer Unterrichtsreihe zur Zinseszinsrechnung, in der die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit dem Gebrauch eines Tabellenkalkulationsprogramms gesammelt hatten, sollten die Angaben in obigem Zeitungsartikel nachgerechnet und auf die aktuellen Verhältnisse übertragen werden.

Zunächst rechnete die Klasse mit dem angegebenen Zigarettenpreis und p % = 10 % für 50 Jahre. Dabei lieferte die Tabelle (s. CD) tatsächlich einen Wert von über 2,1 Millionen Mark. Auch die Angabe zur monatlichen Zusatzrente wurde bestätigt.

Der weitaus spannendere Teil der Aufgabe war die Übertragung auf aktuelle Verhältnisse. Es wurde mit einem Preis von 3 € pro Schachtel und verschiedenen Zinssätzen gerechnet (s. CD). Dabei wurde angenommen, dass der Zinssatz über den gesamten Zeitraum konstant bleibt. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, kann mithilfe des Tabellenkalkulationsprogramms auch mit veränderlichen Zinssätzen experimentiert werden.

Optimieren des Modells

Oft kommt es selbst bei zunächst sehr übersichtlich erscheinenden Modellierungsaufgaben vor, dass das erste Modell Ergebnisse liefert, die zeigen, dass das Modell nicht alle wesentlichen Aspekte der Anwendungssituation beschreibt. In solchen Fällen muss das Modell schrittweise erweitert werden. Am Beispiel „Videoanalyse beim Kugelstoßen“ (Arbeitsblatt s. Folgeseite) kann dieses mehrfache Durchlaufen des Modellierungszyklus´ (vgl. S. 14) in der Schule durchgeführt werden.

Das Beispiel wurde mehrfach in Kursen der 11. und 12. Jahrgangsstufe erprobt. In allen Fällen erkannten die Schülerinnen und Schüler schnell, dass sich der Kugelstoß als schiefer Wurf beschreiben lässt. Die Betrachtung eines Beispielvideos stützte diese Vermutung. Mithilfe des Videoauswerteprogramm VIMPS (s. CD) wurden die Koordinaten der Wurfbahn aus dem Video in ein Tabellenblatt übertragen und als Diagramm ausgegeben. Dadurch wurde die Vermutung, dass die Bahn der Kugel eine Parabel beschreibt, sehr eindrucksvoll quantitativ bestätigt.

Darüber hinaus wurden Erlebnisse und Beobachtungen aus dem Sportunterricht und von Sportfesten diskutiert, bei denen ein zu großer oder zu kleiner Ausstoßwinkel zu schlechten Ergebnissen führte. Man war sich meist sehr schnell einig, dass es einen von der Größe des Sportlers abhängigen optimalen Winkel gibt, den es zu berechnen gilt.

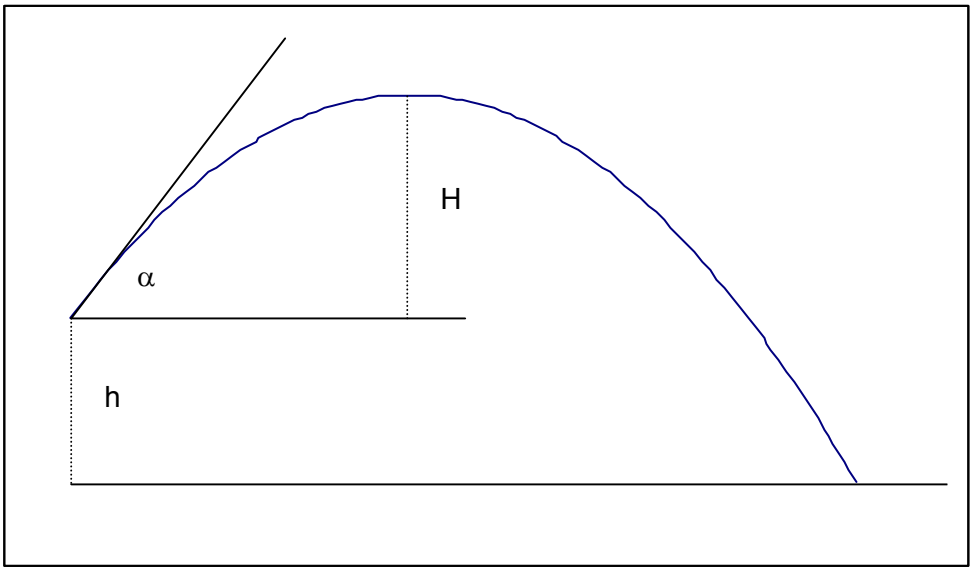
In den Erprobungen haben die Schülerinnen und Schüler daher zunächst versucht, die Wurfweite als Funktion des Abstoßwinkels α gegenüber der Horizontalen darzustellen.

Im Folgenden wird der Verlauf einer Unterrichtsreihe in einem Mathematikleistungskurs Ende der 11. Jahrgangsstufe beschrieben. Ein großer Teil der Schüler hatte auch Physik belegt.

Ein einfaches Modell: Der Kugelstoß als schräger Wurf

Im ersten Anlauf wurde der Kugelstoß als schiefer Wurf beschrieben, bei dem der Abwurfpunkt höher als der Aufschlagpunkt liegt. Daher liegt der optimale Winkel nicht bei exakt 45°. Mit der Videokamera lässt sich kontrollieren, ob der Kugelstoßer den optimalen Ausstoßwinkel beherrscht, zur Kontrolle und Optimierung kann die Videokamera sehr gut eingesetzt werden.

Ermittlung des optimalen Winkels:



Videoanalyse beim Kugelstoßen

Die Videokamera ist im Hochleistungssport ein wichtiges Hilfsmittel zur Analyse der Technik und zum Ausmessen sonstiger Parameter, die die Leistung beeinflussen.

Deutsche Bestenliste der Männer 2004 im Kugelstoßen:

Weite	Name	Jg	Verein	Datum Ort
20,88	Ralf Bartels	78	SC Neubrandenburg	19.05. Neuwied-Engers
20,44	Detlef Bock	74	VfL Wolfsburg	19.05. Neuwied-Engers
20,32	Peter Sack	79	LAZ Leipzig	19.05. Neuwied-Engers
19,98	Andy Dittmar	74	LG Ohra Hörselgas	11.06. Gotha
19,55	René Sack	76	LAZ Leipzig	11.06. Gotha
19,39	Gunnar Pfingsten	75	TSV Bayer Leverkusen	27.06. Schapbach
18,78	Sven-Eric Hahn	80	MTV Stuttgart	07.08. Ludwigsburg
18,39	Philipp Barth	83	SU Witten-Annen	24.07. Manchester
18,00	Tilman Northoff	69	VfB Fichte Bielefeld	30.04. Löhne
17,86	Robert Dippl	83	TSV Wasserburg	12.06. Regensburg

Bei der Analyse einiger Parameter dieser Kugelstoßer ergab sich, dass die Körpergröße zwischen 1,83 m und 1,98 m variiert. Die in verschiedenen Videoaufnahmen gemessenen Ausstoßwinkel lagen zwischen 37° und 48°. Welche Empfehlungen können den Kugelstoßern nach der Auswertung der Videos gegeben werden?

Wurfgleichungen:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \qquad y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \qquad v_y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha - gt$$

Nach einer Steigzeit t_S erreicht die Kugel den höchsten Punkt der Kurve, anschließend fällt sie in der Fallzeit t_F zu Boden.

Die Steigzeit t_S ergibt sich aus der Bedingung, dass die Geschwindigkeit v_y im höchsten Punkt 0 m/s sein muss, zu

$$t_S = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \quad .$$

Daraus erhält man die maximale Höhe H über dem Abstoßpunkt

$$y(t_S) = H = \frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} \quad .$$

Ist h die Höhe des Abstoßpunktes über dem Boden, so fällt die Kugel anschließend aus der Gesamthöhe H + h zu Boden. Die dafür benötigte Zeit t_F ergibt sich aus

$$\tfrac{1}{2} g \cdot {t_F}^2 = H + h \quad .$$

Insgesamt ist die Kugel dann $t_S + t_F$ unterwegs. Setzt man diese Gesamtzeit in x(t) ein, so ergibt sich schließlich für die Wurfweite W

$$W = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot (t_S + t_F)$$

$$= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2 \cdot (H + h)}{g}} \right)$$

$$= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2 \cdot \left(\frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} + h \right)}{g}} \right)$$

und damit $$W(\alpha) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{{v_0}^2 \cdot \sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2h}{g}} \right)$$

Zunächst versuchten die Schülerinnen und Schüler, über Extremwertbetrachtungen aus dieser Beziehung den optimalen Winkel zu bestimmen – jedoch ohne Erfolg. Da dem Kurs kein Compter-Algebra-System zur Verfügung stand, wurde der optimale Winkel durch Berechnungen der Wurfweite in Abhängigkeit von α mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms bestimmt.

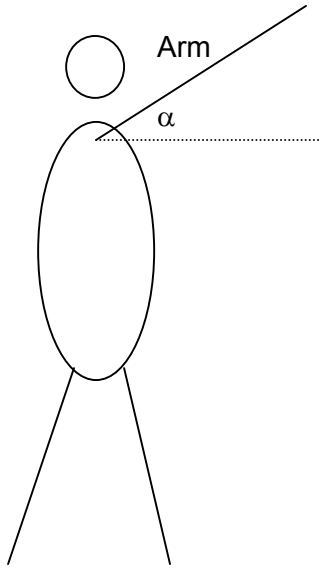
Die berechneten Werte zeigten jedoch, dass die Abhängigkeit vom Ausstoßwinkel in dem angegebenen Winkelbereich viel geringer war als erwartet. Für h = 2 m und eine Anfangsgeschwindigkeit von v_0 = 12 m/s ergab sich folgende Tabelle:

Höhe h	2	m
Anfangsgeschwindigkeit v	12	m/s

Winkel	Bogenmaß	t_H / s	H / m	t_F / s	W / m
39	0,680678408	0,77	5,82	1,26	18,97
39,5	0,689405055	0,78	5,95	1,27	19,00
40	0,698131701	0,79	6,07	1,28	19,03
40,5	0,706858347	0,80	6,20	1,29	19,06
41	0,715584993	0,80	6,32	1,30	19,08
41,5	0,72431164	0,81	6,45	1,31	19,10
42	0,733038286	0,82	6,58	1,32	19,11
42,5	0,741764932	0,83	6,71	1,33	19,11
43	0,750491578	0,84	6,83	1,34	19,11
43,5	0,759218225	0,84	6,96	1,35	19,11
44	0,767944871	0,85	7,09	1,36	19,10
44,5	0,776671517	0,86	7,22	1,37	19,09
45	0,785398163	0,87	7,35	1,38	19,07
45,5	0,79412481	0,87	7,48	1,39	19,04
46	0,802851456	0,88	7,60	1,40	19,01
46,5	0,811578102	0,89	7,73	1,41	18,98
47	0,820304748	0,90	7,86	1,42	18,94
47,5	0,829031395	0,90	7,99	1,43	18,89

Berücksichtigung der Armlänge

Die Schülerinnen und Schüler waren zunächst etwas ratlos, teilweise sogar ein wenig enttäuscht. Im Laufe der Diskussion über das Modell kam eine der Gruppen auf die Idee, dass die Abstoßhöhe ebenfalls von der Größe und auch von der Armlänge des Sportlers abhängt. Ein großgewachsener Schüler musste Modell stehen, damit die anderen die Armlänge vor und nach dem Ausstoß messen konnten.



Ausstoßhöhe = Schulterhöhe + Armlänge • sin α

A10 = 37

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Ist a die Armlänge, so erhöht sich die Abstoßhöhe um				$h_a = a \sin \alpha$		
3							
4	Höhe h		1,8	m			
5	Anfangsgeschwindigkeit v		12	m/s			
6	Armlänge		1	m			
7							
8							
9	Winkel	Bogenmaß	t_H	H	h_a	t_F	W
10	37	0,6457718	0,74	5,32	0,601815	1,26	19,09
11	37,5	0,6544985	0,75	5,45	0,6087614	1,27	19,15
12	38	0,6632251	0,75	5,57	0,6156615	1,28	19,20
13	38,5	0,6719518	0,76	5,69	0,6225146	1,29	19,25
14	39	0,6806784	0,77	5,82	0,6293204	1,30	19,29
15	39,5	0,6894051	0,78	5,95	0,6360782	1,31	19,32
16	40	0,6981317	0,79	6,07	0,6427876	1,32	19,35
17	40,5	0,7068583	0,80	6,20	0,649448	1,33	19,38
18	41	0,715585	0,80	6,32	0,656059	1,34	19,40
19	41,5	0,7243116	0,81	6,45	0,66262	1,35	19,41
20	42	0,7330383	0,82	6,58	0,6691306	1,36	19,42
21	42,5	0,7417649	0,83	6,71	0,6755902	1,37	19,43
22	43	0,7504916	0,84	6,83	0,6819984	1,38	19,43
23	43,5	0,7592182	0,84	6,96	0,6883546	1,39	19,43
24	44	0,7679449	0,85	7,09	0,6946584	1,40	19,42
25	44,5	0,7766715	0,86	7,22	0,7009093	1,41	19,40
26	45	0,7853982	0,87	7,35	0,7071068	1,42	19,38
27	45,5	0,7941248	0,87	7,48	0,7132504	1,43	19,35
28	46	0,8028515	0,88	7,60	0,7193398	1,44	19,32

In der Tat zeigt sich, dass nun die Stoßweite etwas stärker vom Ausstoßwinkel abhängt. Schließlich wurde noch ein weiterer Verbesserungsvorschlag gemacht. Der Abstoßpunkt befindet sich nicht senkrecht über dem 0-Punkt der Messung (vom Kugelstoßer aus gesehen: Vorderkante des Balkens), sondern schon im Kugelstoßsektor. Auch hier spielt die Armlänge eine Rolle. Einer der Schüler war in einem Leistungskurs Sport und musste nun über Kugelstoßtechnik referieren, Technikbilder aus der Sportliteratur wurden studiert – schließlich einigte man sich darauf, dass sich beim Ausstoß das Schultergelenk über dem Balken befindet.

Ist a die Armlänge, so erhöht sich die Wurfweite W um $w_a = a \cdot \cos \alpha$

Höhe h	1,8	m
Anfangsgeschwindigkeit v	12	m/s
Armlänge	1	m

Winkel	Bogenmaß	t_H	H	h_a	t_F	W	w_a	W_{eff}
37	0,64577182	0,74	5,32	0,601815	1,26	19,09	0,601815	19,70
38	0,66322512	0,75	5,57	0,615661	1,28	19,20	0,615661	19,82
39	0,68067841	0,77	5,82	0,62932	1,30	19,29	0,62932	19,92
40	0,6981317	0,79	6,07	0,642788	1,32	19,35	0,642788	20,00
41	0,71558499	0,80	6,32	0,656059	1,34	19,40	0,656059	20,05

42	0,73303829	0,82	6,58	0,669131	1,36	19,42	0,669131	20,09
43	0,75049158	0,84	6,83	0,681998	1,38	19,43	0,681998	20,11
44	0,76794487	0,85	7,09	0,694658	1,40	19,42	0,694658	20,11
45	0,78539816	0,87	7,35	0,707107	1,42	19,38	0,707107	20,09
46	0,80285146	0,88	7,60	0,71934	1,44	19,32	0,71934	20,04
47	0,82030475	0,90	7,86	0,731354	1,46	19,25	0,731354	19,98
48	0,83775804	0,91	8,11	0,743145	1,47	19,15	0,743145	19,89

Immerhin zeigte sich nun, dass die Wurfweite in der vorgegebenen Winkelbandbreite bei sonst identischen Bedingungen um mehr als 40 cm variiert. Allerdings wurde zu Recht bezweifelt, dass die Videoanalyse lediglich zur Winkelkontrolle eingesetzt wird.

Einbeziehung des Beschleunigungsweges

Einer der Schüler war selbst aktiver Leichtathlet und zudem im Leistungskurs Sport. Er nahm nun eine Expertenrolle in der Arbeitsgruppe ein. Er wies darauf hin, dass Videostudien meist als Technikkontrolle eingesetzt werden.

Nach längerer Diskussion wurde folgendes Grundmodell der Kugelstoßtechnik von allen Teilnehmern akzeptiert:

Der Angleitvorgang gibt dem Gesamtsystem Stoßer/Kugel eine Anfangsgeschwindigkeit v_1 und bereitet den eigentlichen Stoß vor. Bei diesem Stoß wird aus einer Kauerstellung heraus die Kugel linear bis zum Ausstoß von v_1 bis auf die Abwurfgeschwindigkeit v_0 weiter beschleunigt. Technikbilder bestätigten, dass dieser Beschleunigungsvorgang tatsächlich längs einer Geraden erfolgt. Bei guter Kugelstoßtechnik muss dieser Beschleunigungsweg möglichst lang sein, damit bei gleichem Krafteinsatz eine möglichst große Weite erreicht wird.

Es musste daher die Frage untersucht werden, welchen Einfluss ein längerer Beschleunigungsweg auf die Wurfweite hat.

Vereinfachend wurde angenommen, dass die auf die Kugel ausgeübte Kraft längs des Beschleunigungsweges annähernd konstant bleibt. Dann ergibt sich als Geschwindigkeitszuwachs

$$\Delta v = a \cdot t = \frac{F}{m} \cdot t$$

wobei m die Masse der Kugel ist. Ist b die Länge des Beschleunigungsweges und berücksichtigt man, dass $v_1 > 0$ m/s ist, so ergibt sich für die Zeitdauer t der Beschleunigung

$$t = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2ab}}{a}$$

und für die Zunahme der Geschwindigkeit

$$\Delta v = a \cdot t = -v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2ab} \quad .$$

Daraus erhält man für die Abstoßgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2bF}{m}} \quad .$$

A1 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2	Ist der Beschleunigungsweg b								
3									
4	und die Kraft längs dieses Beschleunigungsweges konstant, so ergibt sich für v_0								
5									
6		$v_0 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2bF}{m}}$							
7									
8									
9									
10									
11	Höhe h		1,8	m					
12	Armlänge a		1	m					
13	Kraft		294	N					
14	Länge Beschleunigungsweg		1,8	m					
15									
16	Anfangsgeschwindigkeit v0		12,14	m/s					
17		bei v1	1,3	m/s					
18									
19	Winkel	Bogenmaß	t_H	H	h_a	t_F	W	w_a	W_{eff}
20	35	0,610865238	0,71	4,95	0,57357644	1,22	19,00	0,57357644	19,58
21	36	0,628318531	0,73	5,20	0,58778525	1,24	19,15	0,58778525	19,74
22	37	0,645771823	0,75	5,45	0,60181502	1,27	19,28	0,60181502	19,88
23	38	0,663225116	0,76	5,70	0,61566148	1,29	19,39	0,61566148	20,00
24	39	0,680678408	0,78	5,96	0,62932039	1,31	19,47	0,62932039	20,10
25	40	0,698131701	0,80	6,22	0,64278761	1,33	19,54	0,64278761	20,19
26	41	0,715584993	0,81	6,48	0,65605903	1,35	19,59	0,65605903	20,25
27	42	0,733038286	0,83	6,74	0,66913061	1,37	19,62	0,66913061	20,29
28	43	0,750491578	0,85	7,00	0,68199836	1,39	19,63	0,68199836	20,31
29	44	0,767944871	0,86	7,26	0,69465837	1,41	19,61	0,69465837	20,31
30	45	0,785398163	0,88	7,52	0,70710678	1,43	19,58	0,70710678	20,28
31	46	0,802851456	0,89	7,79	0,7193398	1,45	19,52	0,7193398	20,24
32	47	0,820304748	0,91	8,05	0,7313537	1,47	19,44	0,7313537	20,17
33	48	0,837758041	0,92	8,31	0,74314483	1,49	19,34	0,74314483	20,09
34	49	0,855211333	0,94	8,57	0,75470958	1,51	19,23	0,75470958	19,98
35	50	0,872664626	0,95	8,83	0,76604444	1,53	19,09	0,76604444	19,85

Variiert man die Parameter, so erkennt man, dass bei gleichbleibender Kraft eine Verlängerung des Beschleunigungsweges um 10 cm eine Verbesserung der Stoßweite um etwa 45 cm bewirkt. Erhöht man darüber hinaus durch Training die Kraft um 5%, so kann die Stoßweite um etwa 40 cm verbessert werden.

Zusammenfassung

Zunächst lässt sich mithilfe der Videoauswertung die Anfangsgeschwindigkeit v_0 bestimmen, die im Folgenden bei allen quantitativen Betrachtungen benötigt wird.

Des Weiteren lässt sich der Ausstoßwinkel messen. Die Berechnung im ersten Abschnitt liefert den optimalen Ausstoßwinkel und damit evtl. Korrekturen.

Außerdem kann mit einer Videoauswertung die Länge des Beschleunigungsweges gemessen werden. Die Rechnung gibt Anhaltspunkte für mögliche Verbesserungen durch Optimierung der Technik.

Schließlich können in dem Modell auch Voraussagen über die Weitenverbesserungen bei Kraftzuwächsen gemacht werden.

Anmerkung

Den Schülerinnen und Schülern stand das Videoauswerteprogramm VIMPS nicht zur Verfügung (siehe beiliegende CD). Beschleunigungswerte und Geschwindigkeitswerte konnten daher nicht gemessen werden. Die in der Tabellenkalkulation verwendeten Werte wurden so gewählt, dass sich Stoßweiten um 20 m ergaben.

Kommentierte Beispiele

Handy-Tarife

Beim Kauf eines Handys mit Prepaid-Karte muss man nicht nur entscheiden, bei welchem Anbieter man ein Gerät kauft, sondern auch welcher Tarif am günstigsten ist.

Die Tabelle zeigt das Tarifangebot einer Handy-Marke. Abgerechnet wird jeweils im Sekundentakt. Die Angaben beziehen sich auf Inlandsverbindungen, die Kosten gelten für eine Gesprächsdauer von jeweils einer Minute in der Einheit Cent.

Gesprächsart und Zeitraum	Tarif K1**	Tarif K2	Tarif K3*
Gespräche zum Festnetz			
Werktags von 7 bis 18 Uhr	79 (29)	49	49 (19) [09]
Werktags von 18 bis 20 Uhr	79 (29)	29	49 (19) [09]
Werktags von 20 bis 7 Uhr	39 (19)	29	49 (19) [09]
Wochenende von Freitag 20 Uhr bis Sonntag 24 Uhr	09	29	49 (19) [09]
Gespräche innerhalb des Funknetzes des Anbieters			
von 7 bis 18 Uhr	39	49	49 (19) [09]
von 18 bis 20 Uhr	39	29	49 (19) [09]
von 20 bis 7 Uhr	19	29	49 (19) [09]
Wochenende	19	29	49 (19) [09]
Gespräche in andere Inlandfunknetze			
von 7 bis 18 Uhr	79	79	79
von 18 bis 20 Uhr	79	49	49
von 20 bis 7 Uhr	49	49	49
Wochenende	49	49	49
Das Versenden einer Kurznachricht (SMS) kostet zu jeder Uhrzeit in Funknetze oder ins Festnetz 19 Cent.			

*) Der Preis (19) gilt ab der 5. Minute, der Preis [09] gilt ab der 10. Minute.

**) Der Preis (29) bzw. (19) gilt für eine vorher festgelegte Lieblingsnummer im Festnetz.

In den Telefonladen kommen 3 Kunden.

Kunde A: Schüler (14 Jahre)
Er telefoniert nachmittags öfter mit Freunden oder von der Schule nach Hause. Außerdem verschickt er viele SMS.

Kunde B: Handelsvertreter und Familienvater
Er benutzt sein Handy als Autotelefon. Er vereinbart Kundentermine und führt Gespräche mit der Familie.

Kunde C: Schülerin (17 Jahre)
Sie führt in erster Linie Gespräche in ihrer Freizeit die länger andauern. Außerdem verschickt sie viele SMS.

1. Aufgabe: Der Verkäufer soll die Kunden bedarfsgerecht beraten.

2. Aufgabe: Neben Prepaid-Karten-Mobiltelefonen gibt es auch Mobiltelefone mit Vertrag. Der gleiche Anbieter wie oben hat auch hier 3 verschiedene Tarife für Vertragstelefone. Neben den Gesprächsgebühren fallen hier auch noch eine monatliche Grundgebühr und evtl. ein monatlicher Mindestumsatz an. Abgerechnet wird jeweils im Sekundentakt. Die Angaben beziehen sich auf Inlandsverbindungen, die Kosten gelten für eine Gesprächsdauer von jeweils einer Minute in der Einheit Cent.

Gesprächsart und Zeitraum	Tarif V1	Tarif V2*	Tarif V3
Monatliche Grundgebühr	495	995	2995
Monatlicher Mindestumsatz	500	-	-
Gespräche zum Festnetz			
Werktags von 7 bis 18 Uhr	49	49 (19)	15
Werktags von 18 bis 7 Uhr	19	19	15
Wochenende von			
Gespräche innerhalb des Funknetzes des Anbieters			
von 7 bis 18 Uhr	39	29	15
von 18 bis 7 Uhr	19	19	15

*) Der Preis (19) gilt für eine vorher festgelegte Lieblingsnummer im Festnetz.

Für Gespräche zu fremden inländischen Funknetzen gelten ähnliche Verhältnisse.
Das Versenden von SMS kostet in allen Tarifen zu jedem Zeitpunkt jeweils 19 Cent.

Der Verkäufer soll die drei Kunden beraten und auf die Vorzüge gegenüber einem Prepaid-Handy hinweisen.

1. Handy-Tarife
   (Welcher Tarif ist bei einem bestimmten Telefonverhalten am günstigsten?)
2. Aus einer großen Datenmenge (Angabe eines Prospekts) müssen die relevanten Informationen entnommen werden. Für drei unterschiedliche Personen ist mit gesundem Menschenverstand ein Telefonprofil zu entwerfen. Dabei sind nur die relativen Häufigkeiten von Belang.
   Für Aufgabe 1 ist lediglich der mittlere Minutenpreis für jeden Kunden zu berechnen. In Aufgabe 2 ist auch die tatsächliche Anzahl der Gesprächsminuten pro Monat von Bedeutung. Auch diese Zahl ist von den Schülern zu schätzen. Lineare Funktionen (teilweise abschnittsweise definiert) sind ein sinnvolles Hilfsmittel zur Beschreibung.
3. Taschenrechner, bzw. ein Tabellenkalkulationsprogramm und evtl. die unten aufgeführte Tabelle.
4. Ab Klasse 9, die Aufgabe ist aufgrund ihrer Komplexität auch in der SII anspruchsvoll. Kenntnisse im Umgang mit Mittelwerten und linearen Funktionen. Der Zeitaufwand beträgt mindestens 5 Unterrichtstunden. Gruppenarbeit mit etwa 3 Schülern pro Gruppe.
5. Das Festlegen der Telefonprofile für die einzelnen Kunden ist für Schüler ungewohnt.. Die unten aufgeführte Tabelle kann den Schülern als Hilfsmittel nach einer gewissen Einarbeitungszeit zur Verfügung gestellt werden. Die erzielten Lösungen hängen natürlich von den gewählten Telefonprofilen ab.

Lösungshilfe

Du musst für jeden Kunden ein mögliches Telefonverhalten annehmen. Verteile dazu für jeden Kunden 100 Gesprächsminuten auf das folgende Feld. (Beachte die Bemerkungen zu jedem der drei Kunden.)

Uhrzeit		Festnetz				Funknetz (gleicher Anbieter)		
Gesprächsdauer		< 5 min	≥ 5 min	≥10 min	Davon zur Nr.1	< 5 min	≥ 5 min	≥10 min
Werktags	7 bis 18 Uhr							
	18 bis 20 Uhr							
	20 bis 7 Uhr							
Wochenende und am Feiertag								

Mögliche Lösungen

Aufgabe 1:

Für den Kunden A wurde das folgende Profil angenommen (Angaben in Prozent)

Uhrzeit		Festnetz				Funknetz (gleicher Anbieter)		
Gesprächsdauer		< 5 min	≥ 5 min	≥10 min	Davon zur Nr.1	< 5 min	≥ 5 min	≥10 min
Werktags	7 bis 18 Uhr	20	1		3			
	18 bis 20 Uhr	25	2	1		2		
	20 bis 7 Uhr	25		2		3		
Wochenende und am Feiertag		15	2	2				

Daraus lässt sich zu jedem Tarif ein mittlerer Minutenpreis errechnen:
Nach Tarif K1
$P_1 = (46 \cdot 79 + 3 \cdot 29 + 27 \cdot 39 + 19 \cdot 9 + 2 \cdot 39 + 3 \cdot 19) : 100 = 50{,}8$
Nach Tarif K2 $P_2 = 33{,}2$, Nach Tarif K3 $P_3 = 43{,}25$
Damit ist Kunden A zu raten, Tarif 2 zu wählen.

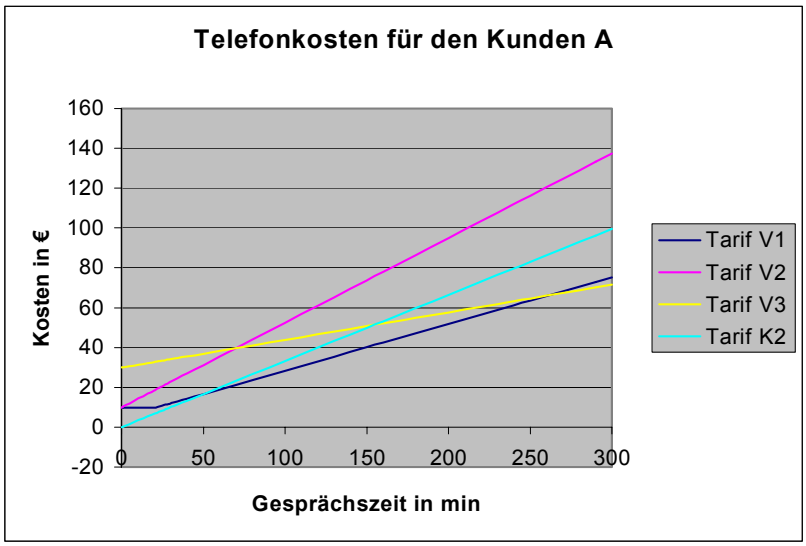
Aufgabe 2:

Für jeden Kunden werden die Graphen der Zuordnung
Gesprächszeit t (pro Monat) → *Gesamtkosten* gezeichnet.

Beispiel: Kunde A
Für Tarif V1 gilt: $t \to 995$ für $t < 21{,}4$ und $t \to 23{,}4 \cdot t + 495$, für $t \geq 21{,}4$
Für Tarif V2 gilt: $t \to 42{,}5 \cdot t + 995$
Für Tarif V3 gilt: $t \to 13{,}86 \cdot t + 2995$

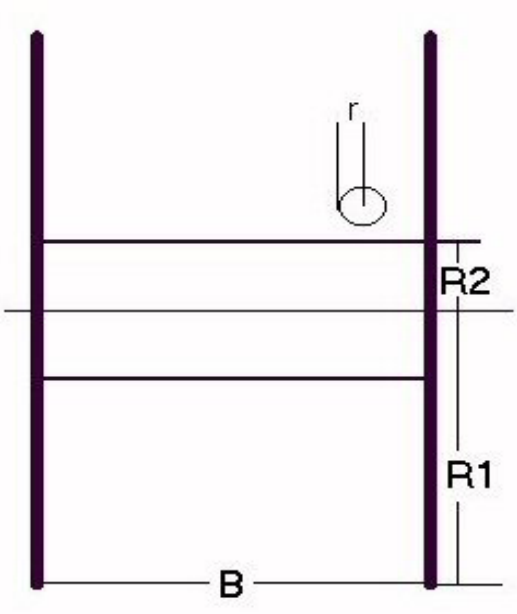
Empfehlung für Kunde A:

Telefoniert er im Monat weniger als 60 Minuten, so ist der Tarif K2 für ihn die beste Lösung. Telefoniert er mehr, so ist für ihn der Tarif V1 besser. Erst wenn er mehr als 3 Stunden im Monat telefoniert ist Tarif V3 günstiger.



Kabeltrommel

Kabeltrommel mit Kabel



Leere Kabeltrommel

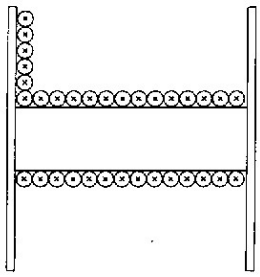
Die abgebildete Kabeltrommel hat folgende Abmessungen:

Flanschradius:	R1 = 62,5 cm
Wickelkernradius:	R2 = 25 cm
Kabelradius:	r = 0,85 cm
Wickelbreite:	B = 71,5 cm

1. Thema: Kabeltrommel
   (Wie viel Meter Kabel passen auf eine Kabeltrommel?)
2. Ausgehend von einem Foto einer Kabeltrommel mit den angegebenen Abmessungen kann die Kabellänge grob abgeschätzt werden. Die Berechnung der Kabellänge kann unter Verwendung verschiedener Modelle wie z.B. Kreis-, Helix- oder Volumen-Modell erfolgen. Die Herleitung einer allgemein gültigen Formel über das Kreis-Modell kann als weiterführende Betrachtung angehängt werden. Eine selbstgebaute Kabeltrommel liefert sehr viele Informationen bei der Modellentwicklung.
3. Zum Bau einer Kabeltrommel sind eine Papprolle, 2 Bierdeckel und eine dicke Schnur erforderlich; für die Berechnungen ist ein Tabellenkalkulationsprogramm hilfreich.
4. Ab 10. Klasse
   Kenntnisse über Berechnungen am Kreis, Satz des Pythagoras, Volumen eines Zylinders, Summe der ersten n ungeraden Zahlen Zeitbedarf: 5 Unterrichtsstunden (Gruppenarbeit)
5. Die Schüler erkennen sehr schnell das Kreise- sowie das Helix-Modell, wobei im Helix-Modell ein gutes räumliches Vorstellungsvermögen für die konkrete Berechnung über den Satz des Pythagoras gefordert ist. Manchmal ist der Hinweis notwendig, für die Berechnung der Kabellänge die Bahn der Mittelpunkte der Kabelquerschnittsflächen zu benutzen. Das Volumen- Modell wird i.a. von den Schülern nicht direkt erkannt. Das nicht realisierbare Helix-Modell auf Lücke führt zu regen Diskussionen. Alle genannten Modelle liefern brauchbare sich kaum unterscheidende Ergebnisse.
6. Eine ausführliche Darstellung findet man in „mathematik lehren“/ Heft 113 Seite 48ff.

Lösungsmöglichkeiten:

1. Modell: Kreise



Anstelle der eigentlich aneinander anschließenden Kabelwicklungen werden einzelne, getrennte Kreise betrachtet.

Für das Modell „Kreise“ gilt:

1. Anzahl der Kabelkreise nebeneinander: $\frac{B}{2r} = \frac{71,5}{1,7} = 42,06$

2. Anzahl der Lagen, die auf die Trommel passen: $\frac{R_1 - R_2}{2r} = \frac{62,5\,cm - 25\,cm}{1,7\,cm} = 22,06$

3. Kreisradius der 1. Lage: $r_1 = R_2 + r$

4. Länge des Kabels für einen Kreisring in der 1. Lage: $2\pi r_1$

5. Gesamtlänge des Kabels für die 1. Lage: $2\pi r_1 \cdot 42$

2. Lage: $2\pi r_2 \cdot 42$

...

n-te Lage: $2\pi r_n \cdot 42$

2. Modell: Kreise in einer Formel

Das Modell „Kreise“ liefert sicherlich eine vernünftige Abschätzung der Kabellänge für ein Kabel, das auf einer Trommel aufgewickelt ist.

Verwendet man zur Durchführung der Rechnungen keine Tabellenkalkulation, so müsste man für jede „neue“ Kabeltrommel alle Berechnungen noch einmal manuell durchführen.

Die Berechnung der Kabellänge lässt sich aber auch in einer einfachen Formel fassen:

Für die Radien der einzelnen Lagen gilt:

$r_1 = R_2 + r;\ r_2 = R_2 + 3r;\ r_3 = R_2 + 5r;$ ... , also $r_i = R_2 + (2i-1) \cdot r$ für i = 1,...,n

Für die Länge eines Kabels mit m Kreisen in jeder Lage und n Kabellagen gilt nun:

$$L = 2\pi \cdot m \cdot (R_2 + r) + 2\pi \cdot m \cdot (R_2 + 3r) + ... + 2\pi \cdot m \cdot [R_2 + (2n-1) \cdot r]$$

$$= 2\pi \cdot m \cdot [(R_2 + r) + (R_2 + 3r) + ... + (R_2 + (2n-1) \cdot r)]$$

$$= 2\pi \cdot m \cdot [n \cdot R_2 + r \cdot (1 + 3 + 5 + ... + (2n-1))]$$

$$= 2\pi \cdot m \cdot [n \cdot R_2 + r \cdot n^2]$$

$$= 2\pi \cdot m \cdot n \cdot [R_2 + r \cdot n]$$

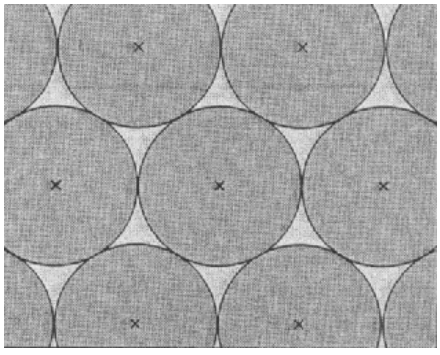
Für die betrachtete Kabeltrommel ergibt sich damit:

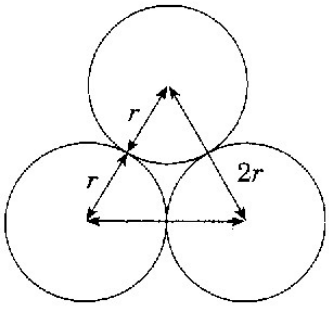
$$L = 2\pi \cdot 42 \cdot 22 \cdot (0,25 + 0,0085 \cdot 22)m$$

$$= 2537m$$

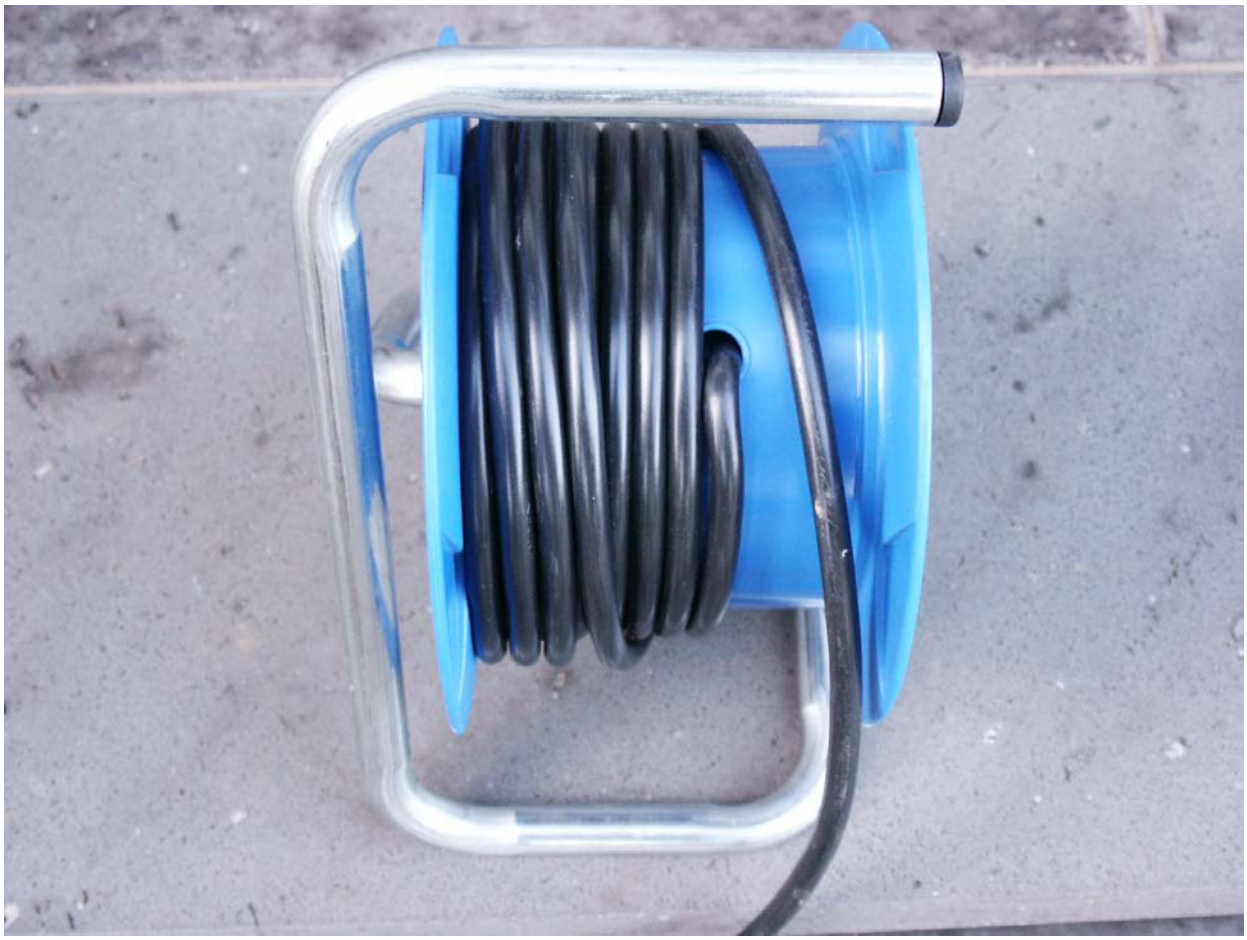
3. Modell: Lücke

Idee: Das Kabel wird im Schraubenlinie-Modell auf Lücke gewickelt.





Dieses Modell ist in der Realität nicht durchführbar: Wird die 1. Lage nach links gewickelt, dann muss die 2. Lage zwangsläufig nach rechts gewickelt werden. Damit bleibt das Kabel nicht in der Lücke!

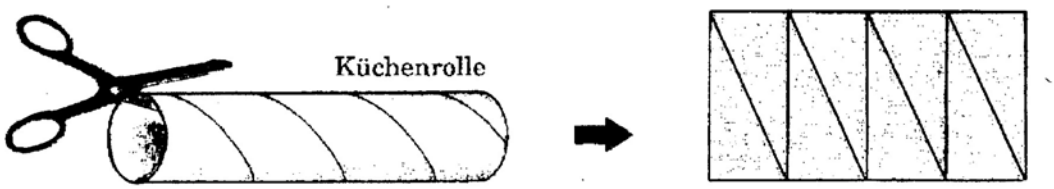


4. Modell: Schraubenlinie (Helix)

Die Aufwicklung des Kabels beschreibt in Wirklichkeit eine Schraubenlinie.

Idee: Zur Berechnung der Bogenlänge einer Schraubenlinie wird der Wickelkern-Mantel abgerollt (Küchenpapierrolle aufschneiden). Man erkennt den Zusammenhang zwischen der Schraubenlinie im Raum und den rechtwinkligen Dreiecken in der Ebene. Dabei entspricht die Länge der Hypotenuse der gesuchten Kabellänge.

Die Länge der Hypotenuse entspricht der Kabellänge einer Wicklung und kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.



Die Kabellänge im Kreise- und im Schraubenlinien-Modell wird auf dem folgenden Tabellenblatt berechnet.

Dabei werden in der ersten Tabelle die verwendeten Formeln und in der zweiten die Ergebnisse gezeigt:

	A	B	C	D	F	G
1	**Die Kabeltrommel mit den angegeben Abmessungen**					
2						
3	**Kreise-Modell**				**Helix-Modell**	
4	r=0,85cm	1,7				
5	R1=25cm	Radien	Kreisringlänge	Lagelänge	Diagonalenlänge	Lagelänge
6	Kreise: 42	25,85	=6,283*B6	=42*C6	=WURZEL(C6^2+$B$4^2)	=42*F6
7		=B6+$B$4	=6,283*B7	=42*C7	=WURZEL(C7^2+$B$4^2)	=42*F7
8		=B7+$B$4	=6,283*B8	=42*C8	=WURZEL(C8^2+$B$4^2)	=42*F8
9		=B8+$B$4	=6,283*B9	=42*C9	=WURZEL(C9^2+$B$4^2)	=42*F9
10		=B9+$B$4	=6,283*B10	=42*C10	=WURZEL(C10^2+$B$4^2)	=42*F10
11		=B10+$B$4	=6,283*B11	=42*C11	=WURZEL(C11^2+$B$4^2)	=42*F11
12		=B11+$B$4	=6,283*B12	=42*C12	=WURZEL(C12^2+$B$4^2)	=42*F12
13		=B12+$B$4	=6,283*B13	=42*C13	=WURZEL(C13^2+$B$4^2)	=42*F13
14		=B13+$B$4	=6,283*B14	=42*C14	=WURZEL(C14^2+$B$4^2)	=42*F14
15		=B14+$B$4	=6,283*B15	=42*C15	=WURZEL(C15^2+$B$4^2)	=42*F15
16		=B15+$B$4	=6,283*B16	=42*C16	=WURZEL(C16^2+$B$4^2)	=42*F16
17		=B16+$B$4	=6,283*B17	=42*C17	=WURZEL(C17^2+$B$4^2)	=42*F17
18		=B17+$B$4	=6,283*B18	=42*C18	=WURZEL(C18^2+$B$4^2)	=42*F18
19		=B18+$B$4	=6,283*B19	=42*C19	=WURZEL(C19^2+$B$4^2)	=42*F19
20		=B19+$B$4	=6,283*B20	=42*C20	=WURZEL(C20^2+$B$4^2)	=42*F20
21		=B20+$B$4	=6,283*B21	=42*C21	=WURZEL(C21^2+$B$4^2)	=42*F21
22		=B21+$B$4	=6,283*B22	=42*C22	=WURZEL(C22^2+$B$4^2)	=42*F22
23		=B22+$B$4	=6,283*B23	=42*C23	=WURZEL(C23^2+$B$4^2)	=42*F23
24		=B23+$B$4	=6,283*B24	=42*C24	=WURZEL(C24^2+$B$4^2)	=42*F24
25		=B24+$B$4	=6,283*B25	=42*C25	=WURZEL(C25^2+$B$4^2)	=42*F25
26		=B25+$B$4	=6,283*B26	=42*C26	=WURZEL(C26^2+$B$4^2)	=42*F26
27		=B26+$B$4	=6,283*B27	=42*C27	=WURZEL(C27^2+$B$4^2)	=42*F27
28						
29						
30						
31			**Gesamtlänge:**	=SUMME(D6:D27)		=SUMME(G6:G27)
32						
33						

	A	B	C	D	F	G
1	**Die Kabeltrommel mit den angegeben Abmessungen**					
2						
3	**Kreise-Modell**				**Helix-Modell**	
4	r=0,85cm	1,7				
5	R1=25cm	Radien	Kreisringlänge	Lagelänge	Diagonalenlänge	Lagelänge
6	Kreise: 42	25,85	162,41555	6821,4531	162,4244467	6821,826761
7		27,55	173,09665	7270,0593	173,1049977	7270,409905
8		29,25	183,77775	7718,6655	183,7856126	7718,995729
9		30,95	194,45885	8167,2717	194,4662807	8167,583791
10		32,65	205,13995	8615,8779	205,1469939	8616,173742
11		34,35	215,82105	9064,4841	215,8277453	9064,766301
12		36,05	226,50215	9513,0903	226,5085295	9513,358241
13		37,75	237,18325	9961,6965	237,1893423	9961,952375
14		39,45	247,86435	10410,3027	247,8701797	10410,54755
15		41,15	258,54545	10858,9089	258,5510389	10859,14363
16		42,85	269,22655	11307,5151	269,2319172	11307,74052
17		44,55	279,90765	11756,1213	279,9128124	11756,33812
18		46,25	290,58875	12204,7275	290,5937226	12204,93635
19		47,95	301,26985	12653,3337	301,2746463	12653,53515
20		49,65	311,95095	13101,9399	311,9555821	13102,13445
21		51,35	322,63205	13550,5461	322,6365288	13550,73421
22		53,05	333,31315	13999,1523	333,3174852	13999,33438
23		54,75	343,99425	14447,7585	343,9984506	14447,93493
24		56,45	354,67535	14896,3647	354,6794241	14896,53581
25		58,15	365,35645	15344,9709	365,360405	15345,13701
26		59,85	376,03755	15793,5771	376,0413927	15793,73849
27		61,55	386,71865	16242,1833	386,7223865	16242,34024
28						
29						
30						
31			**Gesamtlänge:**	253700,0004		253705,1967
32						
33						

5. Modell: Volumen

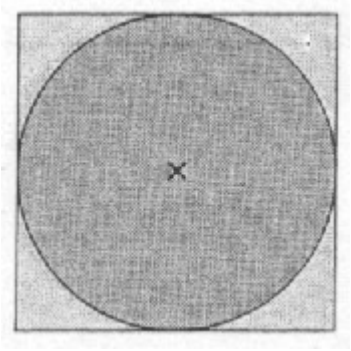
Idee: Das Kabel mit der Querschnittsfläche A und der Länge x nimmt das Volumen

$V = A \cdot x$ ein.

$x_{\max} = \frac{V_{\max}}{A}$ mit $V_{\max} = (0,625^2 - 0,25^2) \cdot \pi \cdot 0,715 m^3 = 0,737 m^3$ und

$A = 0,0085^2 \cdot \pi m^2 = 0,000227 m^2$ ==> $x_{\max} = 3247 m$

Verfeinerung des Modells:



Die Lücken zwischen den Kabelwicklungen werden berücksichtigt:

Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 2r:

$A_{Qu} = 4 \cdot r^2 = 4 \cdot 0,0085^2 m^2 = 0,000289 m^2$

==> $x_{Qu\,\max} = \frac{V_{\max}}{A_{Qu}} = 2550 m$

6. Kabeltrommel selbstgebaut

Es ist ohne großen Aufwand möglich, eine Kabeltrommel zu bauen. Daran kann man dann durch Wickeln eines Seils die rechnerisch erzielten Ergebnisse kontrollieren. Insbesondere lässt sich bereits mit wenigen Lagen erkennen, dass das Modell Lücke nicht möglich ist.

Eine Bastelanleitung sowie einen möglichen Unterrichtsverlauf findet man in „mathematik lehren“ /Heft 113.

Ariane 5

Ursprünglich wurde Ariane 5 als eine von drei Komponenten für den Einstieg Europas in die bemannte Raumfahrt entwickelt. Die anderen Komponenten waren der Raumgleiter Hermes und das Raumlabor Columbus. Beides waren die geplanten Nutzlasten für die Ariane 5.

Wesentliches Ziel war es, den bemannten Raumgleiter Hermes in eine erdnahe Bahn zu transportieren, also nicht, wie bei Ariane 4, Satelliten in eine stationäre Erdumlaufbahn. Obwohl nun Ariane 5 vornehmlich dieses tun wird, weil Hermes inzwischen gestrichen wurde, merkt man der Konstruktion der Rakete noch heute die ursprüngliche Bestimmung an. Hermes sollte nur einen erdnahen Orbit erreichen und hätte dazu nur die ersten beiden Stufen von Ariane 5 benötigt, denn die Geschwindigkeit für einen derartigen Orbit beträgt 7700 m/s anstatt 10200 m/s. Man suchte also nach einer Rakete, die möglichst große Nutzlasten in einen erdnahen Orbit transportieren konnte. Damit die Rakete außerdem Ariane 4 als Transportmittel für geostationäre Satelliten ablösen konnte, wurde zusätzlich eine optionale Oberstufe integriert.

Ariane 5 - die Rakete

Ariane 5 ähnelt in ihrem Aussehen mehr der Energija, dem Space Shuttle oder der Titan 4. Sie hat auch einen ähnlichen Aufbau wie diese Raketen und besteht daher aus einer Hauptstufe, an die zwei Feststoffbooster angeflanscht sind, sowie einer Oberstufe. Die beiden Feststoffbooster erzeugen 90 % des Startschubs und machen den größten Teil der Masse aus. Die Hauptstufe verwendet als Treibstoff Wasserstoff. Sie bringt den größten Teil der Geschwindigkeit auf. Die (optionale) Oberstufe ist dagegen klein und liegt innerhalb des Instrumentenrings. Sie kann bei erdnahen Missionen weggelassen werden. Wie bei Ariane 1 bis 4 trägt Frankreich 46 % der Entwicklungskosten. Die Stufen haben daher auch französische Abkürzungen.

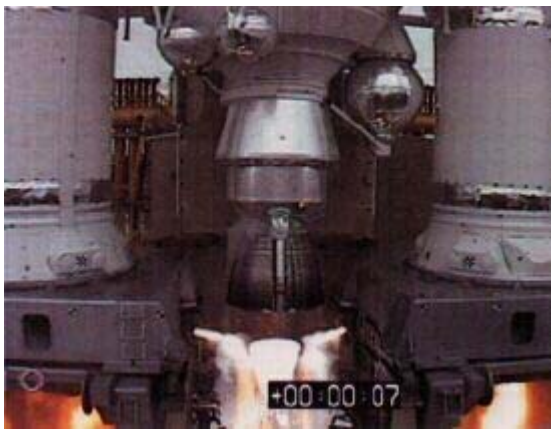
Die Zusatzbooster (EAP)

EAP: Ètage aux Acceleration á Poudre (Beschleunigungsstufe aus Pulver). Die Zusatzbooster erbringen den Großteil des Startschubs. Sie bestehen aus drei Segmenten, wovon zwei lang sind (107 t Treibstoff) und eines kurz (22,5 t). Zwei dieser Booster liefern 90 % des Startschubs und werden nach dem Ausbrennen abgesprengt. Die Zusatzbooster entsprechen dem modernsten Stand der Technik. Sie sind leicht gebaut und preiswert. Es ist unwirtschaftlich, sie zu bergen und wiederzuverwenden, obwohl regelmäßig einige Booster geborgen werden, um Qualitätskontrollen durchzuführen.

Man hat bei der Konzeption der Booster aus dem Challenger Unglück gelernt und verwendet zwischen den Segmenten Dichtungen die nicht "durchbrennen" können.

Der Schubverlauf ist so konzipiert, dass die Rakete beim Start den maximalen Schub entwickelt, der dann langsam absinkt und ab 90 s konstant 4000 kN pro Booster beträgt. Damit durchwandert die Rakete die dichten Atmosphärenschichten sehr schnell, was Luftreibung vermeidet und so Treibstoff spart.

Die Hauptstufe EPC



EPC ist die Abkürzung von Ètage Principal Cryotechnique (Kryogene Hauptstufe). Der Großteil der Beschleunigung erfolgt durch die kryogene Hauptstufe, die mit Wasserstoff als Treibstoff arbeitet. Ein einzelnes Triebwerk vom 120 t Schub treibt die Rakete an und ermöglicht ihr eine lange Brennzeit von über 605 Sekunden. Die Hauptstufe wird am Boden 7 s vor den Feststoffboostern gezündet und auf Funktion geprüft, erst dann erfolgt das Zünden der Feststoffbooster und damit der Start. Eine Fehlfunktion eines Triebwerks zeigt sich oft schon beim Hochlaufen. Der Start erfolgt nur, wenn alle Parameter im Normbereich sind. Weiterhin wurde die Zahl der Triebwerke gegenüber der Ariane 4 stark reduziert. Während dort bis zu 8 Starttriebwerke verwendet werden, sind es bei der Ariane 5 nur drei. Auch damit sinkt die Fehleranfälligkeit.

Das Raketentriebwerk Vulcain verbrennt Wasserstoff mit Sauerstoff im Nebenstromverfahren, d.h. ein Teil des Wasserstoffs wird benötigt um die Turbinen anzutreiben und den Antrieb zu kühlen. Dieser Anteil kann nicht genutzt werden. Dafür ist die Rakete wesentlich preiswerter als die japanische H-2 herzustellen, die nach dem Hauptstromverfahren arbeitet, welches diese Verluste vermeidet. Die Entwicklung von Vulcain 2 alleine kostete 9 Mrd. französische Franc. Es hat eine Höhe von 3 m, einen maximalen Durchmesser von 1,76 m und wiegt 1685 kg. Pro Sekunde verbraucht es 265 kg Treibstoff, 600 l Wasserstoff muss die Turbopumpe mit 24010 upm und 12 MW Leistung fördern, die Sauerstoffpumpe hat nur 3,65 MW Leistung und 12635 upm, da das Volumen wesentlich kleiner ist (380 m³ Wasserstoff und 120 m³ Sauerstoff).

Wenn auch das Triebwerk Vulcain technologisch nicht so anspruchsvoll wie das SSME ist, so ist die Stufe als ganzes extrem leicht gebaut und hat eine Leermasse von nur 12 t. Die Wasserstofftanks haben nur eine Wandstärke von 1,3 mm, die Sauerstofftanks eine von 4,7 mm. Wie bei der Atlas Trägerrakete kann die Rakete unbefüllt daher nur aufgestellt werden, wenn die Tanks unter Druck (durch Helium) gesetzt werden, sonst würden sie kollabieren.

Eine Besonderheit muss hier erwähnt werden. Ariane 5 ist "untermotorisiert". Damit ist gemeint, dass, wenn die Booster nach 130 s abgetrennt werden, die Rakete noch eine Masse von 156 t bis 162 t hat, das Triebwerk aber nur 115 t Schub liefert. Die Rakete "lebt" also von der starken Startbeschleunigung der Feststoffbooster.

Die Oberstufe EPS

EPS: Ètage aux Propulsives Storables (Stufe aus lagerfähigen Treibstoffen). Die Oberstufe wird nur für Missionen über einen niedrigen Erdorbit hinaus benötigt. Ariane 5 ist für niedrige Erdorbit Flüge genau so konzipiert wie der Shuttle: Die Hauptstufe bringt die Geschwindigkeit für den Orbit auf, sie wird nach der Abtrennung so ausgerichtet, dass sie, ähnlich dem Shuttle-Tank, in einem weitem Bogen über dem Pazifik vor der Küste Ecuadors verglüht. Für diesen Orbit ist die Ariane 5 optimiert und daher nimmt sich die Oberstufe EPS, die für geostationäre Flüge verwendet wird, klein aus. Sie sitzt innerhalb der Bordelektronik, die wiederum in einem Ring auf der Hauptstufe sitzt. Dadurch verringert sich die Leermasse der EPS und man kann für den Start mit oder ohne Oberstufe das gleiche elektrische Subsystem verwenden.

Wie bei der Hauptstufe wurde Sicherheit groß geschrieben. Die EPS verwendet, wie auch die Ariane 4 in den ersten beiden Stufen, eine Treibstoffmischung Monomethylhydrazin (3,2 t) und

Stickstofftetroxid (6,5 t). Diese Treibstoffe werden durch Druck gefördert, d. h. fehleranfällige Pumpen werden überflüssig. Zudem ist keine Zündung notwendig, da sie sich bei Kontakt spontan entzünden.
Deutschland ist Hauptauftragnehmer für die EPS. Daneben werden bei MAN noch die Boostergehäuse sowie der Startturm ELA-3 gefertigt.

Einige technische Daten der Ariane 5:

Ariane 502 -
erster erfolgreicher Start

Feststoffbooster :
Vollmasse : 268,7 t
Leermasse : 33,2 t
Schub: maximal 6709 kN,
durchschnittlich 4984 kN
Verbrennungsdruck 61,34 bar
Brennzeit 129 s
Länge : 30 m
Durchmesser : 3,03 m
spez. Impuls : 2701 m/s (in Vakuum)

Hauptstufe :
Vollmasse : 170,30 t
Leermasse : 12,19 t
Schub (Vulcain) 1180 kN
Brennzeit 594 s
Länge 30,5 m
Durchmesser 5,4 m
spez. Impuls : 4240 m/s (in Vakuum)
Treibstoff : H_2 (25 t) + O_2 (130 t)

Oberstufe :
Vollmasse: 10,94 t
Leermasse: 1,24 t
Schub (AESTUS) : 29 kN
Brennzeit: 1100 s
Länge: 3,4 m
Durchmesser: 3,96 m
spez. Impuls : 3178 m/s
Treibstoff : N_2O_4 / MNH

Instrumenteneinheit :
Masse : 1400 kg
Durchmesser 5,4 m
Höhe 1,56 m

Nutzlastverkleidung :
Durchmesser 5,4 m
kurz : 12,7 m 2027 kg
lang : 17 m 2900 kg

Nutzlast :
20,5 t 200 km 7 °
18 t 400 km 51,6 ° (ISS)
10 t 800 km 99,8 ° (Sonnensynchron)
6,82 t (GTO)

16 Flüge:
13 erfolgreich,
2 Teilerfolge,
1 Fehlstart

Zuverlässigkeit:
87,5 %
(Stand 1.10.2003)

Anmerkung zu den technischen Daten

Wer sich etwas intensiver mit Raketen befasst, wird bald feststellen, dass technische Angaben je nach Quelle etwas unterschiedlich sind. Das hat vielfältige Ursachen: Es gibt Unterschiede zwischen den projektierten Angaben und den erreichten, außerdem werden oft kleinere Änderungen durchgeführt. Hier sind die am häufigsten genannten Daten oder deren Mittelwerte aufgeführt. Für Ariane 4 und 5 gibt es sehr gute Informationen unter der Internetadresse http://www.arianespace.com.

(Aus: „http:://www.bernd-leitenberger.de/text/ariane5.html“)

1. Ariane 5 (Modellierung des Flugs einer mehrstufigen Rakete)
2. Aus einem Text und angefügten Daten müssen die relevanten Informationen entnommen werden.
3. Tabellenkalkulationsprogramm oder Modellierungssoftware.
4. Ab Klasse 11
   Die Aufgabe ist recht anspruchsvoll. Kenntnisse: Rekursive Folgen (oder Differentialgleichungen), Impulserhaltungssatz und Gravitationsgesetz. Der Zeitaufwand beträgt auch bei einer vereinfachten Beschreibung mindestens 3 Unterrichtstunden.
5. Bei Gruppenarbeit sollte in jeder Gruppe mindestens ein Schüler mit entsprechenden Physikkenntnissen sein. Am Anfang können alle Gruppen parallel an einem ersten einfachen Modell arbeiten, sollten sich aber immer wieder gegenseitig über den Stand der Bearbeitung informieren. Bei der Verbesserung des Modells kann arbeitsteilig verfahren werden, wobei eine Gruppe nach verwertbaren Kontrolldaten suchen kann.
6. Literatur: H.-M. Fischer: Europas Trägerrakete Ariane,
   Stedinger Verlag Lemwerder, ISBN 3-927 697-32-X

Das Problem wurde in einem Leistungskurs Mathematik der Jahrgangsstufe 11 in den letzten drei Stunden vor den Weihnachtsferien bearbeitet. Etwas mehr als die Hälfte des Kurses hatte einen Physikkurs belegt. Anlass zu den Betrachtungen waren Fragen von Schülern zu einem Pressebericht über einen missglückten Start der Ariane 5.

Recherchen im Internet lieferten Informationen, die in etwa dem Inhalt der Seiten 55 bis 57 entsprechen.

Da die technischen Daten keine Aussagen über Flughöhen, Geschwindigkeiten usw. enthielten, kamen schnell Fragen auf wie:

- Wie wird die Rakete mit den Boostern beschleunigt?
- In welcher Höhe werden die Booster abgesprengt?
- Wie hoch fliegt die Rakete mit der Hauptstufe?
- Wie hängen diese Höhen von der Nutzlast ab?

Die Schüler modellierten in zwei Unterrichtsstunden und in den Hausaufgaben den ersten Teil des Fluges wie folgt:

Vereinfachtes Modell

Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit. Unter dem spezifischen Impuls versteht man daher die Geschwindigkeit des Treibstoffgases eines Raketentriebwerks.

In der Zeit Δt wird die Treibstoffmenge Δm mit der Geschwindigkeit v_T aus dem Triebwerk ausgestoßen. Im Schwerpunktsystem gilt daher nach der Zeit Δt:

$$\Delta m \cdot v_T = m_R \cdot \Delta v \qquad \text{(Impulserhaltungssatz)}$$

Daraus ergibt sich als Geschwindigkeitszuwachs

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m_R} v_T$$

Dieser Geschwindigkeitszuwachs wird jedoch durch die Gravitation verringert.

In einem ersten Versuch reduzierten die Schülerinnen und Schüler die Geschwindigkeit um g·Δt. Daraus ergeben sich die Rekursionen

$$v_R(t+\Delta t) = v_R(t) + \frac{\Delta m}{m_R(t)} v_T - g \cdot \Delta t$$
$$m_R(t+\Delta t) = m_R(t) - \Delta m$$

In dem Zeitintervall Δt gewinnt die Rakete die zusätzliche Höhe

$$\Delta h = \frac{v_R(t+\Delta t) + v_R(t)}{2} \cdot \Delta t$$

Eine entsprechende Umsetzung mithilfe einer Tabellenkalkulation brachte folgende Ergebnisse:

Bei einem Startgewicht von 742,5 t sind die Booster in einer Höhe von 64,2 km ausgebrannt. Die Ariane hat zu diesem Zeitpunkt eine Geschwindigkeit von 1440 m/s, und wird gegen Brennschluss mit etwa 26 m/s² beschleunigt. Es war deutlich spürbar, dass die Schülerinnen und Schüler diese Ergebnisse mit einiger Skepsis betrachteten. Ihr Modell schien ihnen zu einfach.

Nach längerem Suchen im Internet fand ein Schüler den Hinweis, dass die Ariane 5 mit den Boostern eine Höhe von 59,8 km erreicht. Das stark vereinfachte Modell hatte also ein durchaus brauchbares Ergebnis geliefert. Der Ehrgeiz war nun geweckt und es wurden Vorschläge zur Verbesserung des Modells gemacht.

Abnahme der Gravitationskraft mit zunehmender Höhe

Zunächst wurde berücksichtigt, dass die Erdbeschleunigung mit wachsender Höhe geringer wird. Für den Geschwindigkeitszuwachs ergibt sich bei dieser genaueren Betrachtung

$$\Delta v = \frac{\Delta m}{m_R} v_T - \frac{\gamma \cdot m_E}{(r_E + h)^2} \Delta t$$

wobei m_R die Masse der Rakete ist, h die Höhe über dem Startpunkt, m_E die Masse der Erde, r_E der Erdradius, γ die Gravitationskonstante und v_R die Geschwindigkeit der Rakete. In der Zeit Δt verringert die Rakete ihre Masse des ausströmenden Gases Δm. War die Geschwindigkeit der Rakete vorher v_R, so ergeben sich

$$v_R(t+\Delta t) = v_R(t) + \Delta v = v_R(t) + \frac{\Delta m}{m_R(t)} v_T - \frac{\gamma \cdot m_E}{(r_E + h)^2} \Delta t$$
$$m_R(t+\Delta t) = m_R(t) - \Delta m$$

als Iterationsgleichungen, die als Ergebnis eine Flughöhe von 64,5 km liefern. Einige Schülerwaren zunächst enttäuscht, als man feststellte, dass dieses Ergebnis stärker vom recherchierten Wert abweicht als das erste. In der Diskussion sahen sie jedoch schnell ein, dass das auch zu erwarten war.

Berücksichtigung der Hauptstufe:

Glücklicherweise wurde bald eine weitere Ergänzung des Modells vorgeschlagen: Die Rakete wird schon in der Startphase zusätzlich durch die Hauptstufe beschleunigt, die Höhe vor dem Absprengen der Booster wird also noch größer sein. Da der Impuls durch die Hauptstufe in die gleiche Richtung geht, wurde der Geschwindigkeitszuwachs durch die Hauptstufe einfach dazu addiert.

Die Umsetzung dieser Idee mithilfe der Tabellenkalkulation sah wie folgt aus:

	A	B	C	D	E
1	$v_{T\ Booster}$	2701	m/s	$v_{T\ Hauptstufe}$	4240
2	m_R	722,5	t		
3	Nutzlast	18	t	Δm Booster	=B5/130*B4
4	Δt	0,5	s	Δm Hauptstufe	=(170,3-12,2)/605*B4
5	m_T	471	t	Δm	=E3+E4
6				Gravitationskonstante	0,00000000006673
7	t	m(t)	v	h	a
8	0	=B2+B3	0	0	
9	=A8+B$4	=B8-E$5	=C8+$E$3/B8*$B$1+$E$4/B8*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D8+(C8+C9)/2*$B$4	=(C9-C8)/$B$4
10	=A9+B$4	=B9-E$5	=C9+$E$3/B9*$B$1+$E$4/B9*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D9+(C9+C10)/2*$B$4	=(C10-C9)/$B$4
11	=A10+B$4	=B10-E$5	=C10+$E$3/B10*$B$1+$E$4/B10*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D10+(C10+C11)/2*$B$4	=(C11-C10)/$B$4
12	=A11+B$4	=B11-E$5	=C11+$E$3/B11*$B$1+$E$4/B11*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D11+(C11+C12)/2*$B$4	=(C12-C11)/$B$4
13	=A12+B$4	=B12-E$5	=C12+$E$3/B12*$B$1+$E$4/B12*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D12+(C12+C13)/2*$B$4	=(C13-C12)/$B$4
14	=A13+B$4	=B13-E$5	=C13+$E$3/B13*$B$1+$E$4/B13*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D13+(C13+C14)/2*$B$4	=(C14-C13)/$B$4
15	=A14+B$4	=B14-E$5	=C14+$E$3/B14*$B$1+$E$4/B14*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D14+(C14+C15)/2*$B$4	=(C15-C14)/$B$4
16	=A15+B$4	=B15-E$5	=C15+$E$3/B15*$B$1+$E$4/B15*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D15+(C15+C16)/2*$B$4	=(C16-C15)/$B$4
17	=A16+B$4	=B16-E$5	=C16+$E$3/B16*$B$1+$E$4/B16*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D16+(C16+C17)/2*$B$4	=(C17-C16)/$B$4
18	=A17+B$4	=B17-E$5	=C17+$E$3/B17*$B$1+$E$4/B17*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D17+(C17+C18)/2*$B$4	=(C18-C17)/$B$4
19	=A18+B$4	=B18-E$5	=C18+$E$3/B18*$B$1+$E$4/B18*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D18+(C18+C19)/2*$B$4	=(C19-C18)/$B$4
20	=A19+B$4	=B19-E$5	=C19+$E$3/B19*$B$1+$E$4/B19*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D19+(C19+C20)/2*$B$4	=(C20-C19)/$B$4
21	=A20+B$4	=B20-E$5	=C20+$E$3/B20*$B$1+$E$4/B20*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D20+(C20+C21)/2*$B$4	=(C21-C20)/$B$4
22	=A21+B$4	=B21-E$5	=C21+$E$3/B21*$B$1+$E$4/B21*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D21+(C21+C22)/2*$B$4	=(C22-C21)/$B$4
23	=A22+B$4	=B22-E$5	=C22+$E$3/B22*$B$1+$E$4/B22*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D22+(C22+C23)/2*$B$4	=(C23-C22)/$B$4
24	=A23+B$4	=B23-E$5	=C23+$E$3/B23*$B$1+$E$4/B23*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D23+(C23+C24)/2*$B$4	=(C24-C23)/$B$4
25	=A24+B$4	=B24-E$5	=C24+$E$3/B24*$B$1+$E$4/B24*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D24+(C24+C25)/2*$B$4	=(C25-C24)/$B$4
26	=A25+B$4	=B25-E$5	=C25+$E$3/B25*$B$1+$E$4/B25*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D25+(C25+C26)/2*$B$4	=(C26-C25)/$B$4
27	=A26+B$4	=B26-E$5	=C26+$E$3/B26*$B$1+$E$4/B26*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D26+(C26+C27)/2*$B$4	=(C27-C26)/$B$4
28	=A27+B$4	=B27-E$5	=C27+$E$3/B27*$B$1+$E$4/B27*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D27+(C27+C28)/2*$B$4	=(C28-C27)/$B$4
29	=A28+B$4	=B28-E$5	=C28+$E$3/B28*$B$1+$E$4/B28*$E$1-$E$6*5,97E+24/(6378000^2)*$B$4	=D28+(C28+C29)/2*$B$4	=(C29-C28)/$B$4

Die mit den Boostern erreichte Höhe betrug in diesem Modell 86,5 km, die Geschwindigkeit in dieser Höhe betrug 1929 m/s und die Beschleunigung bis zu 36 m/s².

Parallel dazu wurde von einer anderen Gruppe der Antrieb der Rakete mit der Hauptstufe nach Absprengen der Booster modelliert.

	A	B	C	D	E	F	G
1	v_T	4240	m/s				
2	m_R	169,13	t				
3	Δt	1	s				
4	m_T	158,11	t	Δm	0,26133884	t	
5							
6	t	m(t) in t	v in m/s	h in m	a in m/s²		
7	130	169,13	1923,75	86398,20			
8	131	168,87	1920,51	88320,32	-3,242		
9	132	168,61	1917,28	90239,22	-3,231		
10	133	168,34	1914,05	92154,88	-3,221		
11	134	168,08	1910,84	94067,33	-3,211		
12	135	167,82	1907,64	95976,57	-3,201		
13	136	167,56	1904,45	97882,62	-3,191		
14	137	167,30	1901,27	99785,48	-3,180		
15	138	167,04	1898,10	101685,17	-3,170		
16	139	166,78	1894,94	103581,69	-3,160		
17	140	166,51	1891,79	105475,05	-3,149		
18	141	166,25	1888,65	107365,28	-3,139		
19	142	165,99	1885,53	109252,37	-3,128		

Zur Freude der Teilnehmer zeigte sich, dass die Beschleunigung zunächst negativ ist, genau wie das wegen der „Untermotorisierung“ zu erwarten war (vgl. „Hauptstufe“, S. 56, letzter Abschnitt).

Die Absprenghöhe der Booster wich zwar nun doch erheblich von der im Internet gefundenen Kontrollhöhe von 59,8 km ab, die Schülerinnen und Schüler waren sich wegen der sonstigen Übereinstimmungen aber nun ziemlich sicher, dass ihr gewähltes Modell grundsätzlich richtig ist und suchten nach Erklärungen für diese Abweichung.

Weitere Verbesserungen

Es schloss sich eine Diskussion an, in deren Verlauf folgende Erklärungsansätze für die Abweichung angegeben wurden:

- Der spezifische Impuls ist jeweils für Vakuum angegeben (siehe technische Daten). Die Ausströmgeschwindigkeit ist aber in der Atmosphäre sicher kleiner.
- Für die Turbopumpen in der Hauptstufe wird ein Teil des Brennstoffs benötigt. Damit verringert sich der Schub des Haupttriebwerks (siehe Seite 56).
- Gerade in den unteren Luftschichten gibt es erhebliche Geschwindigkeitsverluste durch den Luftwiderstand (Abmessungen siehe technische Daten).

Für den Einbau dieser Erklärungsansätze in das Modell stand nur noch 1 Stunde zur Verfügung. Da die Schüler auf Anhieb keinen Modellierungsansatz fanden, wurden die Verluste nach längerer Diskussion mit plausiblen Annahmen auf 10% bis 25% geschätzt. Der pro Sekunde für den Antrieb zur Verfügung stehende Treibstoff wurde entsprechend reduziert. Der zugehörige Parameter wurde so variiert, dass die erreichte Höhe 59,8 km betrug. Dieser Wert stellte sich ein, wenn die durchschnittlichen Verluste in den ersten 130 Sekunden 15,7% betragen. Dieses Ergebnis liegt durchaus in dem vermuteten Bereich.

Weitere Anmerkungen:

1. In dem Kurs waren schon mehrfach einfache mathematische Modellierungen bearbeitet worden. Außerdem wurden wenige Wochen vorher rekursive Folgen und Anwendungen im Unterricht behandelt.
2. Zu den Begriffen „Schub“ (Gasgeschwindigkeit mal Massestrom) und „spezifischer Impuls“ (Impuls pro Masse) wurden Informationen aus Physikbüchern bereit gestellt (vgl. technische Daten, S. 57).
3. Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten nicht nur während der drei Unterrichtsstunden an dem Problem, sondern z.T. mit erheblichem Zeitaufwand auch in ihrer Freizeit.
4. Zwei Schüler beschäftigten sich weiter mit dem Problem und versuchten, den Luftwiderstand zu berücksichtigen. Dabei gingen sie davon aus, dass der Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit wächst und nahmen die Widerstandsbeiwerte für Halbkugeln in ihre Rechnung auf. Den Luftdruck beschrieben sie mithilfe der barometrischen Höhenformel. Mit dieser für Schulverhältnisse anspruchsvollen Modellierung kamen die Schüler auf eine Höhe von etwa 65 km.

Auf eine Anfrage hin erhielten die Autoren dieses Heftes von der EADS Space GmbH einen Bericht, in dem die Ergebnisse zweier professioneller Simulationsprogramme verglichen werden. Dieser Bericht macht deutlich, dass Modellbildung und Simulation in aktuellen Forschungsgebieten angewandt wird und enthält außerdem eine Menge von Daten und Hinweisen, die zu weiteren Verbesserungen des Modells und zur Kontrolle der Ergebnisse verwendet werden können.

Der Text ist auf den nächsten Seiten im englischen Original abgedruckt. Einige Hinweise zu den Vokabeln finden sich am Ende des Textes.

Comparison of the two SW Tools for Optimal Launcher Ascent Trajectory Calculation, Skynav and Salto

1. Objective

This report deals with the comparison of Skynav and Salto w.r.t. the use / preparation of input data, the applied models and their impact to the result, the achievable maximum payload as well as the shape of the ascent trajectory.

The Ariane 5 with the ESC-B upper stage for a standard GTO mission was taken for the comparison.

2. General description of the SW

SKYNAV is a software optimizing the ascent trajectory from various launch sites to various orbits for different types of launchers, supporting - and that is its main purpose - the design of launchers w.r.t. staging, thrust, impact of “structural” masses and sensitivities.
SKYNAV performs:

- the integration of the physical relations applicable during the ascent phase
- solves the boundary problem, e.g. the launcher meets exactly its target point / orbit necessary to keep the obtained results comparable for the evaluation of changes of the launcher parameters
- optimizes the ascent trajectory by the so called Hamilton-Lagrange theory
  The thrust direction (and in specific cases coasting times = phases without thrust) are optimized to obtain the maximum payload
  SKYNAV works on the principle of a reference ascent trajectory and only small changes to get a new one in its vicinity. However as a run takes less than 10 s a performance graph for the variation of one parameter can be obtained within a few minutes.

SKYNAV can be used for different tandem or parallel staged launchers, inclusive air launch. As a design tool it makes use of some simplifications:

- the earth is a sphere with an undisturbed spherical central force field
- the atmospheric density follows an e-function
- aerodynamic drag allows only an approximation by means of 5 values
- special restrictions can not be applied, for example
  an artificial stage refall of the AR5 EPC (which happens “automatically” by use of the ESC-B) the perigee of argument for GTO is set to 180°
  heat load restrictions above 100 km
- it needs a lift limitation, which may not be zero, resulting in a small (but not zero) angle of attack - the number of parameters is limited, but allows in most cases sufficient variations for the design and its evaluation
- for some masses which are released permanently during a stage boost phase some tricks have to be applied

The following restrictions can not be considered:
No heat flux limitation
No “controlled” stage refall (only applicable for AR5 with not optimized upper stage)
No orbits with inclinations below the geographical latitude of the launch site (no "dog leg” maneuvers)
As practice has shown in about more than 100 applications not the simplifications are the limiting factor but the input data, which are in most cases not sufficiently available or in different ways defined. For example the dry mass of a stage is not its burn end mass, which however is required.

Salto

Salto is a simplified software dedicated to optimization and trajectory computation of aunchers.
The trajectory optimization is performed using an optimization software working under nonlinear constraints. Launcher definition and mission description inputs allow for trajectory computation and performance assessment very close to real cases.
Trajectory generation is based on a simplified, but still accurate, methodology. This methodology consists of :

- a quasi-analytical formulation during the atmospheric flight,
- a step-by-step trajectory propagation (with propulsive DV steps of 50 m/s) using a Keplerian formulation for ex-atmospheric flight.

This approach leads to fast convergence and satisfactory trajectory representativeness.
The use of the Salto software happens to be quite simple for the user thanks to :

-a simple straightforward description of the launcher architecture and characteristics and of the mission,

-the use of robust initialisation and convergence methods for the optimization, - the automatic generation of additional parameters and constraints, - numerical analysis of the solution optimality.

3. Ariane 5 with ESC-B Input Data for the calculation

Launch Site:

Kourou
Longitude -52.7686
Latitude 5.240

Launch Pad Altitude 0.000 km
Air density Model (applied in Skynav)
Values between are calculated by an e-function

Altitude (km)	Rho (kg/m³)
Sea level	1.225000
3	0.909121
11	0.363918
20	0.0880347
30	0.0180119
40	0.0051022
50	0.0012239

Final Orbit: GTO

Perigee 200 km
Apogee 35914 km at payload separation (considers earth potential disturbance and equals 35785 km really achieved) Inclination -7° in Skynav the minus sign menas towards the equatorial plane Argument of perigee -178° (considers drift due to earth potential till satellite apogee boost) -180° (fixed in Skynav))

Booster stage

Mass at ignition = 554348 kg As propellant: 475897 kg (integral versus product of mass flow and time of burning plus 2 * 1669.3 kg as “ejected inert” leading to a reduction of the spec. impulse, consumption over 130.7 s EAP burn time total propellant mass: 479236 kg

Burn end Mass = 75112 kg

Mass Flow (kg/s) including 7 permille for ejected inert

time (s) duration	till	nominal 1 booster	2 boosters	2 boosters with ejected inert	spec. impulse
24.278	24.278	2449.4	4898.8	4933.190	282.0
37.04	61.318	1841.45	3682.90	3708.754	279.0
58.35	119.668	1858.66	3717.32	3743.416	273.2
11.03	130.698	165.18	330.36	332.679	271.0

Skynav has only 2 thrust switching points where the mass flow can be changed abruptly. The final phase has been taken to reduce the mass flow in a polynom such to achieve the 130.7 s total EAP burn time.

Jet Velocity (spec. impulse)

In vacuum: nominal: 279.0 s = 2736.055 m/s; with consideration of ejected inert => 2716.982 m/s. This value has been arbitrary taken as 100% respectively 1.000. The other spec. impulses are considered in relation to this with 1.011 for 282 s, 0.979 for 273.2 s and 0.971 for 271 s.

Sea level: Skynav can not calculate the sea level thrust via the nozzle parameters. It needs a representative “sea level jet velocity”. This has been assessed by the vacuum thrust value as product of the jet velocity and the mass flow minus the product of sea level atmospheric pressure and the nozzle area at nozzle end, which then is divided by the mass flow. This procedure is not difficult for the EPC Vulcain engine, due to the constant mass flow, but is not so easy for the Boosters due to the variable mass flow and in addition, the variable spec. impulse. Therefore for this assessment the average (vacuum) thrust over the whole booster burn time has been considered, leading to a value of 2455.5 m/s at sea level. The values during the atmospheric ascent phase are calculated by using the air density. The aerodynamic drag is dedicated to the composite of boosters and first stage. Skynav allows only the use of 3 values, the maximum, here at mach 1.1 with 1.0939, the value 0.6778 at mach = 0 and 0.3065 at infinite velocity. The exact arithmetic middle between these values are here at 0.967 mach and 2.458 mach. The reference area is 23.345 m², though the real cross section area of the EPC with the two boosters is 37.5 m². The phase of the vertical ascent takes in Skynav 5 s and can not be elongated seriously.

EPC Core Stage

Mass at ignition = 188275 kg

considers 169936 kg of usable propellants, 169706 kg for the nominal burn with constant mass flow (318.187 kg/s * 533.35 s =169706 kg and 230 kg with a low spec. impulse (137 s) during thrust decay.

Burn end Mass: 18339 kg. Considers the dry mass as well as all residuals and the 135 kg inert mass ejected, here taken till stage burn end.

The mass flow is constant with 318.187 kg/s for 533.35 s. As Skynav does not allow a further abrupt change of the mass flow the thrust decay (phase of 6 s) together with the coasting phase during the ignition of the ESC-A the 230 kg for the thrust decay have been taken to determine a constant mass flow over 13 s.

Jet Velocity: 433.66s = 4252.752 m/s in vacuum

A nozzle area of 3.63 m² has been considered to obtain 3111.913 m/s on sea level. Aerodynamic drag: though of low importance a constant value of 5 m² is dedicated to the EPS stage as product of the real cross section area and the high mach resistance value.

Upper stage ESC-A

The burn end mass is without SPELTRA, but considers all residuals and reserve, except the 159 kg “ejected” mass, as it is not known how they are consumed. If they are the propellant of the pre-acceleration rocket it would be better to consider it by the EPC stage burn end mass. Burn end mass: 6105 kg.

With a usable propellant mass of 24515 kg the mass at ignition is 30620 kg.

The VINCI engine has a thrust of 154 KN with a spec. impulse of 464s = 4550.286 m/s.

Fairing

Mass: 1951 kg Released at: 208.17 s

Others

Maximum Aerodynamic Lift: While the Ariane Launcher is following a gravity turn with no angle of attack during the flight in atmosphere Skynav considers / follows the maximum of the aero-dynamic lift, leading to a small angle of attack. This representative figure, in the dimension of a pressure, takes the dynamic pressure (considered for the air drag) multiplied with the sinus of the angle of attack and is limited here by 100 N/m². To come as close as possible to the real gravity turn this value has been reduced to 59 N/m², the lowest limit Skynav still works.

4. Identification of Differences between Skynav and Salto

With the before mentioned values the AR5 with the ESC-B on top has been launched into the GTO with the following results along the following ascent trajectories:

Software	Parameter	Launch	Thrust-	Switching-	Points	After Booster Sep.
Salto	Time since	0.0	24.28	61.32	119.67	130.70
Skynav	take off (s)	0.0	24.28	61.32	N/A	130.70
Salto	Altitude (km)	0.0	2.328	13.577	50.398	59.8
Skynav		0.0	2.302	13.426	48.435	57.4
Salto	Abs. velocity	463.2	549.3	887.9	2301.1	2352.4
Skynav	(m/s)	461.9	548.2	887.5	2256.3	2374.3
Salto	Position (°)	-52.8 / 5.24	-52.8 / 5.24	-52.5 / 5.24	-52.3 / 5.24	-52.1 / 5.24
Skynav	Longit / Latit	-52.8 / 5.24	-52.8 / 5.24	-52.7 5.23	-52.3 / 5.19	-52.1 / 5.17
Salto	Beta angle	90	76.8	52.2	27.9	25.4
Skynav	(local)	90	76.8	51.2	28.7	31.2
Salto	Masses (kg)	787078	659800	510654	273692	191144
Skynav	after Separat.	787134	660446	512235	280161	191198
Salto	Thrust (KN)	13114.7	13569.2	11048.0	11311.2	1353.2
Skynav		13116.9	13463.2	11085.2	6992.4 *)	1353.0
Salto	Acceleration	16.66	20.07	20.28	41.28	7.08
Skynav	(m/s²)	16.66	20.38	21.64	24.96 *)	7.08
Salto	Dynamic	0.0	20808	33142	1732	1
Skynav	Pressure	0.0	20763	33693	2567	0

*) Thrust Decay can be modeled in Skynav only 00 as a polygon

Table: *Performance calculations of the AR5-ESC-B launcher Comparison between Salto and Skynav,* 1st part

Software	Parameter	After Fairing Sep.	EPC thrust decay	EPC burn end	ESC-B full thrust	ESC-B burn end	other
Salto	Time since	208.17	533.35	539.4	546.35	1270.7	
Skynav	take off (s)	208.17	533.35	N/A	546.35	1270.7	
Salto	Altitude	110.6	150.6	151.6	152.7	292.6	Argum. of
Skynav	(km)	105.6	139.1	140.2	141.3	332.1	Perigee (°)
Salto	Abs.	2708.3	6442.1	6445.4	6443.8	10156.2	- 178
Skynav	velocity (m/s)	2740.3	6475.7	6475.7	6477.4	10124.3	- 180
Salto	Position (°)	-50.7 / 5.21	-40.1 / 4.43	-39.7 / 4.39	-39.4 / 4.36	8.3 / -1.54	EPC Re-
Skynav	Longit / Latit	-50.7 / 5.03	-39.9 / 3.92	-39.6 / 3.88	-39.3 / 3.84	8.4 / -2.10	-20.3 / 1.6
Salto	Beta angle	32.9	21.2	21.1		-4.1	Apogee
Skynav	(°) local	33.2	21.3	21.2	21.0	-0.5	
Salto	Masses (kg)	164544	61074	60843	42503	17988	35785
Skynav		164598	61129	61023	42560	18045	35914
Salto	Thrust (KN)	1353.2	1353.2	0	154.0	154.0	Crossing
Skynav		1353.2	1353.2	23.8 **)	154.0	154.0	the equa- 8.09°
Salto	Acceleration	8.22	22.16	0	??	8.56	
Skynav	(m/s²)	8.22	22.14	0.39 **)	3.62	8.53	
Salto	Dynamic	0	0	0	0	0	
Skynav	Pressure	0	0	0	0	0	

**) due to the modeling in Skynav

Table cont´d: *Performance calculations of the AR5-ESC-B launcher Comparison between Salto and Skynav,* 2nd part

5. Evaluation

a) The burn end mass at the end of the launch phase will be the best parameter for the comparison and evaluation of the launcher performance respectively the SW for the ascent trajectory calculation. It is the sum of the mass of the final stage and the real payload and independent of the presently only assumable stage´s final mass. As pointed out Skynav comes to a 57 kg higher burn end mass. This are, according to the mass at burn end, about 0.3 %.

The difference in the lift limitation leads to an increase of the payload with increasing lift limit in the order of about 40 kg for 100 N/m² for Skynav.

In Skynav the rotation velocity of the earth is a little bit too small (1.3 m/s) and the considered GTO apogee is a little bit higher. Both facts would increase the payload of Skynav in comparison with Salto. The remaining difference has to do with the modelling of the thrust mass flow profile, the air drag (simplification to 3 values in Skynav) and the different air densities, effecting the air drag force and thrust engines performance. b) The shape of the ascent trajectory is different between the two SW tools.

In Skynav the “Beta”-angle of the rocket thrust axis against the local horizontal is smaller at the beginning of the ascent, leading to a lower altitude but greater velocity for a given point of time. This has to do with the "limitation" of the “maximum aerodynamic lift” in Skynav. The different

angle of the argument of perigee leads for Skynav (only 180° possible) to a perigee nearer to the launch site, shortening the ascent trajectory. The Skynav trajectory goes faster to the equator (compare geographical latitude) and crosses the equator earlier, at -8.09° (west) longitude. Therefore in Skynav the altitude at burn end - following the elliptical ascent arc - is more increasing above the southern hemisphere as at this time the rocket is farer away from the perigee compared with position of the perigee in Salto (argument of perigee of - 178°).

Accuracies

As in all numerical processes an “epsilon” for the accuracy is defined to stop the calculation process. The remaining inaccuracy of the payload optimization process can not directly be determined, but various calculation with Skynav along different ways show, that the difference in payload is far below 1 kg or far below 0.1 percent. The accuracy in achieving the target orbit can be checked in Skynav directly for some parameters. Targets for a GTO are the altitudes of perigee and apogee and the inclination as well as the argument of perigee. The inclination achieved is exactly the required while the apogee altitude in this example is about 15 km below the target value. Numerical inaccuracies of the integration process were not found.

Vokabelangaben zu Ariane 5

SW	software
w.r.t. (with respect to)	in Hinblick auf
payload	Nutzlast
GTO	Geostationärer Transferorbit, Zwischenbahn zum Orbit (36 000km)
e.g. (example given)	zum Beispiel
thrust	Schub
stage	Stufe
artificial stage refall / artificial return trajectory	künstliche Absturzbahn (eine Besonderheit der Ariane 5, damit die EPC nicht bereits in eine Umlaufbahn gerät, sondern gezielt (künstlich) abstürzt
perigee	Perigäum, Erdnähe
apogee	Apogäum, Erdferne
heat load	Wärmebelastung
nozzle	Düse
gravity turn	Bahnkrümmung, die durch die Gravitation hervorgerufen wird
dog leg	Bögen, die die Rakete fliegen kann, wenn ihre Kapazität nicht voll ausgelastet ist. (Voll ausgelastete Raketen fliegen auf Kreisen, die den Erdmittelpunkt enthalten.)
lift	Effekt, der sich als Biegung der Rakete durch Seitenwind auswirkt

Kostenfunktionen

In Produktionsbetrieben fallen unter anderem Kosten für Löhne und Gehälter, für Maschinen, Ersatzteile und Material, für Strom und andere Energieformen sowie für Verwaltung und Vertrieb an. Eine Aufgabe der Betriebsleitung ist es, einen Finanzplan zu erstellen und Verkaufspreise festzulegen. Dazu werden Informationen über die Produktionskosten benötigt.

In den Wirtschaftswissenschaften sucht man daher nach sogenannten Kostenfunktionen, die den Zusammenhang zwischen der monatlichen Produktionsmenge in Produktionseinheiten und den zugehörigen Produktionskosten in € beschreiben.

Beispiele für Produktionseinheiten:

100 kg Brot bei einer Großbäckerei; 1 t Getreide bei einem Bauern;

1000 Blüten bei einer Tulpenzüchterei; 1000 Rollen Tapete.

Betriebsleiter können anhand der Verkaufsunterlagen und der bezahlten Rechnungen für den aktuellen Betriebsablauf ein Wertepaar der Produktionskostenfunktion angeben. Außerdem haben sie in der Regel ein gutes Gespür dafür, ob „der Laden rund läuft". D. h. sie können ungefähr angeben, ob bei kleinen Änderungen der Produktionsmenge, die Kosten mehr oder weniger stark schwanken. Auch die Fixkosten, die auch dann noch anfallen, wenn nichts mehr produziert wird, können recht genau angegeben werden.

Aufgabe 1

1.1 Bestimme eine Kostenfunktion, die zu folgenden Angaben eines Betriebsleiters passt:

- Unsere Fixkosten betragen monatlich rund 25 k€.
- Bei einer Produktionsmenge von durchschnittlich 42 t im Monat ist keine Abteilung überlastet, aber alle Mitarbeiter haben genügend zu tun. Schwankungen der Produktionsmenge bis zu 3 t beeinflussen die Kosten nur unwesentlich. Diese liegen bei ca. 400 k€.

1.2 Nimm an, dass deine Lösung zu 1.1 den Kostenverlauf ziemlich genau beschreibt und beantworte die Fragen des Betriebsleiters.

- Ab welcher Produktionsmenge wird rentabel produziert?
- Bis zu welcher monatlichen Menge kann die Produktion ohne Kostenexplosion gesteigert werden?
- Wie hoch sind die Stückkosten (Produktionskosten je Produktionseinheit) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge?
- Wie hoch sind die Grenzkosten (Kosten für die Produktion einer weiteren Produktionseinheit) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge?

1.3 Begründe, warum die Stück- und die Grenzkosten für die Betriebsleitung interessant sind.

1.4 Welche Fragen würdest du stellen, wenn du den Betrieb leiten würdest?
Beantworte die Fragen mithilfe deiner Kostenfunktion.

Aufgabe 2

Vielleicht gibt es im Bekanntenkreis deiner Eltern einen Handwerksmeister oder eine Geschäftsführerin.

2.1 Welche Fragen musst du stellen, um genügend Informationen für die Bestimmung einer Kostenfunktion zu bekommen?

2.2 Beschaffe dir Informationen zu einem Produktionsbetrieb und bestimme eine Kostenfunktion.

Hinweis: Stelle dich darauf ein, dass deine Fragen nicht so konkret beantwortet werden, wie du es gerne möchtest. Frage in diesem Fall, welche Informationen deine Gesprächspartnerin zur Beurteilung der betrieblichen Situation heranzieht.

2.3 Präsentiere deine Lösung zu 1.2 dem Handwerksmeister oder der Geschäftsführerin und prüfe, wie genau sie den realen Daten entspricht.

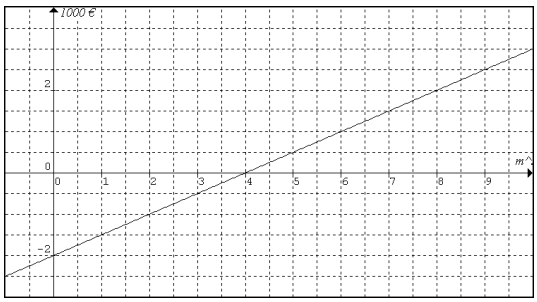
2.4 Überarbeite deine Lösung zu 1.2 mithilfe der neu gewonnen Informationen.

1. Kostenfunktionen
   (Gesucht ist die Kostenfunktion eines Handwerks- oder Produktionsbetriebs sowie deren Interpretation.)
2. Die Schülerinnen und Schüler sollen bei einem Betrieb Informationen sammeln, eine Kostenfunktion bestimmen und aus ihr betriebswirtschaftlich interessante Ergebnisse gewinnen.
3. Taschenrechner, eventuell Internetzugang und ein Programm zur Darstellung von Funktionsgraphen, betriebswirtschaftliche Grundkenntnisse (s. „Aufgaben zur Erarbeitung der Eigenschaften von Kostenfunktionen“)
4. Ab 11/2
   Bestimmung ganzrationaler Funktionen, Ableitung, einfache lineare Gleichungssysteme. Der Zeitaufwand beträgt ca. 5 Unterrichtsstunden.
5. Mithilfe der Angaben wird eine ganzrationale Funktionen dritten Grades k bestimmt, die als Näherung für die tatsächlich Kostenfunktion dient. Die Stückkosten werden durch $\frac{k(x)}{x}$ und die Grenzkosten durch k´(x) beschrieben.
   Die Schülerinnen und Schüler entwerfen einen Fragebogen, mit dessen Hilfe sie in einem Betrieb Informationen sammeln, um das Modell auf einen weiteren Datensatz anzuwenden.
6. Da die wenigsten Jugendlichen in ihrem unmittelbaren Umfeld mit betriebswirtschaftlichen Problemstellungen zu tun haben, sind die Fragen zur Kostenfunktion auf dem Arbeitsblatt ausformuliert. Selbstverständlich wäre es auch in diesem Sachzusammenhang wünschenswert, dass die Schülerinnen und Schüler eigene Fragen stellen.

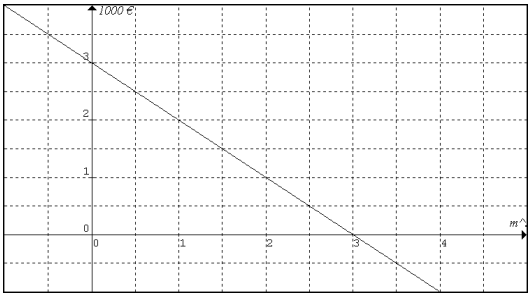
Aufgaben zur Erarbeitung der Eigenschaften von Kostenfunktionen

Ohne Kenntnis der Grundbegriffe der Betriebswirtschaftslehre und der Eigenschaften von Kostenfunktionen können obige Aufgaben nicht gelöst werden. Daher empfiehlt es sich, die Schülerinnen und Schüler mithilfe geeigneter Übungen in das Themengebiet einzuführen. Dazu können folgende Aufgaben dienen.

3. Begründe ausführlich, warum die Graphen in Figur 1 bis Figur 4 nicht zur Kostenfunktion eines Produktionsbetriebes gehören können.

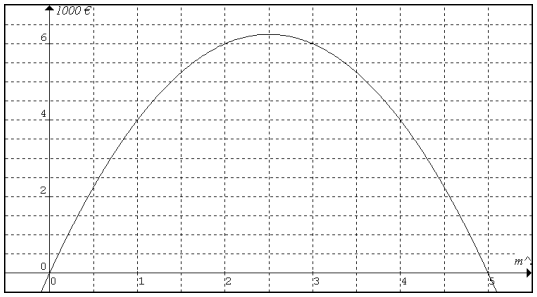


Figur 1



Figur 2

Figur 3



Figur 4

4. Überlege, wie der Graph einer Kostenfunktion verlaufen könnte.

4.1 Argumentiere mithilfe von Begriffen wie Anschaffungskosten, Lohnkosten, Krankenstand, Materialkosten, Fixkosten, Reparaturkosten, Überstundentarif usw. und skizziere den Graphen.

4.2 Welche mathematischen Eigenschaften muss eine Kostenfunktion besitzen?

4.3 Gib eine sinnvolle Definitionsmenge an.

5. In den Wirtschaftswissenschaften werden Kostenfunktionen durch möglichst einfache ganzrationale Funktionen angenähert.

5.1 Welchen Grad kann eine ganzrationale Funktion haben, deren Graph annähernd so verläuft, wie es deiner Lösung zu 4.1 entspricht?

5.2 Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion mit möglichst niedrigem Grad, deren Graph annähernd so verläuft, wie es deiner Lösung zu 4.1 entspricht.

Zeichne den zugehörigen Graphen in das Koordinatensystem aus 4.1 und bestimme die größte absolute und prozentuale Abweichung.

6. In den Wirtschaftswissenschaften nähert man Kostenfunktionen in der Regel mithilfe von ganzrationalen Funktionen dritten Grades an.

In vielen Fällen ist diese Näherung ziemlich grob. Suche nach Gründen dafür, dass sich die Wirtschaftswissenschaftler und Betriebsleiter dennoch mit solchen Funktionen zufrieden geben.

Lösungsvorschläge

1.1 1. Lösungsvorschlag:

Ansatz: $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a > 0$

Die Angaben des Produktionsleitern führen zu den Gleichungen

I $k(0) = 0$ <=> $d = 25$

II $k(42) = 400$ <=> $74088a + 1764b + 42c + d = 400$

III $k''(42) = 0$ <=> $252a + 2b = 0$

IV $k'(42) = 0$ <=> $5292a + 84b + c = 0$

Aus I – IV ergibt sich die Kostenfunktion zu

$k(x) = 0{,}00506\,x^3 - 0{,}63776\,x^2 + 26{,}78571\,x + 25$; $D = [0; 70]$ (x in t, k(x) in k€).

2. Lösungsvorschlag (Variante des 1. Lösungsvorschlages)

Ansatz: $k(x) = a(x-b)^3 + c$; $a > 0$

In diesem Ansatz ist schon enthalten, dass die Wendetangente waagrecht verläuft.

Man erhält die gleiche Lösung wie beim 1. Lösungsvorschlag.

3. Lösungsvorschlag

Ansatz: $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a > 0$

Nicht alle Kostenfunktionen besitzen einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente. Ersetzt man Bedingung IV durch $k(45) = 401$, so erhält man

$k(x) = 0{,}00490\,x^3 - 0{,}6171\,x^2 + 26{,}2072\,x + 25$; $D = [0; 70]$ (x in t; k(x) in k€).

4. Lösungsvorschlag (Verallgemeinerung des 3. Lösungsvorschlages)

Ansatz: $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a > 0$

Ersetzt man Bedingung IV durch $k(45) = 400 + h$ ($h > 0$), so erhält man

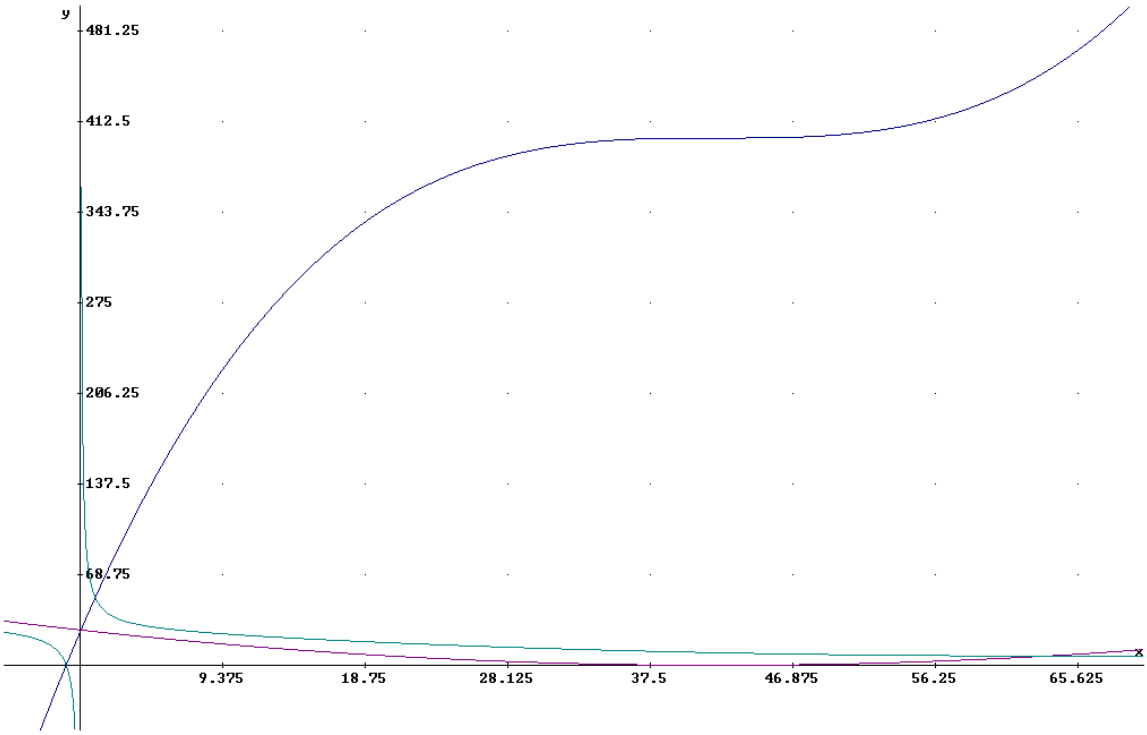
$k_h(x) = (0{,}00509 - 0{,}00019 \cdot h)\,x^3 - (0{,}64103 - 0{,}02393 \cdot h)\,x^2 + (26{,}87729 - 0{,}67009 \cdot h)\,x + 25$;

$D = [0; 70]$ (x in t; k(x) in k€).

Dabei gibt h/3 die Sekantensteigung des Graphen von k über [42; 45] an. Mithilfe von h kann in Zahlen gefasst werden, was mit „unwesentlicher Beeinflussung der Kosten“ gemeint ist.

1.2 Was rentabel ist, muss die Betriebsleitung anhand des Graphen G_k selbst beurteilen. Mögliche Antworten werden das Intervall [30; 55] enthalten.

Ab einer Produktionsmenge von ca. 65 t im Monat steigen die Kosten stark an.
Stückkosten: $s(x) = k(x)/x$ (s. Graph)
Grenzkosten $g(x) = k'(x)$ oder $g(x) = k(x + 1) - k(x)$ (s. Graph)



1.3 Die Stückkosten geben an, wie viel der Betrieb im Mittel bei der Produktion einer Einheit ausgibt. Dieser Wert ist ein Richtwert für den Preis, zu dem eine Produktionseinheit verkauft wird. Sind die Stückkosten höher als der am Markt durchsetzbare Preis, so produziert das Unternehmen unrentabel.

Die Grenzkosten geben an, wie viel die Produktion einer zusätzlichen Einheit pro Monat kostet. Mithilfe der Grenzkosten kann der Betriebsleiter in Abhängigkeit von der aktuellen Produktionsmenge abschätzen, wie viel das kurzzeitige „Hochfahren“ der Produktionsmenge kostet. Die Grenzkosten helfen bei der Entscheidung, ob er Eilaufträge guter Kunden ohne Preisaufschlag erledigen will oder wie hoch die Preiszuschläge für besonders zügig erledigte Aufträge sein müssen, um die Kosten zu decken. Bei sehr guter Auftragslage geben die Grenzkosten einen Hinweis darauf, ob es sinnvoller ist die Produktion zu steigern oder die Preise zu erhöhen.

1.4 Wie ändert sich der Verlauf der Kostenfunktion, wenn die Lohntarife (Rohstoffkosten, Gebühren und Abgaben, ...) steigen (fallen)?

Wie ändert sich der Verlauf der Kostenfunktion, wenn eine neue Maschine angeschafft wird?

Wie ändert sich der Verlauf der Kostenfunktion, wenn mehr Verwaltungspersonal (Produktionspersonal, Berater, Personal zur Raum- und Außengeländepflege) eingestellt wird?

Diese Fragen lassen sich nicht abschließend beantworten. Dennoch erscheint es sinnvoll derartige Fragen mit den Schülerinnen und Schüler zu diskutieren.

Aufgabe 2 kann analog zu Aufgabe 1 bearbeitet werden.

3.1 $f(0) < 0$ bedeuten, dass der Betrieb Geld erwirtschaftet, obwohl nichts produziert wird.

3.2 Der Graph ist monoton fallend. Das bedeutet, dass bei steigender Produktionsmenge die Produktionskosten sinken. Dies kann nie der Fall sein, da mindestens das Material für die zusätzlich hergestellten Produkte bezahlt werden muss. Auch Mengenrabatte ändern daran nichts. Sie werden so kalkuliert, dass zwar der Preis je Mengeneinheit sinkt jedoch nicht der Gesamtpreis. Es kommt nicht vor, dass für eine größere „Packung“ weniger bezahlt werden muss als für eine kleinere.

Für $x > 3$ ist $f(x) < 0$. Dies bedeutet, dass der Betrieb Geld bekommt ohne seine Produkt zu verkaufen, sobald mehr als 3 Produktionseinheiten hergestellt werden.

3.3 $f(0) = 0$ bedeutet, dass der Betrieb keine Fixkosten hat. Das ist unmöglich.
Für $x > 2{,}5$ ist der Graph streng monoton fallend. Auch dies ist unmöglich (vgl. 3.2).

3.4 Für $0 < x < 3$ ist der Graph streng monoton fallend, was bei einer Kostenfunktion nicht vorkommen kann (vgl. 3.2).

4.1 Auch wenn nichts produziert wird fallen Kosten für Miete, Grundgebühren (Telefon, Wasser, Strom, ...), Versicherungen, Werbung, Raumpflege usw. an. Man kann auch darüber diskutieren, ob man einen Teil der Personalkosten, der Investitionen oder der Reparaturkosten als Fixkosten betrachtet. Solche Entscheidungen muss die Betriebsleitung treffen. Daher liegt der Schnittpunkt des Graphen mit der 2. Achse oberhalb der 1. Achse.

Bei kleinen Produktionsmengen sind das Personal und die Maschinen nicht ausgelastet, müssen aber dennoch bezahlt werden. Daher steigen die Kosten zunächst stark an. Sobald das Personal und die Maschinen aus- aber nicht überlastet sind, wird besonders effizient produziert. Daher verläuft die Kostenkurve im mittleren Abschnitt sehr flach. Steigt die Produktionsmenge weiter, fallen Überstunden-, Wochenend- und Schichtzuschläge an, so dass die Kosten überproportional (steiler als linear) steigen. Ist die Produktionsmenge jedoch so groß, dass Menschen und Maschinen überlastet werden, so häufen sich krankheits- und reparaturbedingte Ausfälle. Wegen Krankheit arbeitsunfähiges Personal muss weiter bezahlt werden, Reparaturen kosten Geld und verursachen längere Arbeitszeiten bei gleicher Produktionsmenge, so dass die Kostenkurve für große x sehr stark ansteigt.

4.2 $k(0) > 0$; k ist streng monoton steigend; $k(x) > 0$ für $x > 0$

4.3 Negative Produktionsmengen sind nicht definiert, daher gilt $x \geq 0$.

Sehr große Produktionsmengen machen eine Änderung der Rahmenbedingungen (mehr Personal, neue Maschinen, größere Gebäude, ...) nötig. Diese Änderungen würden sich auf den Verlauf der gesamten Kurve auswirken. Daher ist es sicher nicht sinnvoll die Definitionsmenge sehr weit über die „flache Zone“ hinaus nach rechts auszudehnen.

5.1 Der Grad ist ungerade und ≥ 3.

5.2 Die Gleichung der ganzrationalen Funktion hängt vom Spezialfall ab. Die größte absolute Abweichung tritt meistens am rechten Rand des betrachteten Intervalls auf und wird am Graphen abgelesen. Die prozentuale Abweichung wird aus den abgelesenen Werten berechnet.

Aufgabe 6

Da ganzrationale Funktion dritten Grades vier Koeffizienten besitzen, benötigt man vier Angaben über den Betriebsablauf, um die Kostenfunktion durch eine solche Funktion anzunähern. Je höher der Grad der Näherungsfunktion, desto mehr Angaben benötigt man.

Betriebsleitungen haben jedoch in der Regel nur Erfahrung mit einem kleinen Produktionsmengenintervall. Sie können daher nur einigermaßen zuverlässige Aussagen über die Fixkosten und die Produktionskosten für einen schmalen Produktionsmengenbereich machen. Für $n > 3$ wird die Näherung daher nicht genauer als für $n = 3$.

Die Informationen, die Betriebsleiter beschaffen können sind ohnehin ungenaue Schätzwerte (Selbst die Fixkosten kann man nicht eindeutig bestimmen, da die Betriebsleitung darüber entscheidet, welche Kosten zu den Fixkosten gerechnet werden sollen.), daher ist es nicht sinnvoll eine Genauigkeit vorzuspiegeln, die nicht erreichbar ist.

Da sich auch bei gleichbleibendem Personalstand und unverändertem Maschinenpark die Rahmenbedingungen (Rohstoffpreise, Gebühren und Abgaben, Energiepreise, Versicherungsbeiträge, ...) ständig verändern, kann eine Kostenfunktion in jedem Fall nur eine grobe Näherung für die realen Bedingungen sein.

Dennoch liefern die Funktionen für Stück- und Grenzkosten Werte, die als Anhaltspunkt für die Preisgestaltung bzw. die Einschätzung der Rentabilität der Produktion geeignet sind.

Erprobung

Das Beispiel wurde zusammen mit den einführenden Aufgaben in einem Leistungskurs als Wochenhausaufgabe eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler hatten eine Woche Zeit, ihre Lösungen auszuarbeiten und bei der Lehrkraft zur Korrektur abzugeben. Der Kurs kam mit allen Aufgaben, bis auf Nummer 2, gut zurecht. Aufgabe 2 scheiterte daran, dass niemand über hinreichend gute Kontakte zu einem Produktionsbetrieb verfügte.

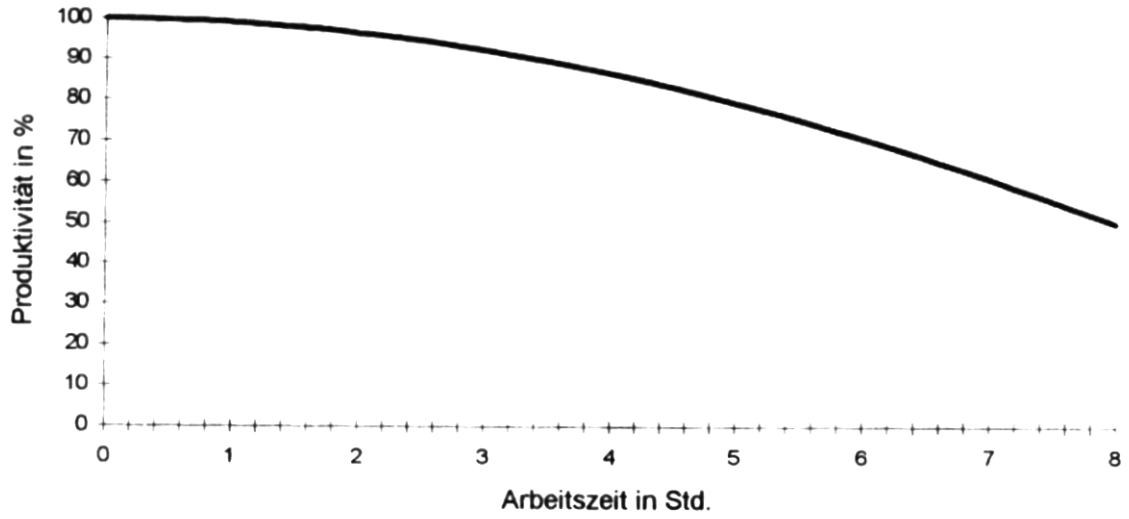
Resümee

Die Aufgaben 1 und 3 bis 6 sind gut dazu geeignet, Jugendlichen Grundkenntnisse der Betriebswirtschaftslehre zu vermitteln. Die Verifizierung des mathematischen Modells, durch Anwendung in einem realen Betrieb, wird nur in glücklichen Ausnahmefällen gelingen. Dieser Teil des Beispiels ist daher als Anregung dafür zu verstehen, wie die gewonnen betriebswirtschaftlichen Kenntnisse in der Praxis erprobt werden könnten.

Pausen und Produktivität

In einer großen Firma beginnt die Arbeitszeit um 8 Uhr und endet um 17 Uhr. Zwischen 12 Uhr und 13 Uhr liegt eine einstündige Mittagspause.

Das Management der Firma liest in einem Fachblatt, dass in einer wissenschaftlichen Studie der Zusammenhang zwischen der Produktivität eines Angestellten und seiner Arbeitszeit untersucht wurde. Die folgende Graphik zeigt das Ergebnis für den Fall, dass im Unternehmen keine einzige Pause eingeplant ist:



Ein weiteres interessantes Ergebnis der Studie war:

Die Produktivität erhöht sich nach einer Pause der Länge x Stunden auf das Niveau, das $2 \cdot \sqrt{x}$ Stunden vor Beginn der Pause erreicht war.

Das Management der Firma möchte diese Information zur Steigerung der Produktivität nutzen. Betriebsrat und Firmenleitung einigen sich zunächst auf folgende Fixpunkte:

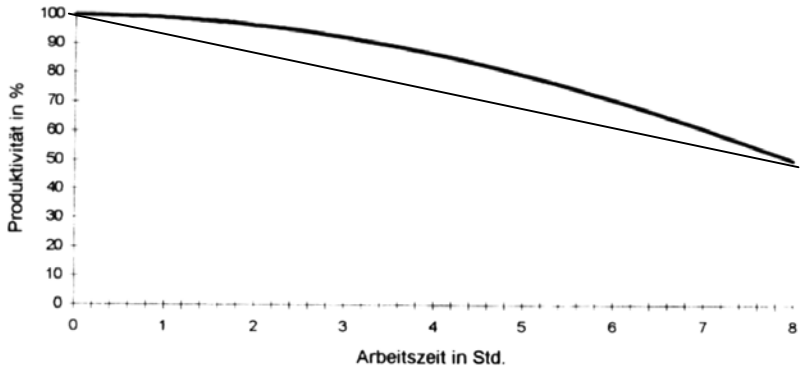
1. Der Arbeitsbeginn und das Arbeitsende bleiben von der Neuregelung unberührt.
2. Nach vier Stunden Arbeitszeit gibt es eine Mittagspause von 30 Minuten.
3. Weitere 30 Minuten Pausenzeiten sollen in den Arbeitsprozess eingeschoben werden.

1. Pausen und Produktivität
   (Gesucht ist eine Verbesserung der Pausenregelung eines Betriebes.)
2. Um die Aufgabe zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass die Produktivität dem Inhalt der Fläche unter der Kurve entspricht.
   Die Größe der Fläche lässt sich durch Trapeze abschätzen oder mithilfe von Integralen berechnen. Die mathematische Modellierung betrifft die Approximation der Randfunktion und die Variation der Pausenzeiten. Da die im mathematischen Modell gefundene Lösung in der Realität nicht umsetzbar ist, ergibt sich die "beste" Lösung in einer Diskussion, die die Realisierbarkeit einbezieht.
3. Außer dem Geodreieck, dem Taschenrechner oder einem Computeralgebrasystem sind keine weiteren Hilfsmittel erforderlich.
4. Die Aufgabe ist für Schüler der SII mit Kenntnissen in der Integralrechnung geeignet. Der Zeitaufwand hängt von der Diskussionsfreudigkeit der Gruppe ab. Die Randbedingungen für eine sinnvolle Pausenregelung liefert die Diskussion in der Gruppe nicht die Mathematik. Je nachdem wie ausgeprägt die Diskutierfreude der Schülergruppe ist, beträgt der Zeitansatz mindestens 6 Stunden.
5. Die Schüler erkennen relativ rasch, dass es nach den Vorgaben der Produktivitätskurve und der Erholungsformel (beides beruht nicht auf einer gesicherten Literaturangabe), zweckmäßig ist, die Pausen möglichst früh zu legen. Diese Erkenntnis erhält man mit der Trapezmethode und der Integralmethode. Setzt man den Beginn der ersten Pause variabel, so führt auch eine Extremwertaufgabe zu diesem Ergebnis. Nach Diskussionen über die Realisierbarkeit einigt sich die Gruppe dann auf einen Lösungsvorschlag.
   (Idee: siehe Bericht zur Modellierungswoche in Lambrecht 1995)

Lösungsansatz

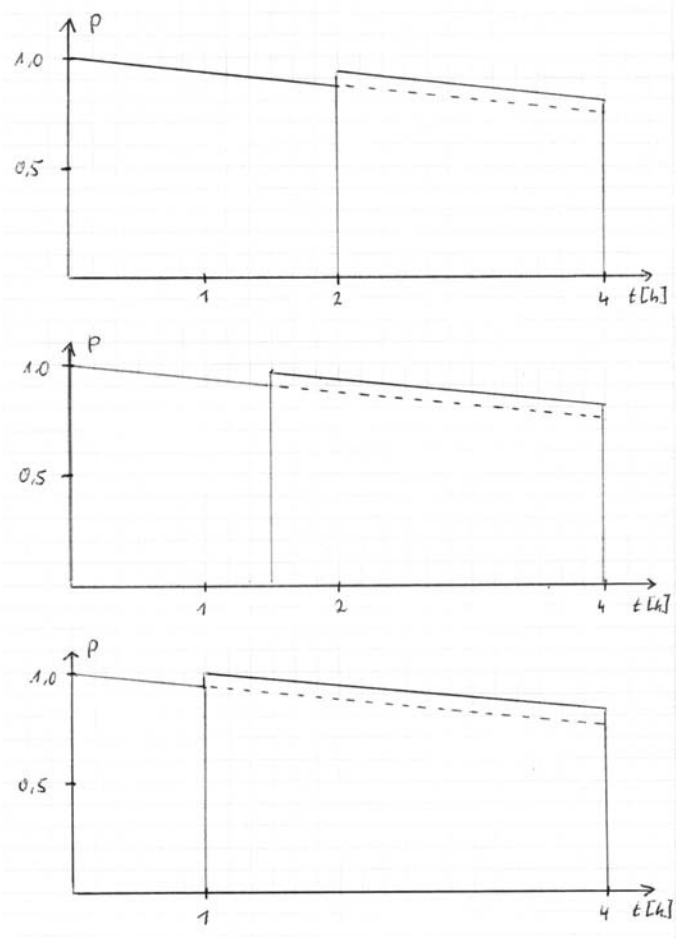
1. Modell: Lineare Approximation

Die Randpunkte werden als Anhaltspunkte genommen. Da die momentane Produktivität nach 8 Stunden auf 50% sinkt, gilt für die Gerade: $p(t) = -\frac{25}{4}\,t + 100$.



Mit der Integralrechnung vertraute Schüler erkennen, dass die Gesamtproduktivität der Fläche unter dem Graphen entspricht. In einer ersten Näherung kann diese Fläche durch ein Trapez beschrieben werden.

Um die Verbesserung der Produktivität durch eine Pause zu veranschaulichen, schnitten die Schülerinnen und Schüler das Trapez zum Zeitpunkt des Pausenbeginns in zwei Teile und verschoben den rechten Teil um die entsprechende *„Erholungszeit“* nach links.



Beschränkung auf den Vormittag:

Am Vormittag wird zunächst eine Pause von $\frac{1}{4}$ Stunde eingelegt.

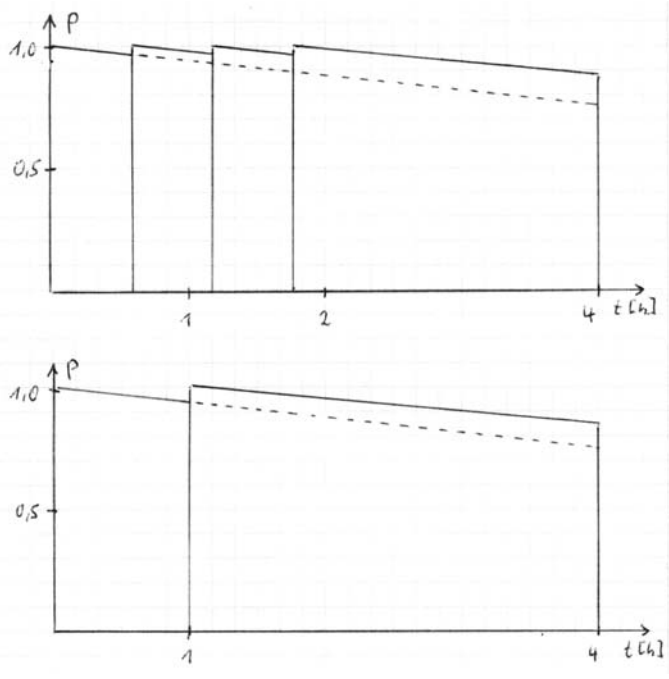
Die *„Erholungszeit“*-Berechnung liefert eine Verbesserung von $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$ h = 1 h.

Die Skizzen zeigen, dass ein möglichst früher Beginn der Pause eine maximale Fläche liefert.

Die Pause macht frühestens nach einer Stunde Arbeit einen Sinn, weil zu diesem Zeitpunkt die maximale Produktivität von 100% erreicht wird.

Minimale Pausenlänge: 5 Minuten

Nach eingehender Diskussion wurde die minimale Pausenlänge auf 5 Minuten festgelegt. Kürzere Pausen erschienen in einer Firma nicht organisierbar. Daher wurden am Vormittag 3 solcher „5-Minutenpausen“ eingerichtet.



Die *„Erholungszeit“* beträgt für eine so kurze Pause 35 min. Das heißt, man erreicht eine maximale Ausschöpfung der Fläche, wenn der Pausenabstand 35 min beträgt und die erste Pause nach einer Arbeitszeit von 35 min beginnt.

Auf dem nächsten Bild erkennt man, dass sich die Produktivität am Morgen dadurch nochmals verbessert.

Viele kleine Pausen erhöhen die Produktivität mehr als eine größere. Dies bestätigen auch Untersuchungen am Arbeitsplatz.

In diesem Modell führen noch kürzere Pausen zu einer weiteren Verbesserung. An dieser Stelle setzte wieder die Diskussion ein, ob die Begrenzung auf eine Mindestzeit sinnvoll war.

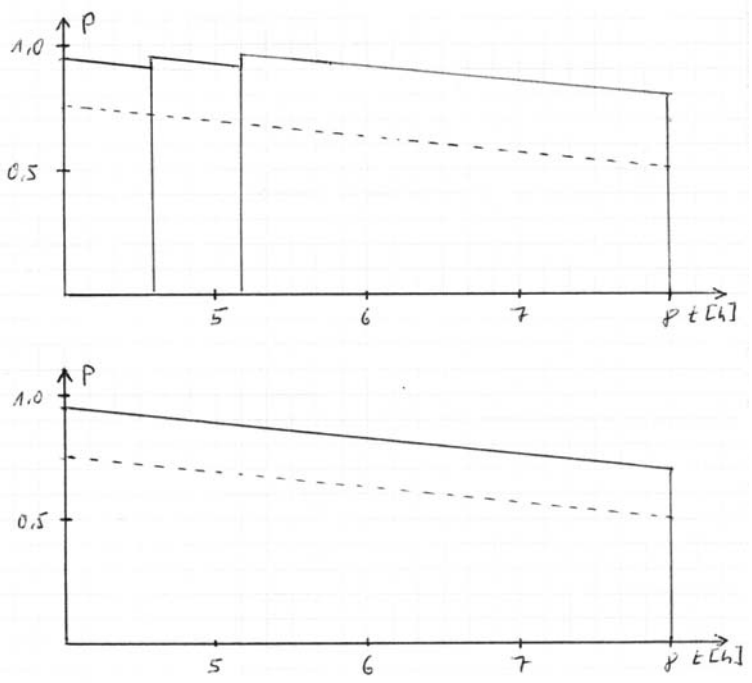
Der Nachmittag wird mit betrachtet:

Die Mittagspause von $\frac{1}{2}$ h bringt zunächst eine *„Erholungszeit“* von 85 min.

In der Gruppe wurden zunächst zwei Alternativen diskutiert:

1. 3 kurze Pausen möglichst früh
2. Verlängerung der Mittagspause auf 45 Minuten

Die beiden nebenstehenden Bilder zeigen, dass die lange Mittagspause nicht den gleichen Erholungswert hat wie drei kurze Pausen.



Betrachtung des gesamten Arbeitstages:

1. Variante:

   3 Kurzpausen am Vormittag und 3 Kurzpausen am Nachmittag:

   $3 \cdot 57{,}27 + 209{,}18 + 3 \cdot 54{,}23 + 193{,}36 = 737{,}05$

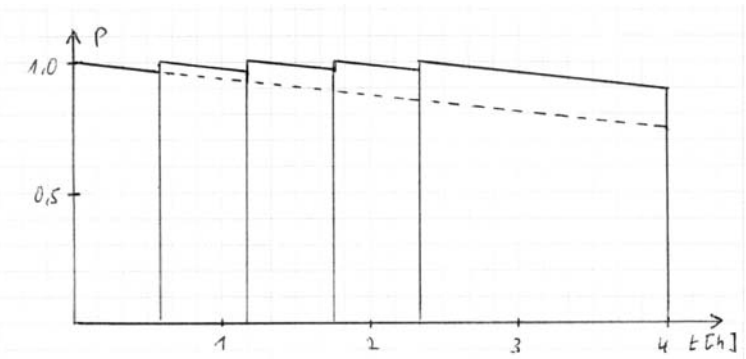
2. Variante:

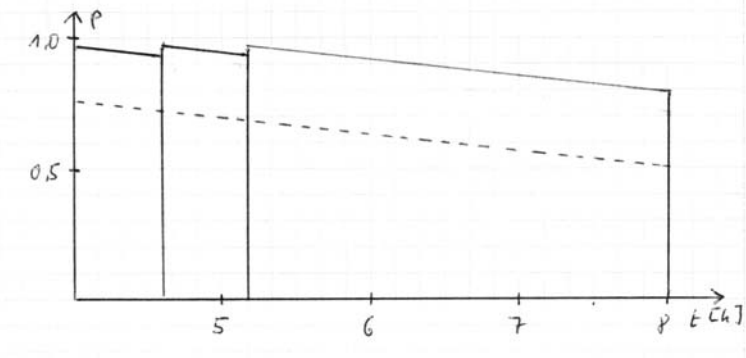
   4 Kurzpausen am Vormittag und 2 Kurzpausen am Nachmittag

   $4 \cdot 57{,}27 + 157{,}99 + 2 \cdot 56{,}36 + 255{,}30 = 755{,}09$

Eine weitere Alternative besteht darin eine kurze Pause mehr auf den Vormittag zu verschieben. 5 Kurzpausen am Vormittag machen jedoch keinen Sinn, weil dann der Erholungswert der Mittagspause nicht mehr voll zur Geltung käme.

Damit hat sich gezeigt, dass in diesem Modell die 2. Variante die beste Lösung darstellt (vgl. nebenstehendes Bild). Sie bewirkt eine Produktivitätssteigerung von 2% gegenüber der ersten.





2. Modell: Quadratische Approximation

Die Kurve wird durch eine Parabel zweiter Ordnung angenähert. Der Scheitel dieser Parabel liegt bei (0 ; 100). D.h. es gilt: $p(x) = ax^2 + 100$

Ein weiterer Punkt der Parabel heißt (8 ; 50). Damit folgt: $a = -\frac{25}{32}$.

Also gilt $p(x) = -\frac{25}{32}x^2 + 100$.

Die Flächenstücke werden dann mithilfe der Integralrechnung bestimmt:

$$\int_c^d \left(-\frac{25}{32}x^2 + 100\right) dx = \left[-\frac{25}{96}x^3 + 100x\right]_c^d$$

Zunächst wird mit einer Pausenlänge von 15 min am Vormittag gerechnet.

Bei linearer Näherung lieferte sie zum frühest möglichen Zeitpunkt, eine Stunde nach Arbeitsbeginn, das beste Ergebnis. Dabei betrug die *„Erholungszeit“* eine Stunde. Bedeutet d der Pausenbeginn, so ergibt sich für die Produktivität am Vormittag:

$$\int_0^d p(x)dx + \int_{d-1}^3 p(x)dx = -\frac{25}{96}d^3 + 100d + \frac{9375}{32} + \frac{25}{96}(d-1)^3 - 100d + 100 = f(d)$$

$f'(d) = -\frac{150}{96}d + \frac{75}{96}$

$f'(d) = 0$, für $d = \frac{1}{2}$. Dieses Ergebnis macht keinen Sinn, weil dann die Produktivität nach der Pause so hoch wäre wie eine halbe Stunde <u>vor</u> Arbeitsbeginn!!
f(d) ist eine quadratische Funktion mit einem globalen Hochpunkt. Je weiter man sich von diesem Punkt entfernt, desto kleiner wird der Funktionswert. D.h. die maximale Produktivität für den Vormittag kann nur dann erreicht werden, wenn die erste Pause zum frühest möglichen Zeitpunkt, nämlich 1 h nach Arbeitsbeginn anfängt – das ist das gleiches Ergebnis wie bei linearer Näherung.

Produktivität am Vormittag:

$$\int_0^1 p(x)dx + \int_0^3 p(x)dx = 99{,}74 + 292{,}97 = 392{,}71.$$

Erholungsgewinn bei drei Kurzpausen der Länge 5 min. und Pausenbeginn frühestens nach 35 min:

Also gilt für die Produktivität:

$$3 \cdot \int_0^{\frac{35}{60}} p(x)dx + \int_0^{\frac{135}{60}} p(x)dx = 3 \cdot 58{,}28 + 222{,}03 = 396{,}87$$

Drei Kurzpausen sind produktiver als eine längere Pause.

Produktivität am Nachmittag:

Die Berechnungen für den Nachmittag ergeben sich aus den entsprechenden Überlegungen wie bei der linearen Approximation.

Da es nach einer Mittagspause von 45 min keine weitere Pause gibt, gilt für die Nachmittagsproduktivität

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{9}{2}} p(x)dx$ = 376,3

Dauer der Mittagspause 30 min und eine weitere Pause der Dauer 15 min zum möglichst frühen Zeitpunkt also eine Stunde nach der Mittagspause.

$\int_{\frac{50}{60}}^{\frac{110}{60}} p(x)dx + \int_{\frac{50}{60}}^{\frac{230}{60}} p(x)dx$ = 98,55 + 285,48 = 384,03

Bringt eine Verschiebung der Nachmittagspause einen Produktivitätsgewinn?

$\int_{\frac{50}{60}}^{d+\frac{50}{60}} p(x)dx + \int_{d-\frac{10}{60}}^{\frac{230}{60}} p(x)dx$ = g(d)

Für g‘ (d) gilt dann g‘(d) = $-\frac{150}{96}d + \frac{175}{192}$.

Aus g‘(d) = 0 folgt dann, dass d = $\frac{7}{12}$. Dieser Wert liegt unter einer Stunde. Damit wäre die Produktivität nach dieser Pause höher (!?) als am Ende der Mittagspause. Für den Nachmittag ergäbe sich eine Gesamtproduktivität von

$\int_{\frac{50}{60}}^{\frac{85}{60}} p(x)dx + \int_{\frac{25}{60}}^{\frac{230}{60}} p(x)dx$ = 57,74 + 330,35 = 388,09

Wie aber ist es am Nachmittag mit drei Kurzpausen?

$3 \cdot \int_{\frac{50}{60}}^{\frac{85}{60}} p(x)dx + \int_{\frac{50}{60}}^{\frac{185}{60}} p(x)dx$ = 3 · 57,74 + 217,52 = 390,73

Also gilt auch hier: Drei Kurzpausen sind effektiver als eine längere Nachmittagspause.

Folgerungen für die Tagesproduktivität

Betrachtet man die Ergebnisse für den Vormittag und den Nachmittag isoliert, so ergibt sich als bestes Ergebnis für die Tagesproduktivität bei 3 Kurzpausen am Vormittag einer Mittagspause von 30 min und weiteren drei Kurzpausen am Nachmittag:

396,87 + 390,73 = 787,6

Ist es nicht besser mit 4 Kurzpausen am Vormittag und nur zwei Kurzpausen am Nachmittag zu probieren?

Die Tagesgesamtproduktivität berechnet sich dann

$4 \cdot \int_{0}^{\frac{35}{60}} p(x)dx + \int_{0}^{\frac{100}{60}} p(x)dx + 2 \cdot \int_{\frac{15}{60}}^{\frac{50}{60}} p(x)dx + \int_{\frac{15}{60}}^{\frac{185}{60}} p(x)dx$ = 4 · 58,28 + 165,46 + 2 · 58,19 + 275,7 = 790,66.

Ist es nicht noch besser sogar 5 Kurzpausen auf den Vormittag zu legen und nur eine Kurzpause auf den Nachmittag?

$5 \cdot \int_{0}^{\frac{35}{60}} p(x)dx + \int_{0}^{\frac{65}{60}} p(x)dx + \int_{0}^{\frac{35}{60}} p(x)dx + \int_{0}^{\frac{205}{60}} p(x)dx$ = 788,96

Das Ergebnis ist etwas schlechter, weil der Erholungswert der Mittagspause (85 min) nicht voll ausgeschöpft werden kann.

Übersicht über die erzielten Ergebnisse:

Pausenregelung	Approximation	
	linear	quadratisch
3 Kurzpausen (je 5min) am Vormittag und 1 Pause (15 min) am Nachmittag	-	396,87 + 384,03 = 780,9
3 Kurzpausen am Vormittag und 3 Kurzpausen am Nachmittag	737,05	396,87 + 390,73 = 787,6
4 Kurzpausen am Vormittag und 2 Kurzpausen am Nachmittag	**755,09**	**790,66**
5 Kurzpausen am Vormittag und 1 Kurzpause am Nachmittag	-	788,96

So bleibt das beste Ergebnis bei der Voraussetzung, dass die kürzeste Pause 5 min beträgt bei der folgenden Arbeitszeitregelung:

Arbeitsphase	Ruhephase
8.00 – 8.35	8.35 – 8.40
8.40 – 9.15	9.15 – 9.20
9.20 – 9.55	9.55 – 10.00
10.00 – 10.35	10.35 – 10.40
10.40 – 12.20	12.20 – 12.50
12.50 – 13.25	13.25 – 13.30
13.30 – 14.05	14.05 – 14.10
14.10 – 17.00	

Ergebnis einer Schülergruppe am Ende eines Modellierungstages:

1. Den Schülerinnen und Schülern fiel auf, dass durch die Erholungspausen und das „Vorrücken der Trapeze“ der gegebene Graph nur über dem Intervall von 0 bis 4 benötigt wird. Der Graph der von ihnen verwendeten linearen Funktion verlief daher flacher.
2. Sie vereinbarten eine Mindestpausenzeit von 5 Minuten und gelangten damit fast zu dem gleichen Ergebnis.
3. Nach Anregung durch die Lehrkraft verwendeten sie die quadratische Näherung. Sie berechneten die *„Erholungszeiten“* mit dem Taschenrechner und die Integrale mit „Derive“.

Resümee:

Zunächst wusste die Schülergruppe mit der Aufgabenstellung nichts anzufangen. Nach einer gewissen Anlaufzeit von etwa 30 Minuten wurde erst mit der Mathematisierung begonnen. Je länger sie sich mit der Fragestellung auseinander setzten, desto mehr spürten sie, dass es sich lohnt, sich mit der Aufgabe näher zu befassen.

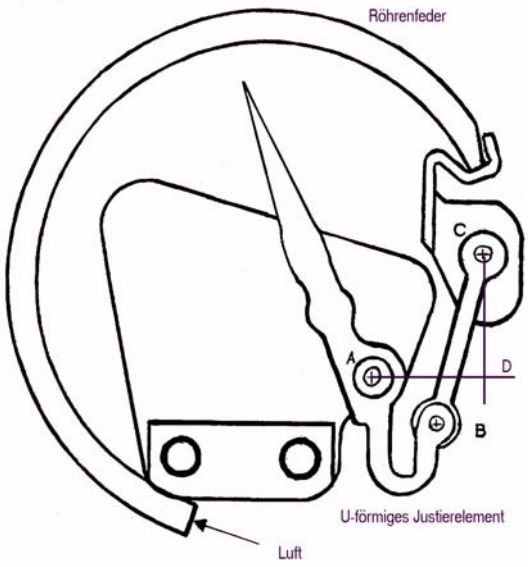
Als sich dann ein Ergebnis herauskristallisierte, dass tatsächlich eine Verbesserung gegenüber der alten Pausenregelung versprach, waren sie mit ihrem Tun zufrieden.

Qualitätssteigerung von Druckmessgeräten

Druckmessgeräte

Messgeräte zur Erfassung des Drucks in Gasen oder Flüssigkeiten werden in unterschiedlichen Industriezweigen und auch im privaten Bereich wie z. B. zur Messung des Luftdrucks bei Auto- oder Fahrradreifen eingesetzt. Sehr weit verbreitet sind dabei Instrumente mit einer Röhrenfeder, die rein mechanisch aufgebaut und daher sehr robust gegen Störungen sind.

Druckmessgerät



Aufbau (vereinfacht)

Funktionsprinzip und Abmessungen des Originaldruckmessgerätes

Die in der Abbildung mit A, B und C bezeichneten Punkte sind drehbare Nietstellen. Durch das Einströmen von Luft in die Röhrenfeder baut sich ein Druck auf und die Röhrenfeder biegt sich aufgrund ihrer Elastizität auf. Dabei bewegt sie den an ihr befestigten Drehpunkt C nach oben, so dass eine Drehbewegung des Zeigers um den Punkt A erfolgt.

Bei einem idealen Messgerät hängt der Drehwinkel linear vom Druck ab. Der Schenkel AB überstreicht bis zum Vollausschlag einen Winkel von 45°.

Das Originalgerät hat die folgenden Abmessungen:

|AB| = 6,2 mm; |AD| = 8,0 mm; |CD| = 9,5 mm; |BC| = 13,0 mm

Bewegung des Punktes C bis Vollausschlag s_{max} = 4,7 mm

Optimierung des Druckmessgerätes

Bei der Fertigung dieser Druckmessgeräte wird die Niete bei C an einem beliebigen Punkt (zufällig) auf der Platte befestigt. Daher werden diese Geräte nur mit einer relativ geringen Genauigkeit (Güteklasse 2,5, d.h. der Fehler beträgt höchstens 2,5% des Maximalwertes von 4,5 bar) hergestellt. Ungefähr 20% der hergestellten Geräte müssen manuell durch Verändern des U-förmigen Justierelementes nachgeeicht werden. Daher gibt die Herstellerfirma die Entwicklung eines automatischen Eichverfahrens (eigentlich Verfahrens zum Zusammenbau) in Auftrag, mit dessen Hilfe eine höhere Genauigkeitsklasse erreicht werden soll. Die technischen Rahmenbedingungen erlauben es, die Nietstelle C auf der vorgegebenen Platte sowie die Form des U-förmigen Justierelementes zu verändern. Lage und Form der übrigen Bauteile dürfen nicht verändert werden.

1. Qualitätssteigerung von Druckmessgeräten
2. Zunächst ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler den Aufbau und die Funktionsweise des Druckmessgerätes verstehen. Dazu kann der Bau eines vereinfachten Messgerätes nach der vorgegebenen Schablone hilfreich sein.
   Anschließend wird die Ortslinie der Nietstelle B bei der Dehnung der Röhrenfeder mithilfe der Werkzeuge der analytischen Geometrie beschrieben. Zu jeder Lage von B wird der Zeigerausschlag rechnerisch bestimmt. Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms oder eines selbstgeschriebenen Programms wird die Lage von C bei unbelasteter Röhrenfeder sowie der Abstand der Nietstellen A und B systematisch variiert und jeweils die Genauigkeitsklasse des Druckmessgerätes bestimmt.
3. Pappe und 3 Nieten für den Bau eines vereinfachten Druckmessers, Tabellenkalkulation oder Programmiersprache (Computer unbedingt erforderlich).
4. Sekundarstufe II
   Kenntnisse aus der Analytische Geometrie: Vektoren der Ebene, Betrag eines Vektors, Skalarprodukt, Kreisgleichung. Diese Aufgabe eignet sich für eine BLL, Facharbeit oder zum Einsatz in einer Projektwoche.
5. Für die Schülerinnen und Schüler ist es i.a. nicht sofort ersichtlich, wie die vorgegebenen Größen in einen Zusammenhang zur Beschreibung des Druckmessgerätes gebracht werden können. Dazu sind evtl. gezielte Impulse durch die Lehrkraft unter Verwendung des aufgebauten Modells in Bezug auf die Bewegung der Punkte (Nietstellen) B und C notwendig.
   - Bewegung des Punktes B auf einer Kreisbahn
   - Verschiebung des Punktes C entlang einer Geraden (näherungsweise)

   Dargestellt in einem geeigneten Koordinatensystem finden die Schülerinnen und Schüler dann unter Verwendung von Kenntnissen aus der Analytischen Geometrie Zusammenhänge zwischen den für die Aufgabe relevanten Größen. Der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms zur Simulation der Funktionsweise des Druckmessgerätes bereitet Oberstufenschülern in der Regel keine Probleme.
   (Idee: siehe Bericht zur Modellierungswoche in Lambrecht 2000)

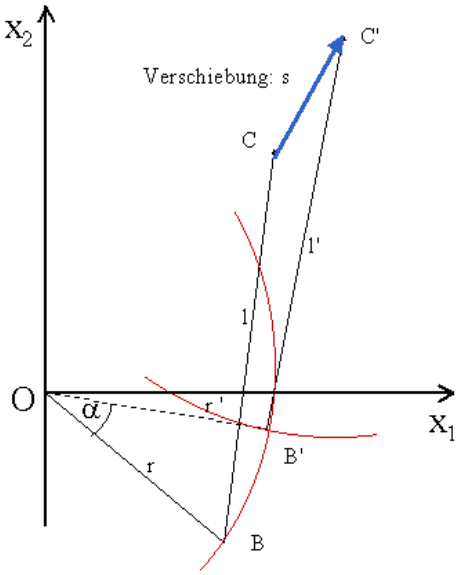
Lösungsvorschlag:

Da das Gerät mithilfe der analytischen Geometrie beschrieben werden soll, wird zunächst ein geeignetes Koordinatensystem gewählt.

Beim Aufbiegen der Röhrenfeder bewegt sich der Punkt B um den Ursprung auf einem Kreisbogen mit dem Radius r = | OB |.

Da die Dehnungsstrecke der Feder relativ klein ist, kann die Verschiebung s des Punktes C näherungsweise als linear angesehen werden.

Die analytische Geometrie liefert Zusammenhänge zwischen den in der Skizze dargestellten Vektoren und den Koordinaten der Punkte.



Berechnung der Koordinaten b_1 und b_2 des Punktes B in Abhängigkeit von c_1, c_2, l und r:

B liegt auf einem Kreisbogen um O $|\vec{b}| = r \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = r^2$ (I)

B liegt auf einem Kreisbogen um C: $|\vec{c} - \vec{b}| = l \Rightarrow (c_1 - b_1)^2 + (c_2 - b_2)^2 = l^2$ (II)

Sind r, l, c_1, c_2 gegeben, so können b_1 und b_2 berechnet werden:

(II): $c_1^2 - 2c_1b_1 + b_1^2 + c_2^2 - 2c_2b_2 + b_2^2 = l^2$

Mit (I) : $c_1^2 - 2c_1b_1 + c_2^2 - 2c_2b_2 + r^2 = l^2$

(I): $b_2 = \sqrt{r^2 - b_1^2}$

=> $c_1^2 - 2c_1b_1 + c_2^2 \pm 2c_2\sqrt{r^2 - b_1^2} + r^2 = l^2$

=> $c_1^2 + c_2^2 + r^2 - l^2 - 2c_1b_1 = \pm 2c_2\sqrt{r^2 - b_1^2}$

Setze: $c_1^2 + c_2^2 + r^2 - l^2 = a$

=> $a^2 - 4c_1b_1a + 4c_1^2b_1^2 = 4c_2^2(r^2 - b_1^2)$

Ordnen nach Potenzen von b_1: $b_1^2(4c_1^2 + 4c_2^2) + b_1(-4c_1a\ ) + (a^2 - 4c_2^2r^2) = 0$

Die quadratische Gleichung hat die Lösungen:

$$b_1 = \frac{c_1a}{2c_1^2 + 2c_2^2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2a^2}{4(c_1^2 + c_2^2)^2} - \frac{a^2 - 4c_2^2r^2}{4(c_1^2 + c_2^2)}}$$

Berechnung des Winkels α zwischen den Vektoren $\vec{b}$ (Anfang der Bewegung) und dem Vektor $\vec{b'}$, dem Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Bewegungskurve:

Skalarprodukt: $\cos\alpha = \frac{\vec{b}\cdot\vec{b}'}{|\vec{b}|\cdot|\vec{b}'|} = \frac{b_1 b_1'}{r^2} + \frac{b_2 b_2'}{r^2}$

Berechnung des Idealwinkels

Bei idealem Gerät wächst α proportional zur Dehnungsstrecke s der Feder. Zu α_{max}=45° (Messwert für Vollausschlag) gehört s_{max}.

$$\alpha_{ideal} = \frac{s}{s_{\max}}\alpha_{\max}$$

Berechnung der Dehnungsstrecke der Feder

$s = \sqrt{(c_1 - c_1')^2 + (c_2 - c_2')^2}$.

Berechnung der Güteklasse des Messgeräts

Die Güteklasse des Messgeräts wird wie folgt berechnet: $G = \max\frac{\Delta p}{p_{\max}}$,

wobei p_{max} der Druck ist, der zum Vollausschlag gehört und Δp die Abweichung des angezeigten vom idealen Druck. Da p~α gilt:

$$G = \max\frac{|\alpha - \alpha_{ideal}|}{\alpha_{\max}}$$

Da eine geschlossene Lösung nicht angegeben werden kann, bietet sich der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms an. Zunächst werden die obigen Zusammenhänge übertragen:

B5 = c_1	C5 = c_2	D5 = r	E5 = l	F5 = a	G5 = b_1
H6 = b_2	I5 = α	J5 = s	K5 = α (ideal)	L5: Fehler	M4 = 4,7 = s(45°)

Dann werden die folgenden Rechnungen durchgeführt:

a =(B5*B5+C5*C5+D5*D5-E5*E5)

b_1=(B5*F5)/(2*(B5*B5+C5*C5))+WURZEL(((B5*B5*F5*F5)/(4*POTENZ(C5*C5+B5*B5;2)))+(4*D5*D5*C5*C5-F5*F5)/(4*(B5*B5+C5*C5)))

b_2 = WENN(-WURZEL(D6*D6-G6*G6)-H5<=0;WURZEL(D6*D6-G6*G6);-WURZEL(D6*D6-G6*G6)) (beim Nulldurchgang muss von Hand das Vorzeichen korrigiert werden)

α=ARCCOS(($G$5*G6+$H$5*H6)/(WURZEL(($G$5*$G$5+$H$5*$H$5)*(G6*G6+H6*H6))))*180/PI()

α(45°) =J6/$M$4*45

s =WURZEL((POTENZ(B6-$B$5;2)+POTENZ(C6-$C$5;2)))

Fehler =WURZEL(POTENZ(K6-I6;2))/45

Max. Fehler =MAX(L6:L84)

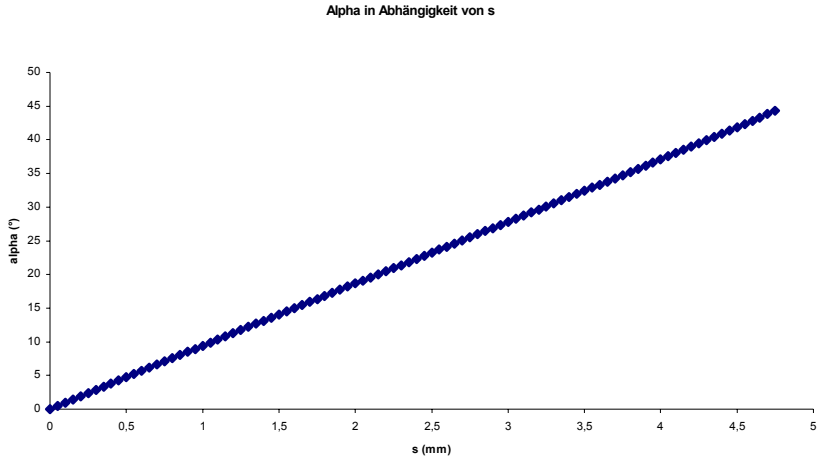
Der folgende Tabellenausschnitt zeigt den Anfang der Simulation mit einer Tabellenkalkulation für das Originaldruckmessgerät mit den Daten:

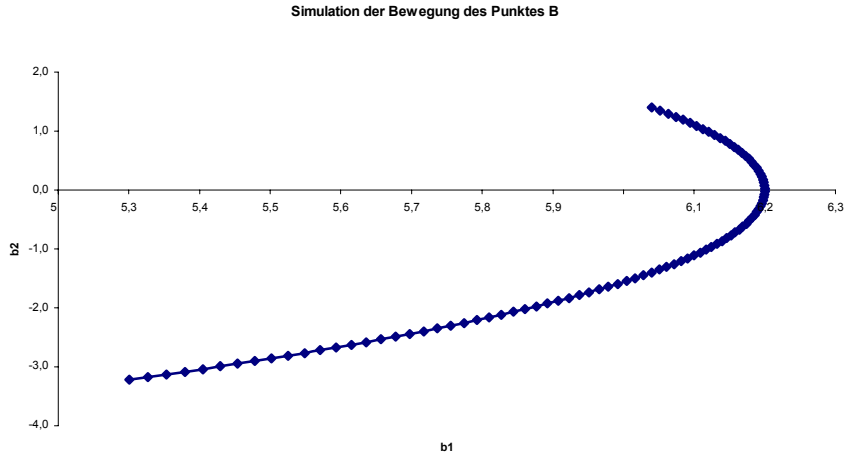
l = 13 mm; s_{max} = 4,7 mm, r = 6,2 mm, c_1 = 8 mm, c_2 = 9,5 mm

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Alle Werte sind vom Originalmodell übernommen !											
2					konst.					mit c			
3		c1 (mm)	c2 (mm)	r (mm)	l (mm)	a	b1 (mm)	b2 (mm)	α (°)	s (mm)	alpha (ideal)	Fehler:	s(45°) ideal
4	Schrittweite:	0,000	0,050	0,00	0,00								4,7
5	Startwerte:	8,000	9,500	6,20	13,00	23,69	5,3003	-3,2166	0	0	0	0	
6		8,000	9,550	6,20	13,00	24,64	5,3270	-3,1722	0,4784	0,0500	0,4787	0,001%	max.Fehler:
7		8,000	9,600	6,20	13,00	25,60	5,3533	-3,1277	0,9560	0,1000	0,9574	0,003%	2,685%
8		8,000	9,650	6,20	13,00	26,56	5,3791	-3,0831	1,4327	0,1500	1,4362	0,008%	
9		8,000	9,700	6,20	13,00	27,53	5,4045	-3,0383	1,9087	0,2000	1,9149	0,014%	
10		8,000	9,750	6,20	13,00	28,50	5,4295	-2,9933	2,3839	0,2500	2,3936	0,022%	
11		8,000	9,800	6,20	13,00	29,48	5,4541	-2,9483	2,8584	0,3000	2,8723	0,031%	
12		8,000	9,850	6,20	13,00	30,46	5,4783	-2,9031	3,3321	0,3500	3,3511	0,042%	
13		8,000	9,900	6,20	13,00	31,45	5,5021	-2,8578	3,8051	0,4000	3,8298	0,055%	
14		8,000	9,950	6,20	13,00	32,44	5,5255	-2,8123	4,2773	0,4500	4,3085	0,069%	
15		8,000	10,000	6,20	13,00	33,44	5,5484	-2,7667	4,7489	0,5000	4,7872	0,085%	
16		8,000	10,050	6,20	13,00	34,44	5,5710	-2,7211	5,2197	0,5500	5,2660	0,103%	
17		8,000	10,100	6,20	13,00	35,45	5,5931	-2,6752	5,6899	0,6000	5,7447	0,122%	
18		8,000	10,150	6,20	13,00	36,46	5,6149	-2,6293	6,1594	0,6500	6,2234	0,142%	
19		8,000	10,200	6,20	13,00	37,48	5,6362	-2,5833	6,6283	0,7000	6,7021	0,164%	
20		8,000	10,250	6,20	13,00	38,50	5,6571	-2,5371	7,0966	0,7500	7,1809	0,187%	
21		8,000	10,300	6,20	13,00	39,53	5,6776	-2,4909	7,5642	0,8000	7,6596	0,212%	
22		8,000	10,350	6,20	13,00	40,56	5,6977	-2,4445	8,0313	0,8500	8,1383	0,238%	
23		8,000	10,400	6,20	13,00	41,60	5,7175	-2,3980	8,4978	0,9000	8,6170	0,265%	
24		8,000	10,450	6,20	13,00	42,64	5,7368	-2,3515	8,9637	0,9500	9,0957	0,293%	
25		8,000	10,500	6,20	13,00	43,69	5,7557	-2,3048	9,4290	1,0000	9,5745	0,323%	
26		8,000	10,550	6,20	13,00	44,74	5,7742	-2,2580	9,8939	1,0500	10,0532	0,354%	
27		8,000	10,600	6,20	13,00	45,80	5,7923	-2,2112	10,3582	1,1000	10,5319	0,386%	
28		8,000	10,650	6,20	13,00	46,86	5,8100	-2,1642	10,8220	1,1500	11,0106	0,419%	
29		8,000	10,700	6,20	13,00	47,93	5,8273	-2,1172	11,2853	1,2000	11,4894	0,453%	
30		8,000	10,750	6,20	13,00	49,00	5,8442	-2,0700	11,7482	1,2500	11,9681	0,489%	
31		8,000	10,800	6,20	13,00	50,08	5,8607	-2,0228	12,2106	1,3000	12,4468	0,525%	
32		8,000	10,850	6,20	13,00	51,16	5,8769	-1,9755	12,6726	1,3500	12,9255	0,562%	
33		8,000	10,900	6,20	13,00	52,25	5,8926	-1,9280	13,1341	1,4000	13,4043	0,600%	

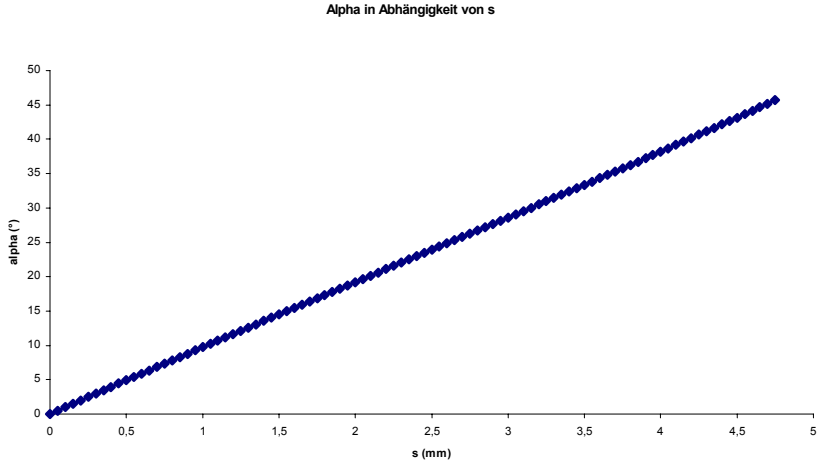
usw.

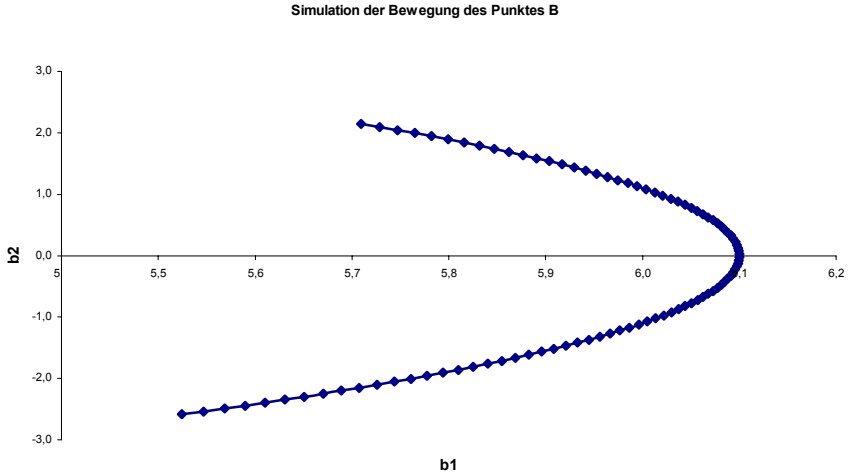
Die folgenden Diagramme zeigen die Abhängigkeit des Winkels α von s, der Dehnungsstrecke der Röhrenfeder, die Bahn des Punktes B (b_2 in Abhängigkeit von b_1) und dem auftretenden Fehler in Abhängigkeit von s für das Originaldruckmessgerät und ein optimiertes Gerät (Variation der Parameter r, c_1 und c_2):





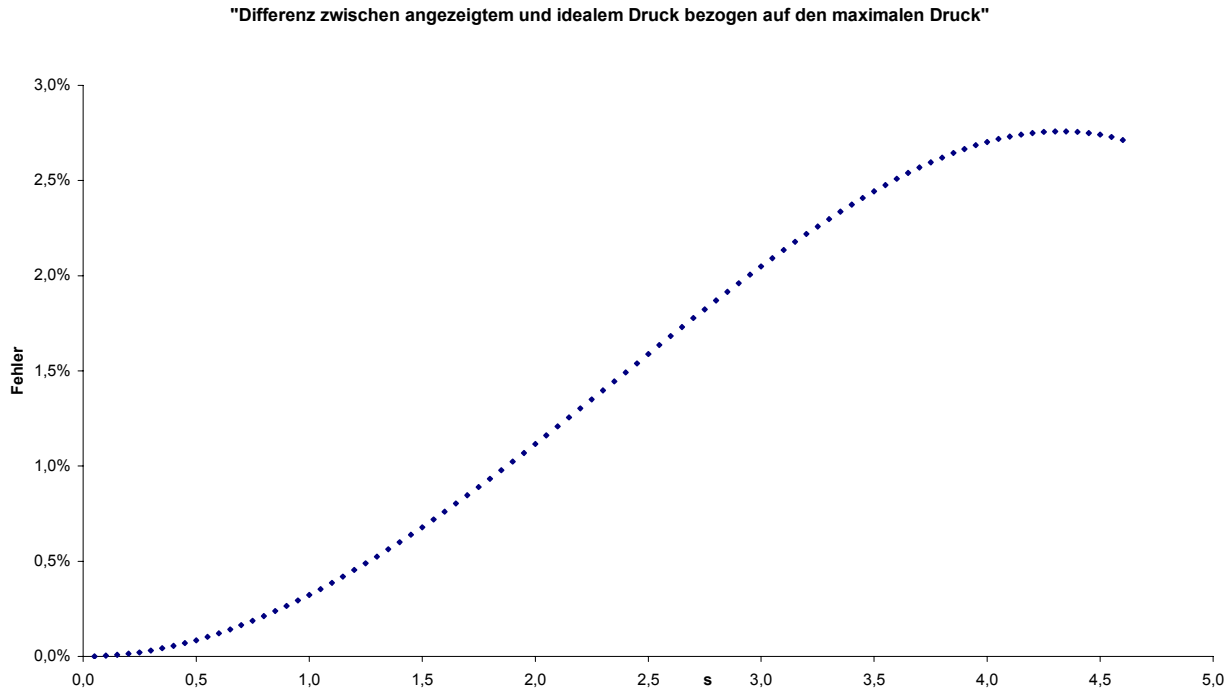
Originalgerät



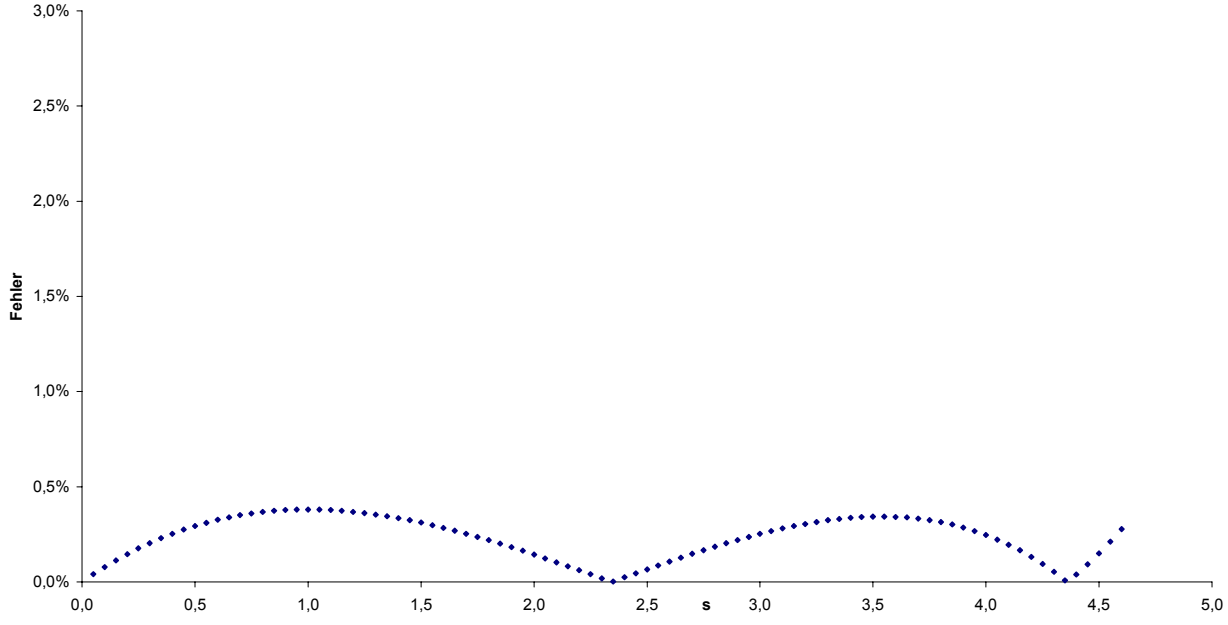


Optimiertes Gerät

Originalgerät



Optimiertes Gerät



Für die Simulation des optimierten Druckmessgerätes wurden folgende Werte verwendet:

r = 6,1 (U-förmiges Justierstück)

c_1 = 6,7 und c_2 = 10,36 (Koordinaten des Punktes C)

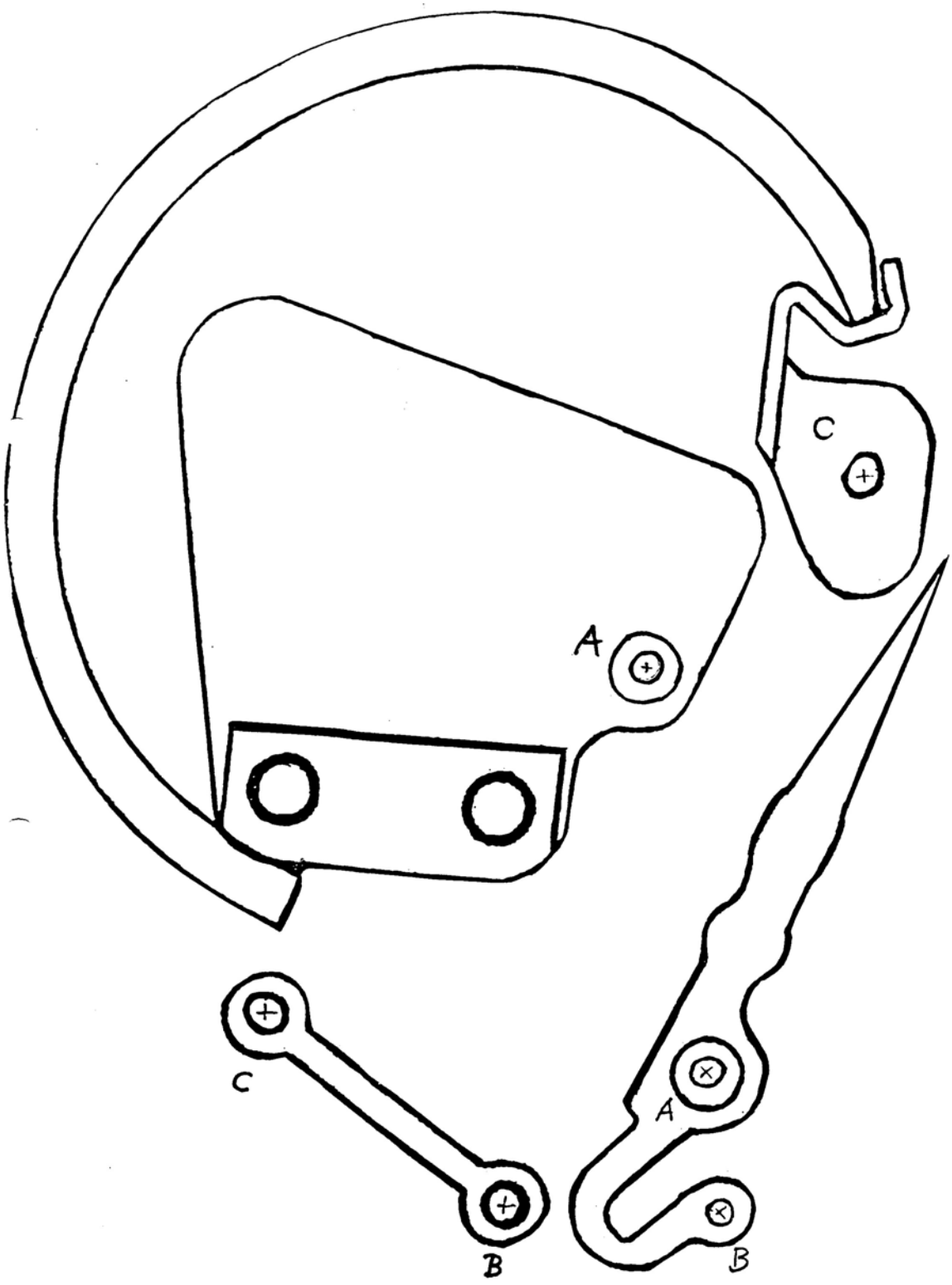
Der maximale Fehler liegt bei diesem optimierten Gerät unter 0,4%, während er bei dem Originalmessgerät mehr als 2,5% beträgt.

Natürlich kann auch durch eine andere Wahl der Parameter der Fehler verkleinert und somit das Druckmessgerät optimiert werden (Systematisches Probieren).

Resümee:

Das Beispiel wurde im Rahmen der „Modellierungswoche“ in Lamprecht 2000 erprobt. Damals lag ein Exemplar des Druckmessgerätes vor, mit dem experimentiert werden konnte. Die Genauigkeitsklasse wurde von 2,5% auf 0,4% verbessert. Die Vorschläge der Arbeitsgruppe wurden der Herstellerfirma übermittelt und bei der Produktion umgesetzt.

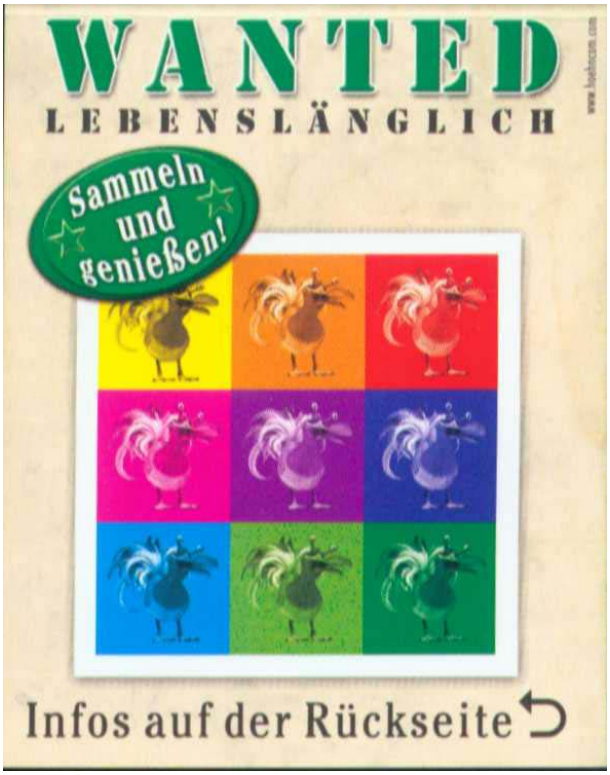
Dies ist jedoch ein seltener Glücksfall. Eine Überprüfung der im Modell gewonnenen Ergebnisse unter Produktionsbedingungen wird in der Regel nicht möglich sein.



Schablone zum Bau eines Druckmessgerätes

„Elvis im Schraubverschluss“

In den Monaten Mai, Juni, Juli 2003 führt die Privat-Brauerei Bischoff als Werbeaktion ein Preisausschreiben durch. In dem genannten Zeitraum werden alle 0,5 l-Flaschen mit Schraubverschlüssen versehen, auf deren Innenseite ein farbiger „Elvis“ abgedruckt ist.



Gewinne gibt es für Kunden, die mindestens 6 verschiedenfarbige Elvise gesammelt haben.

6 Farben: Ein attraktives Designer-Glas

7 Farben: Ein Six-Pack

8 Farben: Ein Jahr lang pro Monat ein Kasten Bischoff-Pils

9 Farben: Lebenslänglich pro Monat ein Kasten Bischoff-Pils

Aufgabe

Versetze dich in die Lage der Geschäftsführer der Brauerei Bischoff. Wie viele Schraubverschlüsse der verschiedenen Farben hättest Du bestellt?

Information:

Im Jahr 2002 betrug der „Ausstoß“ in 0,5 l-Flaschen im Mai 5375 hl, im Juni 5519 hl und im Juli 5260 hl (Originaldaten der Brauerei Bischoff).

Arbeitsweise: Gruppenarbeit

1. „Elvis im Schraubverschluss“
   (Die Schülerinnen und Schüler sollen dem Geschäftsführer einer Brauerei einen Vorschlag für die Häufigkeitsverteilung der Losarten bei einem Preisausschreiben machen.)
2. Die Struktur des Preisausschreibens gibt der Geschäftsführer vor. Anhand marktwirtschaftlicher Überlegungen erhält man einen ersten Vorschlag für eine Häufigkeitsverteilung. Diese wird mithilfe eines Tabellenkalkulationsblatts und/oder eines Simulationsprogramms getestet und an die wirtschaftlichen Erfordernisse angepasst.
3. Ausschreibungstext des Preisausschreibens, Produktionsdaten des Brauerei, Computer, Internet
4. Ab Klasse 10
   absolute und relative Häufigkeit, Ziehen mit und ohne Zurücklegen
   Grundkenntnisse im Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm:
   - absolute und relative Bezüge
   - Umgang mit Formeln
   - Diagrammen erstellen
   - Einsatz von Zufallszahlen

   Zeitaufwand beträgt ca. 6 Unterrichtsstunden
5. Die Schüler berechnen aus den Produktionszahlen die Anzahl der „Lose“, schätzen die Kosten für die Preise, diskutieren über die aus Sicht des Geschäftsführers gewünschte Anzahl erster Preise und einigen sich auf einen ersten Vorschlag für eine Häufigkeitsverteilung der Farben. Anschließend simulieren sie das Preisausschreiben mithilfe eines Tabellenkalkulationsblattes und/oder eines selbst geschriebenen Programms und erarbeiten eine Präsentation für den Geschäftsführer.

Erfahrungsbericht

Das Projekt wurde in einem Leistungskurs der 12. Jahrgangsstufe erprobt.

In der Einarbeitungsphase berechneten die Schülerinnen und Schüler in Gruppen die Gesamtanzahl der benötigten Schraubverschlüsse und schätzten die Kosten ab, die der Brauerei entstehen.

Dazu führten sie Recherchen im Internet durch und tauschten Erfahrungswerte aus. Auch mögliche Marketingstrategien wurden diskutiert (s. u.). Im Plenum wurden die Ergebnisse verglichen und ergänzt.

Da die Gesamtzahl der Schraubverschlüsse sowie die Anzahl pro Teilnehmer sehr groß sind, erkannten die Schülerinnen und Schüler schnell, dass das Problem mit Hilfsmitteln aus der Kombinatorik nicht zu lösen ist. Daher einigte man sich darauf, das Preisausschreiben mithilfe von Computern zu simulieren. Die Simulationen sollte dazu geeignet sein, zu untersuchen, welche Farbverteilungen zu Gewinnerzahlen führen, die zur gewünschten Marketingstrategie passen. Im Plenum wurde festgelegt, welche Daten variabel eingegeben werden und welche ausgegeben werden sollten.

Eine Gruppe von Schülern, die auch das Fach Informatik gewählt hatten, programmierte in der dort eingeführten Programmiersprache (in diesem Fall Delphi), die übrigen erstellten Tabellenkalkulations-Datenblätter (s. CD). Bei Verwendung der Tabellenkalkulation beschränkten sich die Schülerinnen und Schüler mit Hinweis auf die große Gesamtzahl von Schraubverschlüssen (über 3 Millionen) auf das Modell „Ziehen mit Zurücklegen“. (Eine von der Lehrkraft erstellte Simulation des Modells „Ziehen ohne Zurücklegen“ ist auf der beiliegenden CD zu finden.) Mit-

hilfe der Tabellenblätter wurde eine Person simuliert, die eine große Zahl von Schraubverschlüssen „zieht“. Um Aussagen über die Häufigkeiten von Preisträgern machen zu können, müsste man viele Personen simulieren, die jeweils eine große Zahl von Schraubverschlüssen „ziehen“. Dies ist bei dem in der Erprobung verwandten Tabellenkalkulationsprogramm nur mit sehr speziellen Kenntnissen zu realisieren. Hier wurde die Stärke des selbstgeschriebenen Programms deutlich. Die Informatikergruppe simulierte eine variable Zahl von Personen, die jeweils eine feste, vom Benutzer eingegebene Zahl von Schraubverschlüssen ohne Zurücklegen zieht. Ausgegeben wird die ermittelte Häufigkeitsverteilung der Preise.

Zum Abschluss der Unterrichtsreihe präsentierte der Kurs seine Ergebnisse einem der beiden Geschäftsführer der Brauerei Bischoff. Die von den Schülern vorgeschlagenen Häufigkeitsverteilungen der Farben kamen der von der Brauerei gewählten sehr nahe.

Während der Präsentation wurde die von der Brauerei gewählte Farbverteilung mithilfe der Datenblätter und des Delphi-Programms getestet. Die Testergebnisse führten zu einer Änderung der Farbverteilung bei der Nachbestellung der Schraubverschlüsse.

Hinweise

Ist die Rekursionstiefe des Tabellenkalkulationsprogramms kleiner als acht, so reicht dies für die Interpretation der Zufallszahlen als eine von neun Farben in einem Feld nicht aus. Man muss die Interpretation auf zwei Felder verteilen.

Für die Durchführung des Projektes einschließlich Präsentation wurden 8 Unterrichtsstunden verwendet.

Zur Einführung in die Handhabung des Tabellenkalkulationsprogramms Excel eignen sich die Seiten 21ff in „Statistik mit Excel 5 oder 7“ (Oldenbourg, 3-486-24820-0) von Prof. Dr. Wilhelm Erben.

Die Brauerei Bischoff verwendete folgende Verteilung: je 1 000 000 Stück der Farben 1 und 2, 500 000 Stück der Farbe 3, je 250 000 Stück der Farben 4 und 5, 5 000 Stück der Farbe 6, 2 000 Stück der Farbe 7, 500 Stück der Farbe 8 und 100 Stück der Farbe 9.

Auf den folgenden Seiten finden sich Schülertexte.

Wanted

Vorüberlegungen

Kosten:

Erhöhte Kosten durch:

- Farbige Deckel
- Zusätzliche Werbung
- Preise

Erhöhter Umsatz durch:

- Werbewirkung
- Reiz des Gewinnspiels

Erwünschter Effekt:

- Erhöhter Bekanntheitsgrad bei jüngeren Käufern
- Erhöhter Umsatz nach der Aktion

Überlegungen zum Gewinnspiel:

9 Deckel

Gewinne gibt es ab 6 verschiedenen Deckel

➔ es müssen 4 Farben seltener sein als die anderen Farben

Der 9te Deckel, muss sehr selten sein damit ein gewisser Sammeleffekt entsteht / mehr Bier gekauft wird.

Preise können meist aus der Überproduktion abgezweigt werden -> Es entstehen nicht viel Kosten für die Preise.

Der größte Anteil der Kosten entsteht durch Werbung.

Programm

Eingabe:

- Anzahl der getrunkenen Kästen/Sixpacks/Flaschen pro Monat in der Zielgruppe
- Anzahl der Flaschen pro Kasten
- Dauer der Kampagne
- absolute Verteilung der Farben in den Deckeln
- Anzahl der Simulationen (Testperson, die an der Aktion teilnehmen)

Grundidee:

Aus der Verteilung der Farben in den Deckeln, wird die Wahrscheinlichkeit für jede Farbe ausgerechnet, mit der sie gezogen werden kann. Bei jedem Versuch wird für alle getrunkenen Flaschen der „Testperson“ aus der Zielgruppe eine Zufallszahl bestimmt und daraus eine Farbe interpretiert. Jedes Mal, wenn eine Farbe gezogen wird, wird die Wahrscheinlichkeit für die Farben neu ausgerechnet, da sich aufgrund der gezogenen Farbe die Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle Farben nun geändert hat (Ziehen ohne zurücklegen).

Verarbeitung:

Bei jedem Versuch wird für alle getrunkenen Flaschen der „Testperson“ aus der Zielgruppe eine Zufallszahl bestimmt und daraus eine Farbe interpretiert die wird in einem Array gespeichert.

Ausgabe

Aus der Anzahl der verschiedenen Deckel wird nun die Anzahl der gewonnen Preise in der Zielgruppe bestimmt und ausgegeben.

Mögliche Verteilung der Farben

Unter Berücksichtigung des „Ausstoßes“ vom letzten Jahr wurde eine Gesamtzahl von 3.230.800 Flaschen ermittelt. Da auf der Homepage der Bischoff - Brauerei angegeben wurde, dass es insgesamt 7500 Möglichkeiten gibt, Preise zu gewinnen, und es erst ab 6 verschiedenen Farben Preise gibt, müssten 5 Farben häufig vorkommen und die letzten 4 Farben nur 7500.

Wahrscheinlichkeit der Farben:

1.	Farbe:	644660	19,9545%
2.	Farbe:	644660	19,9545%
3.	Farbe:	644660	19,9545%
4.	Farbe:	644660	19,9545%
5.	Farbe:	644660	19,9545%
6.	Farbe:	5000	0,15476%
7.	Farbe:	2000	0,06190%
8.	Farbe:	450	0,01392%
9.	Farbe:	50	0,00154%

In den Monaten Mai, Juni und Juli 2003 führt die Privatbrauerei Bischoff als Werbeaktion ein Preisausschreiben durch. In dem genannten Zeitraum werden alle 0,5 l-Flaschen mit Schraubverschlüssen versehen, auf deren Innenseite ein farbiger „Elvis“ abgedruckt ist.

Gewinne gibt es für Kunden, die mindestens 6 verschiedene Elvise gesammelt haben.

6 Farben: Ein attraktives Designerglas

7 Farben: Ein Six-Pack

8 Farben: Ein Jahr lang pro Monat ein Kasten Bischoff-Pils

9 Farben: Lebenslänglich pro Monat ein Kasten Bischoff-Pils

Fakten, Fakten, Fakten:

- Es werden in diesem Zeitraum 3.230.800 0,5 l-Flaschen abgefüllt.
- Es gibt 16 verschiedene Biersorten, die in Flaschen mit Drehverschluss abgefüllt werden.
- Teilnehmer müssen mindestens 18 Jahre alt sein.

Vorüberlegungen:

- Kostenabdeckung:
  1. Es entstehen zusätzliche Kosten durch den „Elvis“-Aufdruck in den Flaschendeckeln.
  2. Es entstehen zusätzliche Kosten durch die zu vergebenden Preise, vor allem durch die Designergläser sowie die Six-Packs.
  3. Durch die Aktion entstehen zusätzliche Kosten durch spezielle Werbeaktionen.
  4. Durch die Bierpräsente entsteht nur ein geringer zusätzlicher Kostenaufwand, da fast alles durch die in einem solchen Betrieb vorhandene Überproduktion abgedeckt werden kann.
  5. Alle zusätzlich entstandenen Kosten sollten durch den Mehrverkauf an Bier während der Aktion (und eventuell auch danach) mindestens abgedeckt werden.
- Verteilung der Deckel:

1. Anzahl der Deckel: Für unterschiedliche Farben gibt es je eine unterschiedliche Anzahl an vorhandenen Deckeln. Die Wahrscheinlichkeit die Farben hellblau, dunkelblau, hellgrün und dunkelgrün zu erhalten, ist geringer als die Wahrscheinlichkeit die restlichen Farben zu bekommen. Es ist somit sehr unwahrscheinlich, alle 9 verschiedenen Farben zu finden.
2. Zeitliche Verteilung: 5 der 9 Farben sind über den gesamten Zeitraum in den Deckeln vorhanden. 2 weitere Farben werden im ersten Monat, in den anderen beiden Monaten jeweils eine weitere Farbe hinzugefügt. Die 4 hinzugefügten Farben sind nur in limitierter Anzahl vorhanden.
3. Biersorten: Die verschiedenen Farben sind bestimmten Biersorten zugeteilt. So kann man manche Farben nur dann erhalten, wenn man die verschiedenen Biersorten trinkt.

Serielle Datenübertragung

Im Zeitalter von Internet, Telebanking, e-mail und sms werden große Datenmengen zwischen Computersystemen ausgetauscht. Für die Sender und Empfänger solcher digitaler Informationen ist die Zuverlässigkeit der Übertragung von großer Bedeutung. Sie müssen sich darauf verlassen können, dass der Empfänger genau die gleiche Information erhält, die der Sender abgeschickt hat. Nicht nur bei Finanzgeschäften haben kleine Fehler, wie z.B. die Änderung eines Vorzeichens, große Wirkung. Daher werden bei der Datenübertragung sogenannte Sicherheitsprozeduren eingesetzt.

01101101 0

<---------->

Digitale Informationen bestehen aus einer Folge von Nullen und Einsen. Eine einzelne Null oder Eins wird Bit genannt. Zur Übertragung der Information wird die Folge in Abschnitte zu je acht Bit, sogenannten Bytes, unterteilt. Die Wahrscheinlichkeit für die richtige Übertragung eines Bits lässt sich experimentell leicht bestimmen und wird im Folgenden p genannt. Die Übertragung der Informationen erfolgt byteweise.

Um die Fehlerrate bei der Datenübertragung zu verringern, kann folgendes Verfahren angewendet werden: Jedes Byte erhält ein Prüfbit oder Paritätsbit, das mitgesendet wird. Dieses Paritätsbit ist 0, wenn die Anzahl der Zeichen „1“ im Byte ungerade ist.

Beispiele:	Byte	Prüfbit
	01101101	0
	00011000	1

Beim Empfänger wird für das empfangene Byte das Paritätsbit berechnet und mit dem empfangenen Paritätsbit verglichen. Stimmen beide nicht überein, wird die Übertragung unterbrochen und das zuletzt gesendete Byte wird erneut angefordert.

Beispiele:	**gesendet**		**empfangen**			
	Byte	Prüfbit	Byte	Prüfbit	berechnetes Prüfbit	Entscheidung
	01101101	0	01101101	0	0	korrekt
	01101101	0	01**0**01101	0	1	neu

Für die Unterbrechung und erneute Anforderung sowie die zugehörigen Bestätigungen sind neben der erneuten Übermittlung des fehlerhaften Bytes mit zugehörigem Prüfbit insgesamt 11 zusätzliche gesendete bzw. empfangene Bit erforderlich.

1. Serielle Datenübertragung
   (Gesucht ist die Fehlerquote bei der Datenübertragung und die Übertragungsrate bei diesem Verfahren.)
2. Die Bearbeitung des Problems setzt voraus, dass das im Text beschriebene Verfahren in seinen einzelnen Schritten genau verstanden wurde. Eventuell ist die Bereitstellung geeigneter Literatur aus der Informatik sinnvoll.
3. Es sind Kenntnisse in Tabellenkalkulation oder in einer einfachen Programmiersprache erforderlich.
4. Ab Klasse 11
   Je nach Bearbeitungsart sind Kenntnisse aus dem Bereich rekursive Folgen, Bernoulli-Verteilungen, Baumdiagrammen oder Simulation von Zufallsexperimenten erforderlich. Der Zeitbedarf beträgt mindestens 4 Stunden.
5. Damit tatsächlich alle auftretenden Fälle erfasst werden, sind ggf. entsprechende Hilfen und Hinweise erforderlich!

Bearbeitung in einem Grundkurs der Jahrgangstufe 12:

Wahrscheinlichkeiten
- r: Byte korrekt übertagen
- f : Byte falsch übertragen
- p: Prüfbit korrekt übertragen
- q: Prüfbit falsch übertragen

Damit erhält man die folgenden Fälle:

1. Das gesendete Byte wird mit der Wahrscheinlichkeit r richtig übertragen, das Prüfbit mit der Wahrscheinlichkeit p. Die Wahrscheinlichkeit für die richtige Übertragung mit Anerkennung durch den Empfänger ist also r·p.
2. Wird das Byte richtig und das Prüfbit falsch übertragen, wird das Byte zwar fälschlicherweise erneut angefordert, die Übertragung wird dadurch trotzdem nicht inkorrekt. Wahrscheinlichkeit dafür ist r·q.
3. Wird das Byte falsch und das Prüfbit richtig übertragen, so wird das Byte beim Empfänger auch als falsch erkannt und erneut angefordert. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt f·p.
4. Schließlich können sowohl das Byte als auch das zugehörige Prüfbit falsch übertragen und dadurch beim Empfänger trotzdem als richtig anerkannt werden. Die Übertragung ist also falsch. Dieser Fall hat die Wahrscheinlichkeit f·q.

Einige Arbeitsgruppen hielten das Problem damit schon für gelöst. Da $r = p^8$ gilt, ergibt sich für den Fall 1 die Wahrscheinlichkeit p^9.

Durch die Fälle 2 und 3 wird die Übertragungsrate herabgesetzt, da nun 11 zusätzliche Zeichen gesendet werden müssen. Die Wahrscheinlichkeit für die Übertragung dieser 11 zusätzlichen Zeichen beträgt wegen $f = 1 – r$ also insgesamt $p^8 \cdot (1–p) + (1–p^8) \cdot p$.

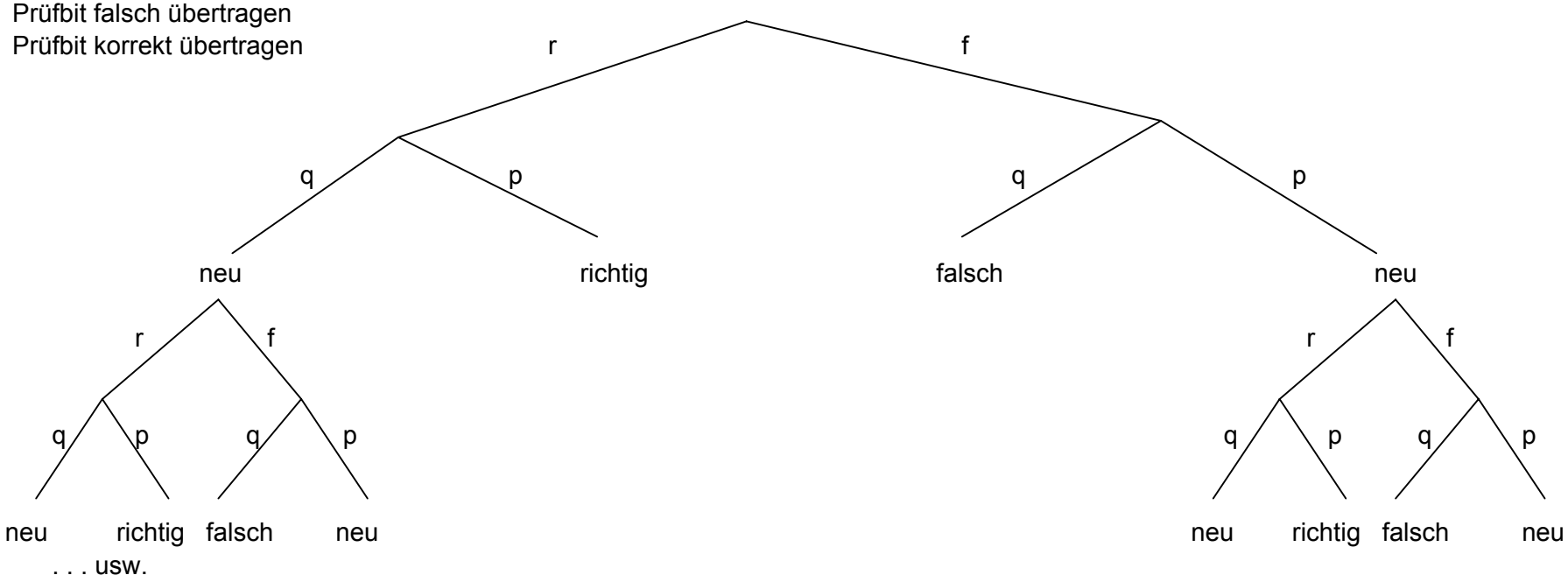
Die Fehlerrate bei der Übertragung ergibt sich direkt aus dem 4. Fall und beträgt $(1–p^8) \cdot (1–p)$.

Damit erhält man für die Übertragung eines Bytes als Erwartungswert für die Anzahl der gesendeten Zeichen $E = [p^9 + (1–p^8) \cdot (1–p)] \cdot 9 + [p^8 \cdot (1–p) + (1–p^8) \cdot p] \cdot 20$.

Zwei der 5 Arbeitsgruppen erkannten aber selbstständig, dass bei der erneuten Übertragung die Fälle 1 bis 4 wieder auftreten können. Dadurch wird die Übertragungsrate weiter reduziert und die Fehlerrate erhöht. Die Übertragung wurde mithilfe des folgenden Baums dargestellt:

r: Byte korrekt übertagen
f : Byte falsch übertragen

q: Prüfbit falsch übertragen
p: Prüfbit korrekt übertragen



1. Übertragung:
   - richtig rp
   - falsch fq
   - neu rq + fp

2. Übertragung
   - richtig rp + (rq + fp)rp
   - falsch fq + (rq + fp)fq
   - neu $(rq + fp)^2$

3. Übertragung
   - richtig rp + (rq + fp)rp + $(rq + fp)^2$rp
   - falsch fq + (rq + fp)fq + $(rq + fp)^2$fq
   - neu $(rp + fp)^3$

usw.

Da dem Kurs die Summenformel für geometrische Reihen nicht bekannt war, konnten die Schülerinnen und Schüler den Erwartungswert nicht in geschlossener Form angeben. Sie kamen jedoch auf die Idee, die einzelnen Glieder der Summe mit einem Tabellenkalkulationsprogramm zu berechnen und die Summanden zu addieren.

Das Modell enthält jedoch einen Fehler, den die Schülerinnen und Schüler nicht selbst erkannten:

Ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bit richtig übertragen wird, so ist $r = p^8$ die Wahrscheinlichkeit für die richtige Übertragung eines Bytes. Entsprechend ist $f = 1 - r$ die Wahrscheinlichkeit, dass *mindestens* ein Bit falsch übertragen wird. Werden in einem Byte aber z. B. 2, 4, 6 oder gar alle 8 Bits falsch übertragen, so wird bei korrekter Übertragung des Prüfbits der Übertragungsfehler nicht erkannt.

Verfolgt man diesen Gedanken weiter, so ergeben sich die folgenden 6 Fälle:

1. Byte und Prüfbit wurden korrekt übertragen. Dann wird das übertragene Byte beim Empfänger als richtig anerkannt. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist dann
$$r \cdot p = p^8 \cdot p$$

2. Das Byte wurde richtig übertragen, das Prüfbit aber falsch. Dann wird das Byte beim Empfänger fälschlich als falsch erkannt und erneut angefordert. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt $r \cdot q = p^8 \cdot q$

3. Das Byte enthält eine ungerade Zahl von fehlerhaften Bits, das Prüfbit wird korrekt übertragen. Dann wird das gesendete Byte beim Empfänger korrekt als falsch eingestuft und erneut angefordert. Dieser Fall tritt auf mit der Wahrscheinlichkeit
$$\left(8 \cdot p^7 q + \binom{8}{3} \cdot p^5 q^3 + \binom{8}{5} \cdot p^3 q^5 + 8 \cdot p q^7\right) \cdot p$$

4. Das Byte enthält eine gerade Anzahl von fehlerhaften Bits und das Prüfbit wird falsch übertragen. Dann wird das Byte vom Empfänger erneut angefordert mit der Wahrscheinlichkeit
$$\left(\binom{8}{2} \cdot p^6 q^2 + \binom{8}{4} \cdot p^4 q^4 + \binom{8}{6} \cdot p^2 q^6 + q^8\right) \cdot q$$

5. Das Byte enthält eine ungerade Anzahl fehlerhafter Bits, das Prüfbit wurde falsch übertragen. Dann wird das Byte vom Empfänger als richtig eingestuft, obwohl es tatsächlich fehlerhaft ist. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall beträgt
$$\left(8 \cdot p^7 q + \binom{8}{3} \cdot p^5 q^3 + \binom{8}{5} \cdot p^3 q^5 + 8 \cdot p q^7\right) \cdot q$$

6. Das Byte enthält eine gerade Anzahl von fehlerhaften Bits und das Prüfbit wird richtig übertragen. Dann wird das Byte als richtig eingestuft, obwohl es tatsächlich falsch ist. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt
$$\left(\binom{8}{2} \cdot p^6 q^2 + \binom{8}{4} \cdot p^4 q^4 + \binom{8}{6} \cdot p^2 q^6 + q^8\right) \cdot p$$

In den Fällen 5 und 6 wurde das Byte falsch übertragen, in den Fällen 2 bis 4 wird das Byte erneut angefordert und die Betrachtung muss erneut geführt werden.

Die Berechnung der Fehlerquote und der Erwartungswerte wird nun sehr aufwändig, da beide Werte von der Anzahl der erneuten Anforderungen abhängen. Erst mit starken Hilfen kamen die Schülerinnen und Schüler zu einem brauchbaren Ergebnis. Bei einer realistischen Fehlerwahrscheinlichkeit von 10^{-5} pro Bit ergibt sich eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $8 \cdot 10^{-5}$ pro Byte. Mit dem Prüfverfahren wird die Fehlerrate auf etwa $3{,}6 \cdot 10^{-9}$ reduziert. Das stimmt in der Größenordnung mit den in der Literatur genannten Werten überein.

Bei Fehlerraten von 10^{-5} und kleiner ist die Wahrscheinlichkeit für 2 und mehr fehlerhafte Bits in einem Byte so gering, dass die genauere Betrachtung im zweiten Teil mit ihren 6 Fällen fast die gleichen Ergebnisse wie die fehlerhafte erste Betrachtung liefert. Um den Fehler in der Betrachtung deutlicher zu betonen, ist es sicher sinnvoll, zunächst einmal Fehlerquoten von 0,1% bis 1% zu betrachten.

Das Problem lässt sich jedoch auch relativ einfach und übersichtlich mit einer entsprechend programmierten Simulation lösen (Vgl. Lehrplan S II, Stochastik).

Siegchancen beim Tennis

Platz	Name	Land	Punkte	Turniere
1.	Roger Federer	SUI	6760	21
2.	Andy Roddick	USA	3770	23
3.	Lleyton Hewitt	AUS	3055	18
4.	Tim Henman	GBR	2825	20
5.	Guillermo Coria	ARG	2820	21
6.	Carlos Moya	ESP	2670	24
7.	Andre Agassi	USA	2140	19
8.	Gaston Gaudio	ARG	1985	24
9.	Nicolas Massu	CHI	1760	30
10.	Sebastien Grosjean	FRA	1685	20
11.	JuanCarlos Ferrero	ESP	1615	20
12.	Rainer Schuettler	GER	1595	29
13.	Marat Safin	RUS	1590	22
14.	David Nalbandian	ARG	1575	17
15.	Andrei Pavel	ROM	1460	27
16.	Joachim Johansson	SWE	1454	28
17.	Tommy Robredo	ESP	1415	27
18.	Dominik Hrbaty	SVK	1393	31
19.	Nicolas Kiefer	GER	1350	25
20.	Paradorn Srichaphan	THA	1280	29
21.	Fernando Gonzalez	CHI	1280	24
22.	JuanIgnacio Chela	ARG	1255	28
23.	Gustavo Kuerten	BRA	1230	20
24.	Vincent Spadea	USA	1165	26
25.	Jiri Novak	CZE	1130	25
26.	Ivan Ljubicic	CRO	1105	23
27.	Mardy Fish	USA	1105	23
28.	Taylor Dent	USA	1080	25
29.	Mario Ancic	CRO	1070	25
30.	Guillermo Canas	ARG	1064	24

Ein Tennismatch besteht aus 2 oder 3 Gewinnsätzen, d.h. der Spieler, welcher zuerst 2 bzw. 3 Sätze gewonnen hat, ist Sieger. Ein Satz besteht aus einzelnen *Spielen*, in denen abwechselnd einer der beiden Spieler das Aufschlagsrecht besitzt. Innerhalb eines solchen Aufschlagspieles bekommt ein Spieler, der einen Ballwechsel für sich entscheidet, Punkte in den Stufen 15, 30, 40, *Spiel*. Wer zuerst die Stufe *Spiel* (4 Gewinnpunkte) erreicht, gewinnt das Spiel – haben allerdings beide Spieler 40 Punkte, so nennt man den Spielstand *Einstand* und das Aufschlagspiel wird so lange fortgesetzt, bis einer der beiden zwei Gewinnpunkte Vorsprung hat.

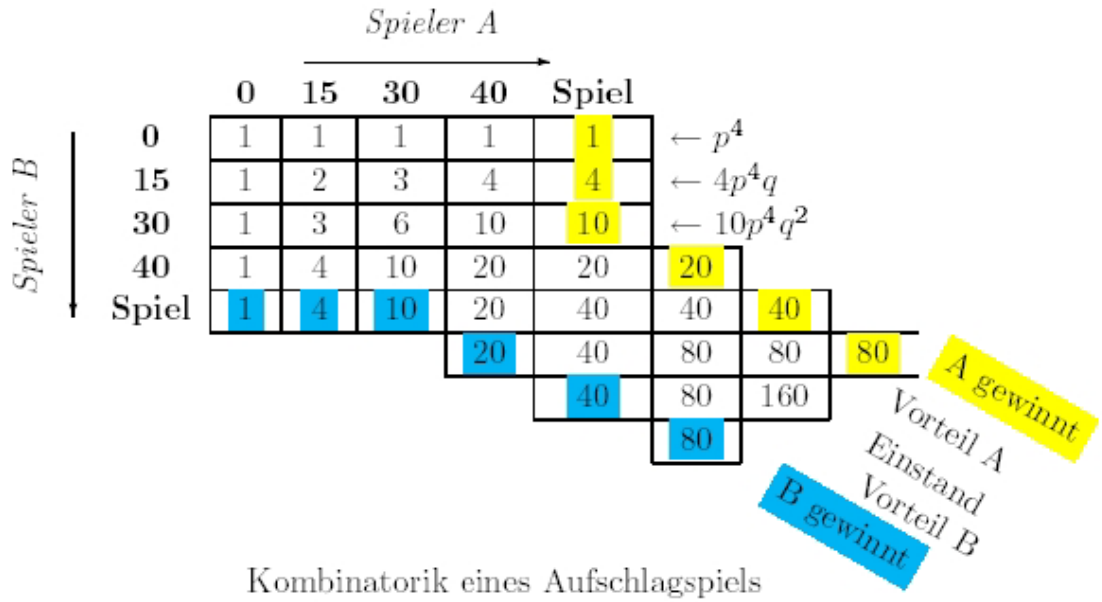
Für den Gewinn eines Satzes muss ein Spieler mindestens 6 Spiele gewinnen. Beim Stand von 5:5 wird allerdings bis 7 verlängert, d.h. ein Spieler gewinnt beim Stand von 7:5 bzw. 5:7. Beim Stand von 6:6 wird ein sogenannter *Tie-Break* gespielt. Dieser läuft ähnlich einem normalen Spiel ab, nur dass die Punkte 0, 1, 2, ... gezählt werden. Den Tie-Break gewinnt, wer zuerst 7 Punkte und mindestens 2 Punkte Vorsprung hat. Das Aufschlagsrecht wechselt hierbei nach dem ersten Punkt und anschließend alle 2 Punkte. Allerdings wird der letzte Satz, bei den Herren der 5., bei den Damen der 3., nicht durch Tie-Break entschieden, sondern solange fortgesetzt, bis einer der beiden Spieler zwei Spiele Vorsprung hat.

1. Siegchancen beim Tennis
   (Wie hängt die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Matches von der Wahrscheinlichkeit p ab, mit der einer der Spieler einen Ballwechsel für sich entscheidet?)
2. Unter der Annahme, dass p das ganze Match hindurch konstant ist, wird die Gewinnwahrscheinlichkeit mithilfe von Bernoulli-Ketten und geometrischen Reihen modelliert.
3. Tabellenkalkulationsprogramm
4. MSS 12
   Kombinatorik, Bernoulli-Ketten, Summenformel für geometrische Reihen
5. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Spiels, eines Tie-Breaks, eines Satzes mit Tie-Break und eines Satzes ohne Tie-Break bestimmt. Aus den Ergebnissen wird auf die Matchgewinnchance p_M geschlossen.
   Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms wird $p_M(p)$ berechnet und der zugehörige Graph gezeichnet.

Lösungsvorschlag:

Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Spiels

Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass Spieler A einen Ballwechsel zu seinen Gunsten entscheidet. Dann ist q = 1 – p die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegner B einen Ballwechsel gewinnt.



Kombinatorik eines Aufschlagspiels

Im Diagramm sind sämtliche Kombinationen für den Verlauf eines Aufschlagspiels zusammengefasst. In den Feldern steht jeweils die Anzahl der Möglichkeiten, den entsprechenden Spielstand zu erreichen. Eine horizontale Bewegung um ein Feld nach rechts entspricht einem Punktgewinn von Spieler A, die vertikale Bewegung um ein Feld nach unten bedeutet einen Punktgewinn von Spieler B. Die Zahl in einem Feld ergibt sich als Summe der Einträge

im Feld darüber und links daneben, wobei diese Einträge nur gezählt werden, wenn sie nicht zum Spielstand *gewonnenes Aufschlagspiel* gehören.

Bezeichnet man die Anzahl der von A gewonnen Punkte mit n und die Anzahl der von B gewonnen Punkte mit m und multipliziert $p^n q^m$ mit der Anzahl der Möglichkeiten einen Spielstand zu erreichen, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser erreicht wird.

Demnach gewinnt Spieler A das Spiel, falls es nicht über Einstand geht, mit der Wahrscheinlichkeit $p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2$. Geht das Spiel über Einstand, so kann das Spiel theoretisch unendlich lange dauern und die Gewinnwahrscheinlichkeit für Spieler A ist

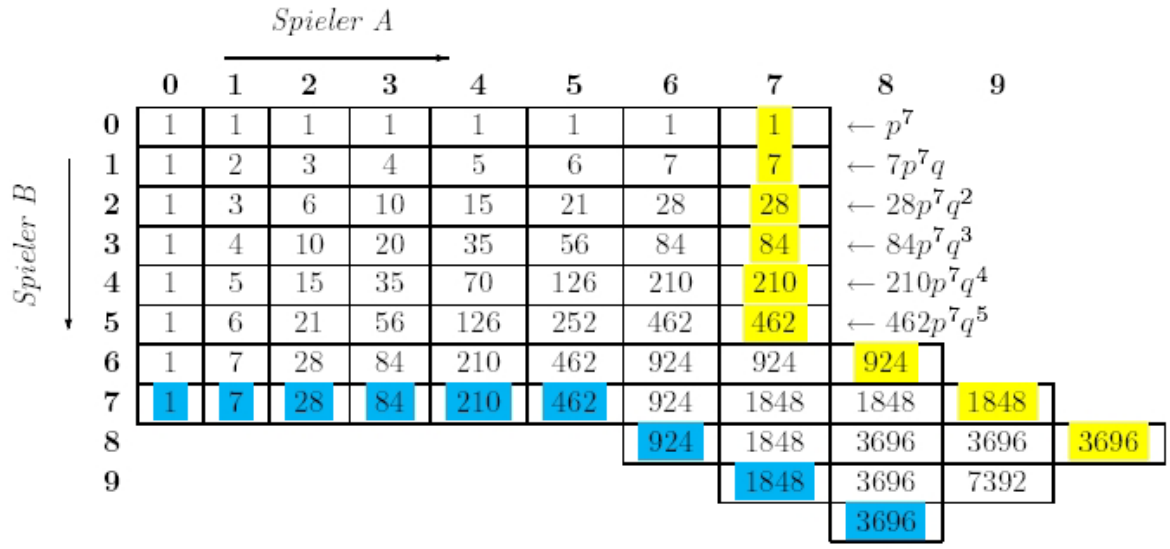
$$20p^5q^3 + 40p^6q^4 + 80p^7q^5 + \ldots = 10p^4q^2\sum_{k=1}^{\infty}(2pq)^k .$$

Unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen ergibt sich insgesamt für die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Aufschlagspiel gewinnt

$$p_A = p^4 + 4p^4q + 10p^4q^2\sum_{k=0}^{\infty}(2pq)^k = p^4 + 4p^4q + \frac{10p^4q^2}{1-2pq} \qquad (1).$$

Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Satzes mit oder ohne Tie-Break

Zunächst ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Tie-Breaks analog aus

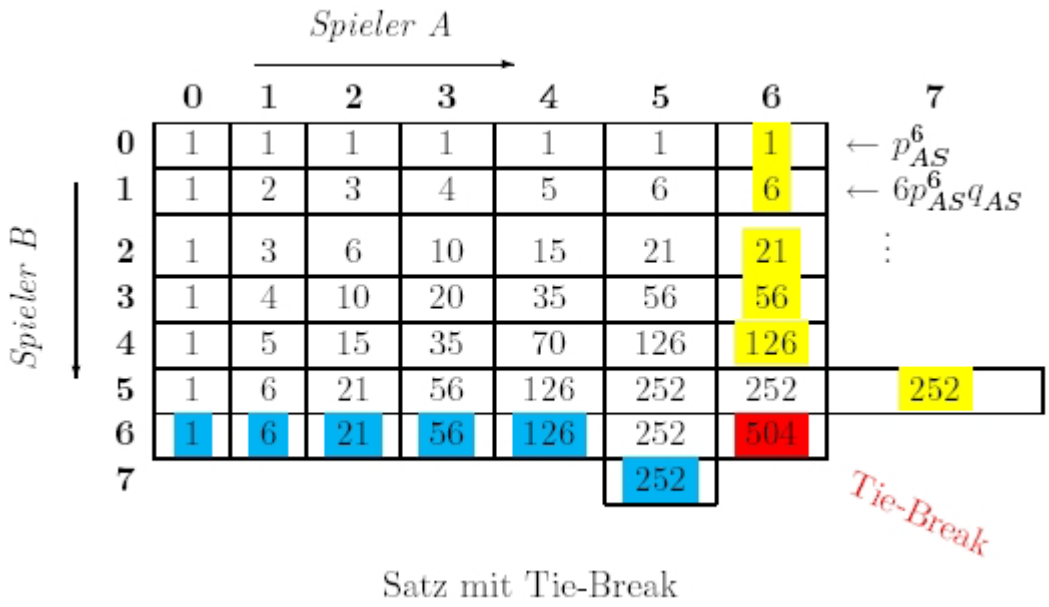


Ein Tie-Break

zu $$p_T = p^7 + 7p^7q + 28p^7q^2 + 84p^7q^3 + 210p^7q^4 + \frac{462p^7q^5}{1-2pq} \qquad (2).$$

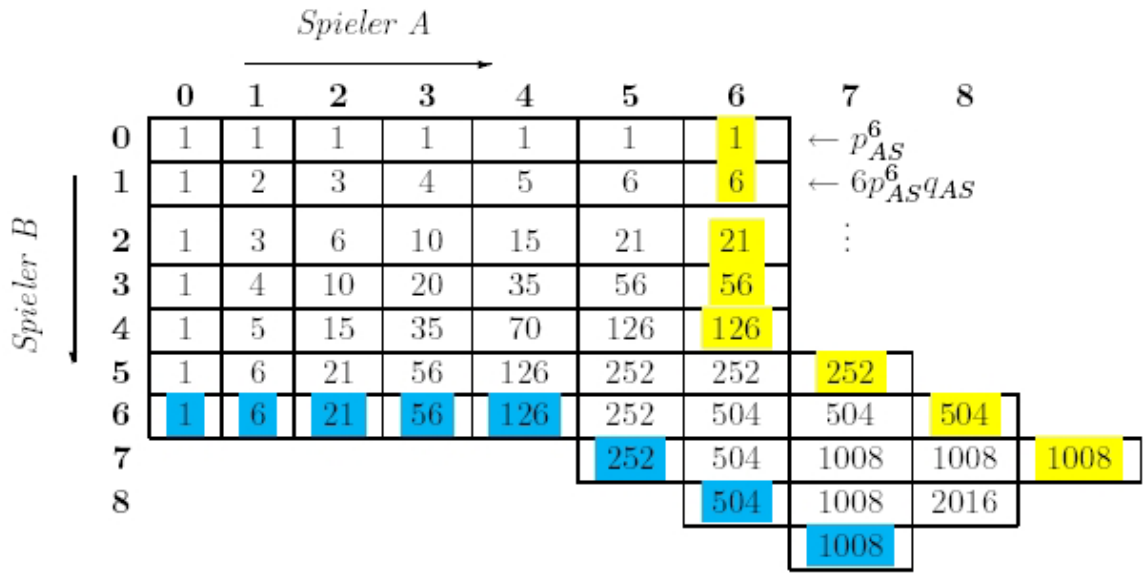
Für einen Satz mit Tie-Break erhält man aus untenstehendem Diagramm analog

$$p_{ST} = p_A^6 + 6p_A^6q_A + 21p_A^6q_A^2 + 56p_A^6q_A^3 + 126p_A^6q_A^4 + 252p_A^7q_A^5 + 504p_A^6q_A^6p_T \qquad (3).$$



Satz mit Tie-Break

Für einen Satz ohne Tie-Break ist die Lösung sogar einfacher:

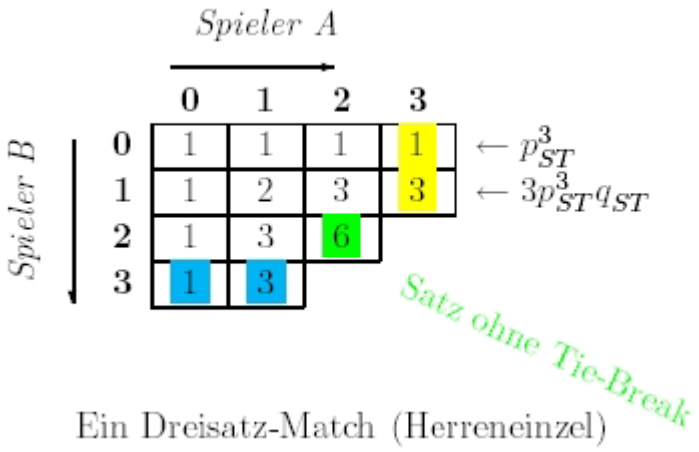


Satz ohne Tie-Break

$$p_S = p_A^6 + 6p_A^6 q_A + 21p_A^6 q_A^2 + 56p_A^6 q_A^3 + \frac{126p_A^6 q_A^4}{1 - 2p_A q_A} \qquad (4).$$

Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Matchs

Wie oben kann der Verlauf eines Tennismatchs mit drei Gewinnsätzen in einem Diagramm dargestellt werden:

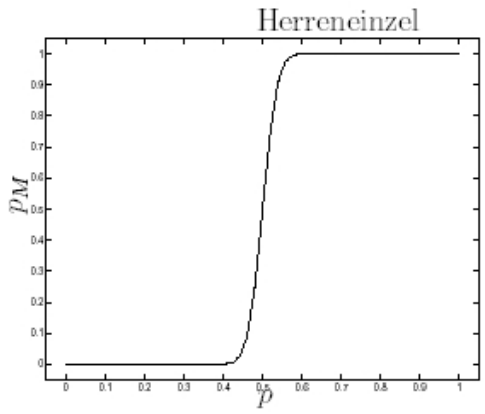


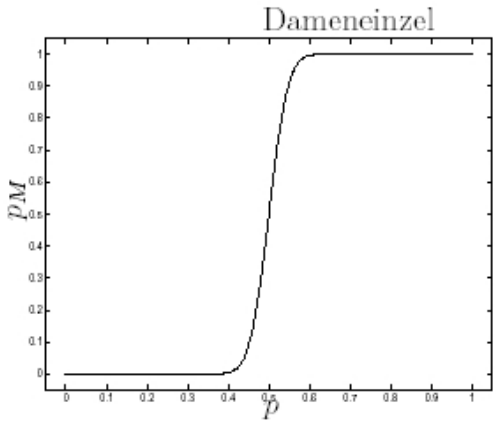
Ein Dreisatz-Match (Herreneinzel)

Für die Wahrscheinlichkeit, ein Dreisatzmatch zu gewinnen, ergibt sich

$$p_M = p_{ST}^3 + 3p_{ST}^3 q_{ST} + 6p_{ST}^3 q_{ST}^2 p_S \qquad (5).$$

Setzt man die Beziehungen (1), (2), (3) und (4) in (5) ein, so ergibt sich ein sehr unhandlicher Term, zu dessen Berechnung der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms zu empfehlen ist.





Obige Graphen zeigen den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit p_M, das Match zu gewinnen, und der Wahrscheinlichkeit p, einen Ballwechsel für sich zu entscheiden. Die Ergebnisse für das Dameneinzel, zwei Gewinnsätze, erhält man analog zu den hier dargestellten Überlegungen für das Herreneinzel, drei Gewinnsätze.

Ist Tennis ein faires Spiel?

Zunächst stellt man wegen $p_M(0,5) = 0,5$ fest, dass bei gleicher Spielstärke jeder der Spieler die gleichen Gewinnchancen hat. Daher könnte man versucht sein, obige Frage mit ja zu beantworten. Berücksichtigt man jedoch, dass der Graph über dem Intervall [0,4; 0,6] sehr steil verläuft, so kommt man zu dem Ergebnis, dass kleine Änderungen von p große Änderungen von p_M zur Folge haben. Bei einem fairen Spiel würde man erwarten, dass sich die Chancen für den Matchgewinn bei geringen Formschwankungen nur leicht ändern. Dies ist hier nicht der Fall.

Nimmt man das Ergebnis ernst, so müssen die Leistungsunterschiede bei den Spitzenspielern sehr fein sein, da die 30 weltbesten Spieler in der Lage sind alle anderen Spieler dieser Gruppe zu schlagen.

Überprüfung und Bewertung der Lösung

Jeder, der Tennisspiele verfolgt hat, weiß, dass kleine Irritationen wie Unruhe im Publikum, vermeintliche Fehlentscheidungen des Schiedsrichters oder knapp ins Aus geschlagene Bälle den Verlauf eines Matchs stark beeinflussen können. Daher erscheint das Ergebnis durchaus realistisch.

Allerdings ist die Grundannahme des Modells, dass die Wahrscheinlichkeit p, einen Ballwechsel für sich zu entscheiden, das ganze Match über konstant ist, eine starke Einschränkung. In der Praxis wird sich p im Laufe eines Matches mehrfach verändern, da sein Wert

- vom Aufschlagsrecht
- von der Kondition
- von der Psyche (Spielstand, äußere Umstände, ...)
- ....

abhängt. Wollte man diese Änderungen in die Modellierung einbeziehen, so müsste das Match mithilfe einer Zufallsvariablen p simuliert werden. Dann könnte man aus einer Vielzahl von Simulationsläufen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit schließen.

Weitere Beispiele

Ballonflug

Die Ballons sind mit Helium gefüllt. Ohne Helfer ist der Pilot abgehoben.

1. Ballonflug
   (Wie viele Heliumballons sind erforderlich, um einen Menschen hochzuheben?)
2. Über grobes Abschätzen der Anzahl von Ballons auf einem Bild bis hin zur Modellierung mit unterschiedlicher Tiefe ist diese Aufgabe einsetzbar.
3. Foto und Lineal, Luftballon, Seil, Waage, Daten für die Dichte von Luft und Helium (Physikbuch), evtl. Luftdruckmesser, Eimer mit Wasser, ...
4. Ab Klasse 10
   Kenntnisse des Kugelvolumens auch schon für das Schätzen. Zur Modellierung außerdem Auftrieb in Luft (Physik z.Zt. Klasse 9), evtl. die Gasgesetze von Boyle-Mariotte.
   Zeitbedarf für Schüler: Abschätzen der Anzahl der Ballons etwa **2** Unterrichtsstunden, Berechnung des Auftriebs und Vergleich mit der Abschätzung, Verfeinern der Schätzmethode, Berücksichtigung des Drucks im Ballon **weitere 4** Unterrichtsstunden oder mehr.
5. Abschätzen der Ballongröße auf dem Bild. Angabe einer ersten Lösung ist immer möglich. Physikalischer Ansatz (Auftriebskraft = Gewichtskraft der verdrängten Luftmasse), Vergleich Rechnung und Abschätzung der Anzahl der Ballons führt zu einer Verfeinerung der beiden Methoden.

Lösungsmöglichkeiten:

Man kann die Ballons zählen oder über Volumenberechnung die Anzahl ermitteln. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Ballons zu Trauben zusammenfassen und die Ballonanzahl einer einzelnen Trauben zu schätzen.

Hinweis: Die Ballons auf dem Foto haben ein deutlich größeres Volumen als übliche Ballons.

Schülerergebnis: 2800.

Zusatzaspekt: Wie viel Prozent Zwischenraum ist zwischen den Ballons?

Schülerlösung: Sie nehmen sich Tischtennisbälle (Chemiesammlung, Atommodelle) und füllen damit einen Pappkarton. Sie stellen so fest, dass etwa 29 % des Volumens Zwischenräume zwischen den Tischtennisbällen bleiben.

Man kann die benötigte Auftriebskraft berechnen.

Gewichtskraft des Menschen + x · Gewichtskraft eines Ballons (Hülle + Gas + Seil) = x · Auftriebskraft eines Ballons

Hinweis: Dichte von Luft und Helium sind dazu erforderlich (Physikbuch).

Masse der Ballonhüllen und der Seile müssen bestimmt werden (z.B. wiegen).

Volumen eines Ballons muss ermittelt werden. Z.B. Messen mit einem Eimer mit Wasser bzw. näherungsweise als Kugel berechnen und evtl. verfeinern.

Das berechnete Ergebnis über den Auftrieb muss dann mit der geschätzten Zahl von oben in Einklang gebracht werden.

Eine weitere Verfeinerung könnte darin bestehen, den Einfluss des Drucks in den Ballons zu berücksichtigen und dann das Gesetz von Boyle-Mariotte anzuwenden. Berücksichtigt man die Temperatur des Gases, dann muss sogar das allgemeine Gasgesetz benutzt werden.

Leicht verdientes Geld?

Nebenverdienst!

Zeitungsausträger gesucht

Tel.: 06721-87120

1. Leicht verdientes Geld?
   (Das Arbeitsblatt gibt Anlass, über Zeitungsaustragen als Minijob, die Masse von Zeitungsstapeln, die Menge des in einer Gemeinde anfallenden Papiermülls sowie das Recycling von Altpapier nachzudenken.)
2. Die Aufgabe ist als Schätzübung aber auch als Grundlage für ein fächerübergreifendes Projekt einsetzbar.
3. Foto, alte Zeitungen, Waage, Maßband, Internet
4. Ab Klasse 7 (eventuell schon früher)
5. Das Austragen von 360 Exemplaren eines Gemeindeanzeigers dauert in ländlichen Gemeinden ungefähr vier Stunden und wurde 2003 mit ca. 60 € bezahlt.

   Die Altpapierballen auf dem Foto wiegen 80 kg und haben die Abmessungen 80 x 80 x 120 cm^3.

   In der Schweiz wurden 2003 ca. 160 kg Altpapier pro Kopf gesammelt.

   Der Wert von Altpapier richtet sich nach Angebot und Nachfrage. Der europäische Wirtschaftsdienst (EUWID) veröffentlicht monatlich aktualisierte Preise.

Europarad

1. Europarad
   (Welche Höhe hat das Europarad? Wie groß ist die maximale Anzahl der Personen, die gleichzeitig mitfahren können?)
2. Durch Messen und Abschätzen der Gondelhöhe kann eine Höhe für das Europarad ermittelt werden.
3. Eine Abschätzung über die maximale Anzahl der Personen, die gleichzeitig mitfahren können, wird durch Abzählen der Gondeln möglich.
   Auf dem Foto können die Gondelhöhe und der Durchmesser des Europarades abgemessen werden.
4. Einsetzbar ab 7. Klasse
   Kenntnis des Dreisatzes
   Zeitbedarf beträgt maximal 2 Stunden.
5. Die Schülerinnen und Schüler werden bedingt durch Messfehler und Abschätzungen unterschiedliche Höhen für das Europarad erhalten. Über die Anzahl der Gondeln kann die maximale Anzahl der gleichzeitig mitfahrenden Personen abgeschätzt werden. Die tatsächlichen Daten können durch eine Internetrecherche unter dem Stichwort „Europarad“ (Europäische Flaggen auf der Nabe des Riesenrades) in Erfahrung gebracht werden.

Lösungsmöglichkeit:

Auf dem Foto werden die Gondelhöhe sowie der Durchmesser des Europarades durch Messen näherungsweise bestimmt. Unter Verwendung einer geschätzten Gondelhöhe von z.B. 2,50 m kann dann mit Hilfe des Dreisatzes der „wahre“ Durchmesser, also die Höhe des Europarades, berechnet werden.

In der oberen Hälfte des Rades werden 21 Gondeln gezählt. Mit einer geschätzten Zahl von 6 Personen pro Gondel können in 42 Gondeln insgesamt 252 Personen gleichzeitig mit dem Europarad fahren.

Technische Daten für das Europarad:

Höhe:	55 m
Grundfläche:	25 m x 20 m
Anzahl der Gondeln:	42
Gesamtzahl der Personen:	252
Gewicht:	300 t
Transport:	18 Anhänger

Mondgröße

Ein Blick auf den Mond (Halbmond) zeigt, dass er von Kratern übersäht ist. Ein großer Menschheitstraum ist es, auf dem Mond eine Kolonie - ja vielleicht sogar eine Stadt zu bauen.

Hätte eine Stadt wie Mainz in einem solchen Krater Platz?

Bereits im 2. Jahrhundert vor Christus gelang es einem Astronomen (Hipparch, um 190 v. Chr. bis 129 v. Chr.) die Mondgröße näherungsweise zu bestimmen.

Er benutzte dabei nur die Größe der Erdkugel. In der heutigen Maßeinheit gilt für den Radius der Erdkugel: R = 6370 km.

Die folgenden Fotos zeigen nicht etwa die verschiedenen Mondphasen, sondern sie sind während einer Mondfinsternis aufgenommen worden.

(Fotos: Franz-Peter Schäfer, Birkenfeld)

Zum Auswerten eignet sich das folgende Foto

(Foto: Siegfried Glowka, Wittlich, erschienen in „Astronomie in der Schule“, ILF Mainz, 1994)

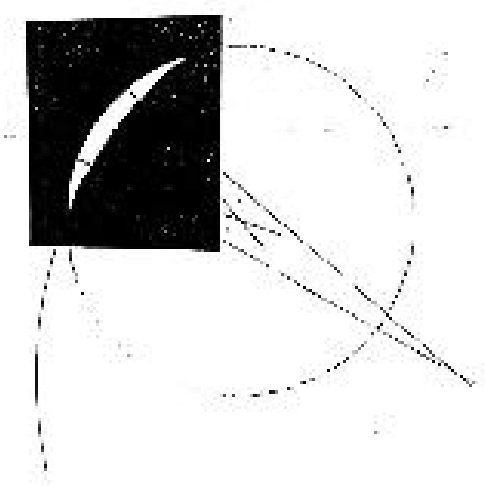
1. Mondgröße
   (Wie groß ist der Mond im Verhältnis zur Erdkugel?)
2. Aus einem Foto zur Mondfinsternis lassen sich die Größe des Erdschattens in Mondentfernung und die Größe des Mondes vergleichen. Man erhält so eine obere Grenze für den Monddurchmesser. In einer zweiten Stufe lässt sich dieser Wert bis auf einen geringen Fehler verbessern.
3. Foto, Geodreieck und Zirkel.
4. Ab Klasse 8
   Grundkenntnisse der elementaren Geometrie: Mittelsenkrechte, Kongruenzsätze, Winkelsätze und einfache Termumformungen. Sind die Strahlensätze bekannt, so lässt sich zusätzlich die Mondentfernung ableiten.
   Der Zeitaufwand beträgt etwa 1 bis 2 Unterrichtstunden.
5. Die Zeichenungenauigkeiten bei der Rekonstruktion der beiden Kreise führen bei einzelnen Schülern zu großen Abweichungen in der Angabe der Radien. Sinnvoll erscheint eine Mittelwertbildung der einzelnen Schülerergebnisse. So erreicht man eine Fehlergrenze gegenüber dem Literaturwert von unter 10%.

Möglicher Lösungsweg:

1. Modellierungsstufe

Vereinfachte Annahme:

Der Erdschatten ist in Mondentfernung genauso groß wie die Erde selbst.



Man rekonstruiert die beiden Kreise und setzt die beiden Radien ins Verhältnis. Aus dem bekannten Wert für den Erdradius erhält man dann für den Mondradius einen ersten Näherungswert.

Ergebnis: d $\approx$ 5300 km (Fehler 50 %)

Ausgehend von dem Vorwissen, dass die Sonne viel größer als die Erde ist, ist klar, dass sich der Kernschatten der Erdkugel im Weltraum verjüngt. Das bedeutet, dass das gefundene Ergebnis lediglich eine obere Grenze für den tatsächlichen Monddurchmesser ist.

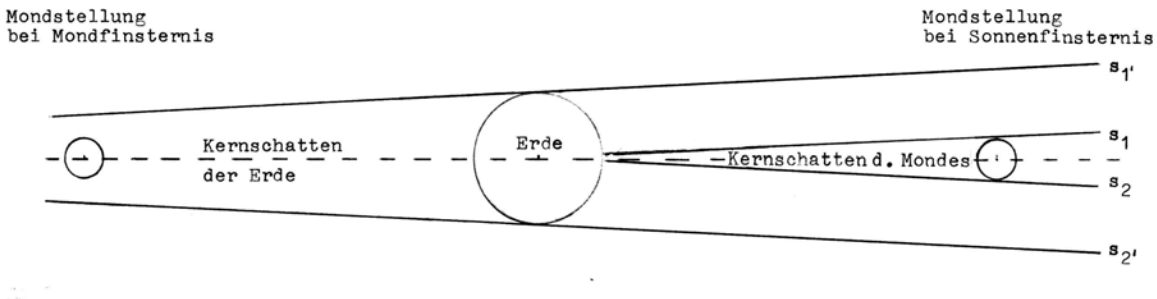
2. Modellierungsstufe

Annahme:
Die Mondbahn um die Erde ist ein Kreis, d.h. bei Vollmond und bei Neumond hat er von der Erde den gleichen Abstand.

Zusatzinformation:
Bei einer Sonnenfinsternis ist der Totalitätsstreifen sehr schmal.

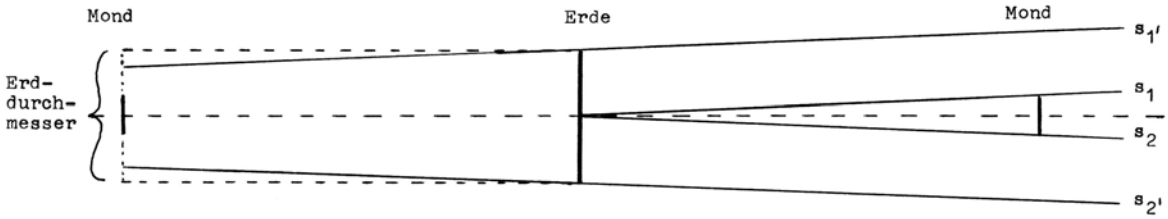
Mithilfe dieser Annahme und der Zusatzinformation kann man die Verjüngung des Kernschattens der Erdkugel abschätzen. Die im Folgenden beschriebene Abschätzung geht bereits auf Aristarch (320 bis 250 v. Chr.) zurück.

In der Darstellung ist der Mond zweimal eingezeichnet: Bei Mondfinsternis (links) und bei Sonnenfinsternis (rechts).



Der Kernschatten der Mondkugel (rechts) bei Sonnenfinsternis verjüngt sich bis zur Erde gerade um den Monddurchmesser.
Nimmt man an, dass die Randstrahlen s_1, $s_{1'}$ bzw. s_2 und $s_{2'}$ jeweils parallel einfallen (aufgrund der großen Entfernung der Sonne ist diese Annahme berechtigt), dann verjüngt sich der Erdschatten hinter der Erdkugel bei der Mondfinsternis auch gerade um den Monddurchmesser.

Deutlicher sieht man das in der folgenden Skizze, in der von Erde und Mond jeweils nur der Durchmesser gezeichnet wurde.



Beweis: Die rechtwinkligen Dreiecke links oben und unten sind kongruent zu den beiden rechtwinkligen Dreiecken rechts in der Mitte.

Damit gilt: $r_s = R - r$

mit r_s : Radius des Erdschatten, R: Radius der Erdkugel, r: Radius der Mondkugel

Also gilt: $\frac{r_s}{R} = \frac{R}{R} - \frac{r}{R}$, setze k = $\frac{r_s}{R}$ (messbar im obigen Foto der Mondfinsternis)

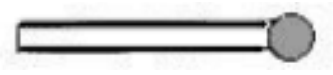
Dann gilt durch einfache Umformung: $r = R - k \cdot R$

Verbessertes Ergebnis: d ≈ 3750 km (Fehler 8 %) [Literaturwert: 3476 km]

Ergänzung: Die Entfernung Erde – Mond

Hilfsmittel: Papierschnitzel mit Streichholz.

Experiment (evtl. Hausaufgabe):



Man versucht, das Papierschnitzel bei fast ausgestrecktem Arm mit der Vollmondscheibe (bzw. ein paar Tage vorher mit dem Durchmesser der fast vollen Mondsichel) zur Deckung zu bringen.

Aus dem Abstand Papierschnitzel – Auge, dem Durchmesser des Papierschnitzels und dem obigen Wert für den Monddurchmesser lässt sich nun mithilfe des Strahlensatzes ein Näherungswert für die Mondentfernung angeben.

Riesenfässer

1. Riesenfässer
   (Es sollen Näherungswerte für das Volumen von Fässern bestimmt werden.)
2. Zunächst müssen die Abmessungen der Fässer geschätzt werden. Für die Volumenbestimmung sind verschiedene Modelle denkbar: Zylinder, Doppelkegelstumpf, Zylinder mit zwei Kegelstümpfen. Das zuletzt genannte Modell liefert die Keplersche Fassregel.
   Auch durch einen um die x-Achse rotierenden Parabelbogen, einen Kreisbogen, mit Hilfe einer Ellipse oder dem Graphen einer Cosinus- oder Exponentialfunktion kann die Form eines Fasses angenähert werden. Zur Kontrolle sind die Daten des linken Fasses genannt. Anschließend kann abgeschätzt werden, welches Fassungsvermögen das ganze „Haus“ haben könnte.
3. Foto, Lineal
4. Ab Klasse 10
   Zylinder, Kegelstumpf, (Integralrechnung)
5. Zu den oben genannten Modellen ergeben sich folgende Formeln:
   Zylinder: $V(R,r,h) = \frac{1}{3}(R+r)^2 \cdot \pi \cdot h$
   Doppelkegelstumpf: $V(R,r,h) = \frac{1}{3}\left[\pi \cdot h \cdot \left(R^2 + rR + r^2\right)\right]$
   Zylinder mit zwei Kegelstümpfen: $V(R,r,h) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot \left(2R^2 + r^2\right)$ (Keplersche Fassregel)
   In der Praxis werden die Fässer mit Wasser gefüllt, wenn ein genauer Wert für das Volumen benötigt wird.

   Genügt ein Schätzwert, so verwenden Winzer und Küfer meist die „Visiermethode“:
   V = 0,6 s³, wobei s für den Abstand des Spundloches von der „tiefsten Ecke“ des Fasses steht. Diese Formel liefert für Fässer, die ungefähr doppelt so hoch wie dick sind, brauchbare Ergebnisse.
6. Literatur: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht Band 2, divverlag Franzbecker (3-88120-231-5)

Daten zum linken Fass.

Die Fässer und das darüber errichtete Haus stehen in Winningen an der Mosel und werden heute als Weinprobierstube genutzt.

Teelicht

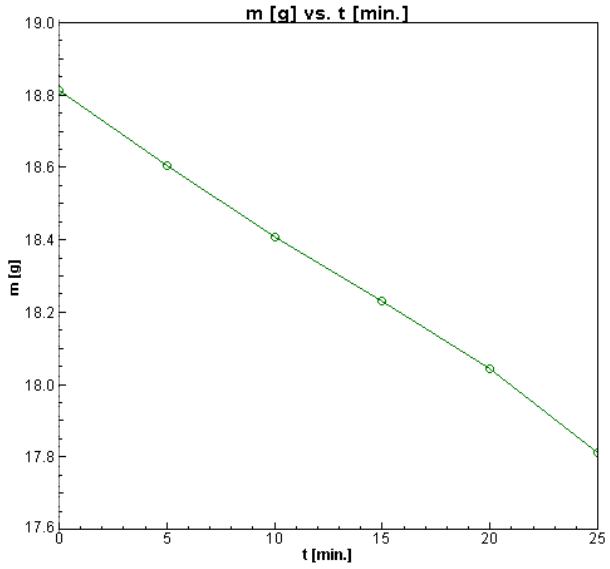
1. Teelicht
   (Wie lange brennt ein Teelicht?)
2. Die Brenndauer eines Teelichtes kann grob abgeschätzt werden. Experimentell kann die Masse des Teelichts in Abhängigkeit der Zeit bestimmt werden. Unter der Voraussetzung, dass die Abnahme der Masse linear von der Zeit abhängt, kann graphisch die Brenndauer ermittelt werden.
3. Materialien: Teelicht, Waage
4. Einsetzbar ab 7. Klasse
   Kenntnisse: Aufnehmen einer Messreihe, Graphische Darstellung von Messwerten
   Zeitbedarf: Falls eine Messreihe aufgenommen wird, 2 Unterrichtsstunden
5. Die Masse eines brennenden Teelichtes kann von den Schülerinnen und Schülern in bestimmten Zeitabständen mit einer Waage bestimmt werden. In einer Messtabelle werden Masse und dazugehörige Zeit für eine Dauer von z.B. 30 min. aufgenommen. Eine graphische Darstellung zeigt näherungsweise einen linearen Zusammenhang zwischen der Masse des Teelichts und der Zeit. Die Brenndauer ergibt sich durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Zeit-Achse (Extrapolation).

Lösungsmöglichkeit:

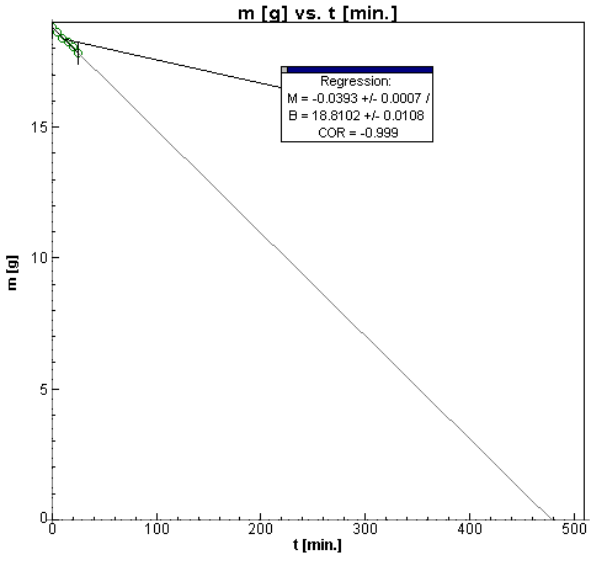
In einem im Unterricht durchgeführten Experiment ergab sich die folgende Messreihe:

Zeit t [min.]	0	5	10	15	20	25
Masse m [g]	18,814	18,606	18,408	18,232	18,049	17,812

Graphische Darstellung der Messwerte



Graphische Nullstellenbestimmung



Das Teelicht hat somit eine Brenndauer von ungefähr 480 Minuten (6 Stunden).

Moseltalbrücke

1. Brücke
   (Wie hoch ist die Brücke?)
2. Die Maße der Brücke lassen sich mit Hilfe von Fotos bestimmen. Auf der beiliegenden CD ist ein weiteres Foto zu finden, mit dessen Hilfe sich auch die Brückenlänge schätzen lässt.
3. Foto, Geodreieck
4. Ab Klassenstufe 7, Dreisatz
   Für die Bestimmung der Brückenhöhe benötigt man 1 Stunde.
5. Übliche LKW-Höhen lassen sich recherchieren, daraus lässt sich mit Hilfe der beiden LKWs im Vordergrund die Höhe der seitlichen Schutzgitter ermitteln. Die Höhe des Mittelpfeilers ergibt sich dann als Vielfaches der Schutzgitterhöhe über dem Mittelpfeiler.

Es handelt sich hier um die Moseltalbrücke Winningen im Zuge der A 61.

Technische Daten (Landesbetrieb Straßen und Verkehr Rheinland-Pfalz, Abteilung 3 - Brückenbau):

Länge:	935 m
max. Höhe:	136 m Höhe der Fahrbahn über der Mosel
max. Pfeilerhöhe:	123 m (auf dem Foto der 2. Pfeiler von links)
Höhe des Überbaus:	6,5 bis 8,5 m (bis Fahrbahn, ohne Schutzgitter)
max. Pfeilerabstand:	218 m

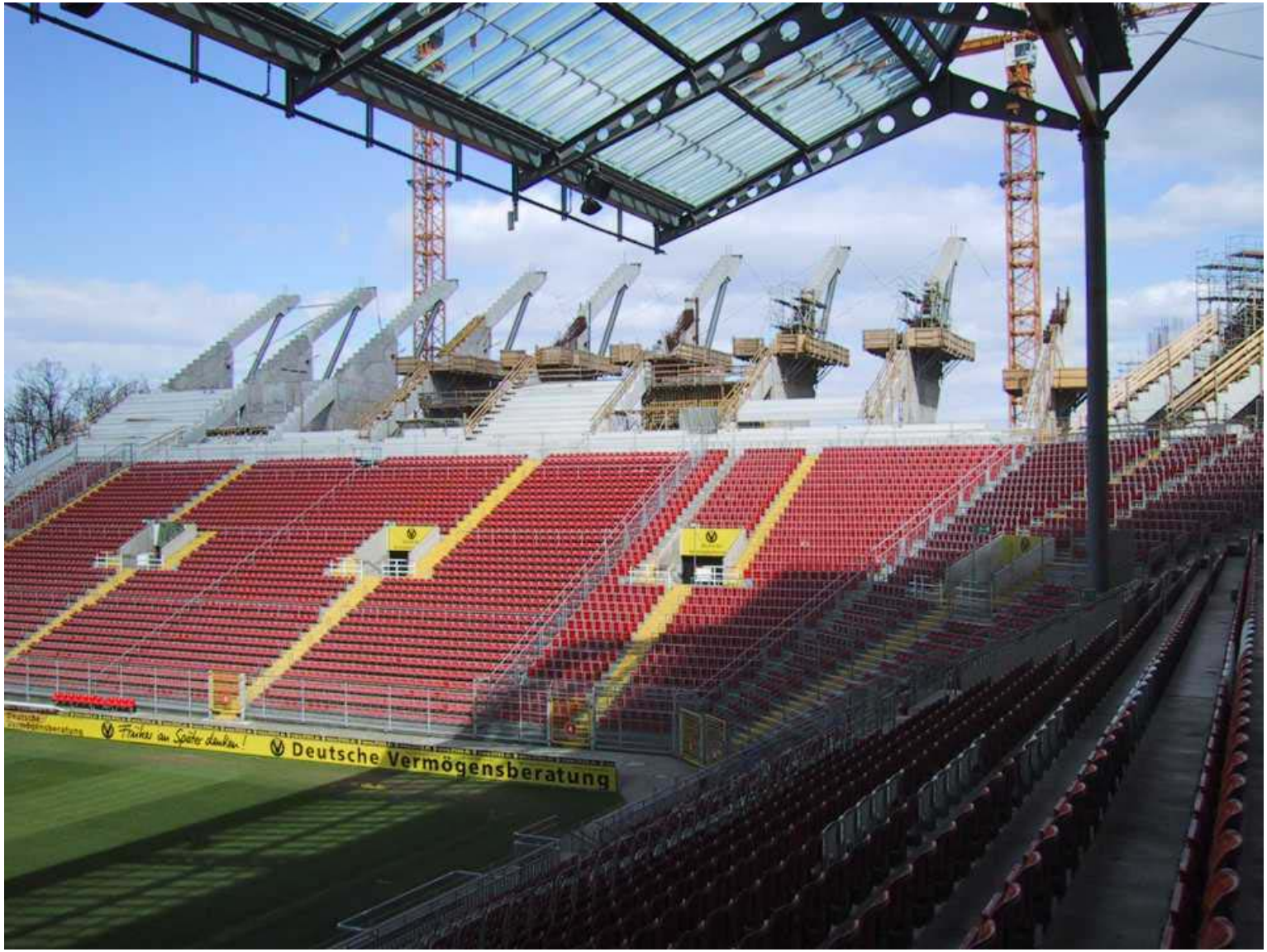
ICE-Tunnel

1. ICE-Tunnel
   (Wie groß ist das Aushubvolumen? Wie viel Beton wurde für die Röhre benötigt?)
2. Der Querschnitt des Tunnels lässt sich mithilfe der Fotos bestimmen. Aus der auf dem Schild abzulesenden Tunnellänge von 2395 m kann man näherungsweise das Aushubvolumen oder die Betonmenge usw. ermitteln.
3. Foto, Geodreieck
4. Ab Klassenstufe 9
   Kreisflächen, Volumen von Zylindern
5. Aus dem unteren Foto lässt sich mithilfe der Spurweite die Tunnelbreite bestimmen. Mithilfe der Breite lässt sich aus dem oberen Bild die Höhe des Tunnels abschätzen.

Baggerschaufel

1. Baggerschaufel
   (Gesucht ist zunächst das Volumen der Baggerschaufel.)
2. Die Schülerinnen und Schüler sollen das Volumen der Baggerschaufel schätzen. Darüber hinaus kann überlegt werden,
   - wo derartige Baumaschinen eingesetzt werden;
   - wie lange ein solcher Bagger arbeiten muss, um die Baugrube eines Einfamilienhauses auszuheben;
   - warum beim Hausbau in der Regel kleinere Maschinen eingesetzt werden.
3. Foto, Lineal
4. Ab Klasse 7
   Dreisatz
   Für die Schätzung des Volumens der Baggerschaufel benötigt man ca. 1 Stunde.
5. Der Junge auf dem Foto ist ohne Helm ca. 120 cm groß.

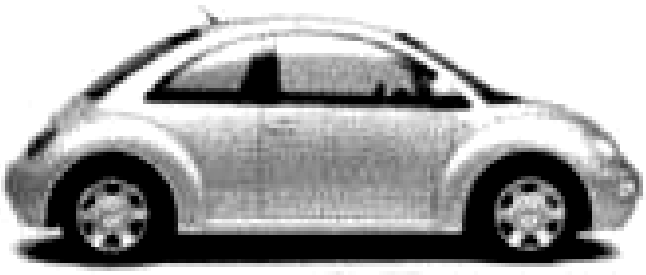
Stadionausbau

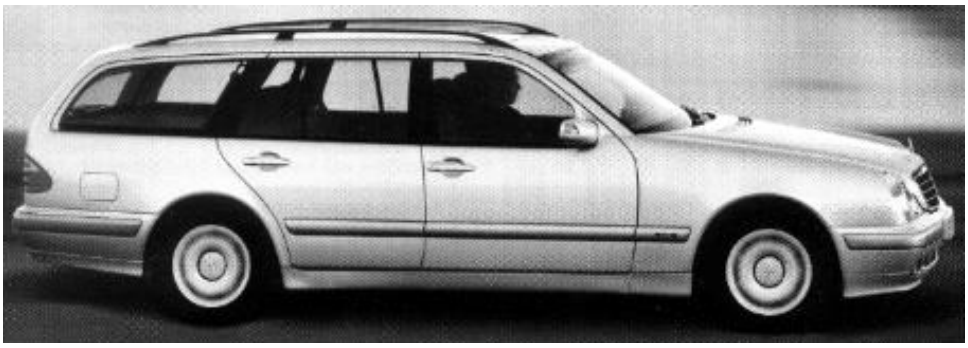


1. Stadionausbau
   (Gesucht ist die Anzahl der Sitzplätze auf der Tribüne nach Fertigstellung.)
2. Die Aufgabe eignet sich als Schätzübung.
3. Foto, Lineal
4. Ab Klasse 5
   Ab Klasse 9 kann auch die Steigung der Tribüne geschätzt werden.
   Zeitbedarf ca. 1 Unterrichtsstunde
5. Das Foto zeigt die Osttribüne des Fritz-Walter-Stadions in Kaiserslautern, das für die WM 2006 ausgebaut wird. Nach Fertigstellung bietet sie ca. 8000 Sitzplätze.

Sonnencreme für Autos

Im Januar 2001 konnte man im BASF-Infoservice „Wissenschaft populär“ lesen, dass selbst Autolacke unter „Sonnenbrand“ leiden. Die BASF hat einen Klarlack als „Sonnencreme“ für Autos entwickelt. Er wird mit einer Schichtdicke von 45 µm aufgetragen. Damit besteht fast die Hälfte der Schutzhülle für das Autoblech aus „Sonnencreme“.





1. Sonnencreme
   (Es sollen Näherungswerte für die jeweils benötige Menge an „Sonnencreme“ bestimmt werden.)
2. Zunächst müssen die Abmessungen der Autos beispielsweise durch Abschreiten oder durch einen Vergleich mit der eigenen Körpergröße geschätzt werden. Im zweiten Schritt werden die lackierten Teile der Oberfläche so in Teilstücke zerlegt, dass der Flächeninhalt berechnet werden kann. Das Ergebnis wird mit der Dicke der Sonnencremeschicht (45 μm) multipliziert.
3. Abbildung, Fotos von Autos
4. Reisebus und Combifahrzeug ab Klasse 5, abgerundete Fahrzeuge ab Klasse 10
5. Für einen Mercedes-Reisebus benötigt man nach Angaben des Herstellers bei einer Lackdicke von 80 μm 13 bis15 Liter Lack, für ein Mercedes T-Modell 4 bis 6 Liter. Da die „Sonnencreme“ nur in einer Dicke von 45 μm aufgetragen wird, benötigt man für einen Bus 7,3 bis 8,4 Liter und für ein T-Modell 2,25 bis 3,4 Liter.

   Für das dritte, auf dem Arbeitsblatt abgebildete Fahrzeug kamen die Schülerinnen und Schüler bei der Erprobung auf Werte von 0,5 bis 1,5 Liter.

Minenbleistift oder Spitzbleistift?

Ein Minenbleistift kostet im Handel 2,05 €, 12 Minen dazu kosten 1.65 €.

Spitzbleistifte bekommt man für 0,85 € pro Stück.

1. Minenbleistift oder Spitzbleistift?
   (Ab welchem Verbrauch ist es günstiger, ein Minenbleistift zu benutzen als ein Spitzbleistift? Wie viel Prozent des Graphits in einem Spitzbleistift werden zum Schreiben benutzt?)
2. Zunächst muss geschätzt werden, welcher Teil der Minen- bzw. Bleistiftlänge zum Schreiben genutzt werden kann.
3. Minenbleistift, Spitzbleistift, Lineal, Spitzer
4. ab 10. Klasse
5. Beim Spitzen wird der zylinderförmige Graphitanteil des Bleistifts soweit abgetragen, dass eine kegelförmige Spitze entsteht. Zum Schreiben steht daher höchstens ein Drittel des Graphits zur Verfügung. Berücksichtigt man, dass der Bleistift nicht bis zum Ende „abgeschrieben“ werden kann, so ergibt sich als obere Grenze für den nutzbaren Graphitanteil ca. 28 %.
   Die Verbrauchsgrenze, ab der der Gebrauch eines Minenbleistifts günstiger ist, hängt
   - von der minimalen Minenlänge ab, die vom Stift noch gehalten werden kann.
   - davon ab, wie weit die Bleistiftspitze abgeschrieben wird, bevor nachgespitzt wird.
   - von der minimalen Stiftlänge ab, bei der gerade noch geschrieben werden kann.
   - von den aktuellen Preisen ab.

   Geht man davon aus, dass sowohl die Minen als auch das Spitzbleistift nie abbrechen, so ergibt sich, dass die Nutzung eines Minenbleistifts ungefähr ab der 17-ten Mine günstiger ist.

Telefonzelle

Viele geduldige Fünftklässler passen in eine Telefonzelle.

1. Telefonzelle
   (Wie viele Schüler passen in eine Telefonzelle?)
2. Die Schülerinnen und Schüler werden zunächst die Kinder auf den Bildern zählen. Das Ergebnis ist aber allenfalls eine untere Grenze. Man erkennt deutlich, dass noch Zwischenräume vorhanden sind. Über das bloße Schätzen und Abzählen hinaus, eignet sich die Aufgabe auch zum Modellieren.
3. Foto, Lineal, oder Maßband zum Ausmessen einer Telefonzelle, Spielsteine zum Probieren
4. Schätzen und Probieren ab der Orientierungsstufe
   Schüler als Quader bzw. Zylinder vereinfachen und Füllung der Grundfläche mit Spielsteinen testen; Zeitansatz hierfür etwa 1 bis 2 Stunden.

   Verbessern durch Modellieren ab Klasse 10
   Das Volumen eines Fünftklässlern lässt sich bestimmen, indem man seinen Körper als Zusammensetzung einfacher geometrischer Körper auffasst oder mithilfe der Masse eines Kindes und der durchschnittlichen Dichte für Menschen (etwa 1 kg/dm³) berechnet. Der Vergleich des Volumens eines Schülers mit dem Volumen der Telefonzelle liefert eine Obergrenze. Werden noch Freiräume zwischen den Körpern, der Telefonapparat und der Sockel im unteren Teil der Telefonzelle usw. berücksichtigt, kann diese Modellierung einige Stunden beanspruchen.
5. Die abgebildete Telefonzelle hat die Innenmaße: 95 cm breit, 88 cm tief und 203 cm hoch.

Mögliche Ergebnisse:

Dividiert man das Volumen der Telefonzelle durch das Schülervolumen (etwa ermittelt aus der durchschnittlichen Masse eines Schülers) so erhält man eine Obergrenze von über 40. Fasst man die Schüler als Quader auf, stellt diese nebeneinander und schätzt noch die Anzahl der Schüler in der zweiten Etage, so erhält man eine Anzahl von etwa 25 Schüler. Die durchschnittliche Größe und die durchschnittliche Masse der Fünftklässler kann natürlich durch eine eigene Statistik erfasst werden.

Ein Weltwunder

Cheopspyramide
(erbaut um 2500 v. Chr.)

Die ägyptischen Pyramiden zählen zu den Sieben Weltwundern des Altertums. Auch heute noch etwa 4500 Jahre nach ihrem Bau sind Besucher von der überwältigenden Größe angetan. Ohne moderne technische Maschinen sind die gewaltigen Bauten errichtet worden.

Die größte unter ihnen ist die Cheopspyramide. Sie ist eine quadratische Pyramide der Kantenlänge 233 m. Ihre Höhe betrug ursprünglich 147 m.

Es gibt viele Spekulationen, wie die Menschen der damaligen Zeit dieses Bauwerk zustande bringen konnten. Ein Buchautor hat sogar Außerirdische als Baumeister belegen wollen. Tatsächlich gibt es keine Aufzeichnungen über die Bauarbeiten, sodass die Historiker aus Indizien und naheliegenden Annahmen zu einer Vorstellung gelangt sind, die heute wohl von den meisten Archäologen anerkannt wird:

Der Steinbruch für die Materialbeschaffung war nur rund 400 m von der Baustelle entfernt. Etwa 400 Facharbeiter waren das ganze Jahr über beschäftigt. Unterstützt wurden sie von der Landbevölkerung, die alljährlich während der dreimonatigen Nilüberschwemmung Dienst am Bau leisten musste. Man schätzt die gesamte Bauzeit auf 20 Jahre. Während ihres Arbeitseinsatzes mussten die Hilfskräfte die Felsblöcke auf Gleitschlitten heranschaffen und über eine Rampe hinauf auf die Pyramide ziehen. Die Rampe bestand aus dem gleichen Material wie die Pyramide.

Ist die Theorie der Archäologen über den Bau der Pyramide realistisch oder ist das Weltwunder tatsächlich nur mithilfe Außerirdischer möglich gewesen?

1. Ein Weltwunder
   (Wie viele Arbeiter waren zum Bau der Cheopspyramide notwendig?)
2. Modellierungsaufgabe, die auf physikalischen Betrachtungen beruht
3. Formelsammlung Physik und Mathematik, Gleitreibungszahlen, die teilweise geschätzt werden müssen oder aus dem Physikbuch entnommen werden können. Dichte von Steinen und Leistungsfähigkeiten eines Arbeiters sollten aus Büchern oder Internet erfahrbar sein.
4. Ab Klasse 11
   Kenntnisse des Pyramidenvolumens und der Trigonometrie
   Aus der Physik (Mechanik) sollte der Begriff der Arbeit und der Reibung auch auf der schiefen Ebene bekannt sein. In der Regel werden diese Inhalte in der Jahrgangsstufe 11 unterrichtet. Der Zeitaufwand beträgt je nach Hilfestellung und Vertiefung etwa 6 bis 8 Stunden.
5. Zunächst muss die Menge der benötigten Steine berechnet werden. Ihre Größe und ihre Masse (mithilfe der Dichte) können ermittelt werden. Über die Gleitreibung Holz auf Stein wird die benötigte Gesamtkraft für das Ziehen auf der horizontalen Ebene bestimmt. Der Kraftaufwand eines Arbeiters wird geschätzt, um die Anzahl der Arbeiter pro Schlitten zu ermitteln. Die mittlere Leistung eines Menschen hilft dann, um den Zeitaufwand pro Schlitten zu ermitteln. Gleiches muss für das Ziehen auf der schiefen Ebene ermittelt werden. Hier stellt sich das mathematische Problem, dass sich der Neigungswinkel der Ebene während des Baus vergrößert. Ein Durchschnittswert, etwa bis in Höhe des Schwerpunkts, ist dann eine sinnvolle Vereinfachung. Die tägliche Arbeitszeit eines Arbeiters muss sinnvoll geschätzt werden. So erhält man die Zahl der Schlittenzieher. Die Anzahl der Hilfsarbeiter im Steinbruch, beim Einsetzen der Steine und für andere Tätigkeiten ist dann ebenfalls zu schätzen. Erprobungen zeigen, dass Schülergruppen hie und da Hinweise benötigen. So erscheint es sinnvoll, die Schüler zu ermuntern, im Hinblick auf das Problem interessante Fragen zu stellen, wie etwa:

   a) Wie viele Steinblöcke waren erforderlich?
   b) Wie viele Arbeiter braucht man pro Schlitten?
   c) Wie schnell konnte ein Schlitten gezogen werden?
   d) Wie viele Schlittenteams müssen gleichzeitig unterwegs sein?
   e) Schätze die weitere Anzahl der Arbeiter für andere Tätigkeiten.

Schülerergebnis am Ende eines Modellierungstages:

Anzahl der Arbeiter für den Transport der Steine:	7400 (aus Modellierung bestimmt)
Anzahl der Gerüstbauer :	2500 (geschätzt)
Anzahl der Hilfsarbeiter im Steinbruch:	**3000 “**
Anzahl der Aufseher:	1500 “
Anzahl der Versorger:	2500 “
Gesamtzahl:	etwa **17 000** also möglich für die Landbevölkerung

Vergleich: Dr. Rainer Müller gibt in Praxis der Naturwissenschaften, Physik in der Schule 8/50 , Aulis, Köln 2001 die Gesamtzahl mit 20 000 bis 30 000 an.

Countdown für Weltrekord-Brücke

Beim Bau der höchsten Brücke der Welt ist am Wochenende in Südfrankreich ein spektakulärer Zwischenschritt gelungen: 268 Meter über dem Fluss Tarn schlugen die Ingenieure eine erste Verbindung zwischen dem nördlichen und dem südlichen Teilstück der Autobahnbrücke von Millau, die im Dezember für den Betrieb freigegeben werden soll. Die 2460 Meter lange Stahlbrücke wird bei der Fertigstellung 36.000 Tonnen wiegen. Einschließlich der Pylone für die Hängekonstruktion wird sie an der höchsten Stelle 343 Meter hoch sein und damit den Pariser Eiffelturm um 23 Meter überbieten. Das gigantische Brückenbauwerk westlich der Ortschaft Millau dient zur Fertigstellung der Autobahn A 75 Paris - Clermont Ferrand - Perpignan und ermöglicht damit eine schnellere Verbindung von Paris Richtung Barcelona. Entworfen wurde die Brücke von dem britischen Stararchitekten Norman Foster, der auch die weltberühmte Glaskuppel des Berliner Reichstags gestaltet hat. Die Ausführung liegt bei der Baufirma Eiffage, die ihre Investitionen von 320 Millionen Euro durch eine 75-jährige Konzession auf die Mautgebühren hereinbekommen will. (afp)

Die Rheinpfalz, 1.6.04

1. Countdown für Weltrekord-Brücke
   (Wie hoch werden die Mautgebühren sein?
   Wie hoch ist die zweite Brücke?
   Wie schwer ist der Pylon in der Bildmitte?
   Wie hoch ist die Brücke im Vergleich zu anderen bekannten Bauwerken?)
2. Es handelt sich um eine Schätzaufgabe
3. Bild, eventuell Internetzugang für weitere Recherchen
4. Ab Klasse 7
   Proportionale Zuordnungen, Dreisatz; 1 bis 2 Unterrichtsstunden

Übersicht über die im Heft behandelten Beispiele mit der Zuordnung zu Klassenstufen

Nr.	Beispielaufgabe	Ab Klas-senstufe	Seite
1	Man sollte mal wieder Zeitung lesen!	7	22
2	ICE-Neubaustrecke	10	23
3	Ein ungewöhnlicher Hinkelstein!	8	27
4	Kalter Kaffee?	10	30
5	Nichtrauchen ist cool	7	36
6	Videoanalyse beim Kugelstoßen	11	38
7	Handy-Tarife	9	45
8	Die Kabeltrommel	10	49
9	Ariane 5	11	55
10	Kostenfunktionen	11	68
11	Pausen und Produktivität	11	75
12	Qualitätssteigerung von Druckmessgeräten	12	82
13	„Elvis im Schraubverschluss“	12	91
14	Serielle Datenübertragung	12	97
15	Siegchancen beim Tennis	12	102
16	Ballonflug	10	110
17	Leicht verdientes Geld?	7	112
18	Europarad	7	114
19	Mondgröße	8	116
20	Riesenfässer	10	119
21	Teelicht	7	121
22	Moseltalbrücke	9	123
23	ICE-Tunnel	9	125
24	Baggerschaufel	7	127
25	Stadionausbau	5	129
26	Sonnencreme für Autos	6/10	131
27	Minenbleistift oder Spitzbleistift?	10	133
28	Telefonzelle	6/10	134
29	Ein Weltwunder	11	136
30	Countdown für Weltrekord-Brücke	7	138

Die in der Spalte "Ab Klassenstufe" aufgeführten Jahrgangsstufen geben nach Meinung der Autoren den frühest möglichen unterrichtlichen Einsatz an, bezogen auf den im Jahr 2004 gültigen Lehrplan für Rheinland-Pfalz.

Der Einsatz in höheren Klassenstufen ist bei fast allen Beispielen ebenfalls sinnvoll - oft gibt dann eine Aufgabe sogar wesentlich mehr her, weil den Schülerinnen und Schülern dann eine größere Bandbreite von mathematischen Methoden, außermathematischem Faktenwissen und mehr Lebenserfahrung zur Verfügung stehen.

Literaturhinweise

Kreativität

Kreativität mathematiklehren 106, Juni 2001

Heuristik – Problemlösen lernen mathematiklehren 115, Dezember 2002

Aufgaben und Ideen

Modellieren mathematiklehren 113, August 2002

Die Modellierungswoche in der Pfalzakademie Lambrecht,
Jahrgangshefte 1993 – 1997, erhältlich über Herrn Martin Bracke, TU Kaiserslautern,
weitere Hefte sind geplant

Gerhard-Mercator-Universität GH Duisburg MODELLIERUNGSWOCHE,
Jahrgangshefte ab 1996, erhältlich über die Universität Duisburg

Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht
Band 1 bis 8, divverlag franzbecker ISBN 3-88120-231-5 (Band 2)

Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht,
Cornelsen Verlag, ISBN 3-464-54360-9

Fermiprobleme - Vereinfachen, Nähern, Abschätzen
Praxis der Naturwissenschaften, Physik in der Schule 8/50, 1. Dezember 2001

Simulation dynamischer Vorgänge,
Klett-Verlag, ISBN 3-12-731348-9

H.-M. Fischer: Europas Trägerrakete Ariane,
Stedinger Verlag Lemwerder, ISBN 3-927 697-32-X