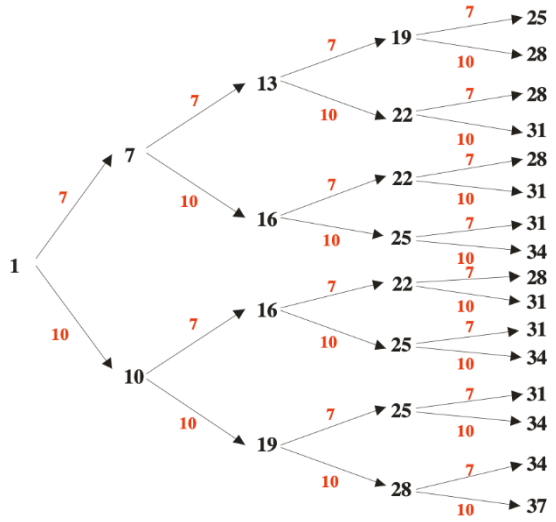
Lösung zu Aufgabe 1: Fadenstücke

a) Das nachstehende Baumdiagramm veranschaulicht die verschiedenen Möglichkeiten:



Somit sind nach vier Zerlegungsvorgängen genau 25, 28, 31, 34 oder 37 Teilstücke möglich.

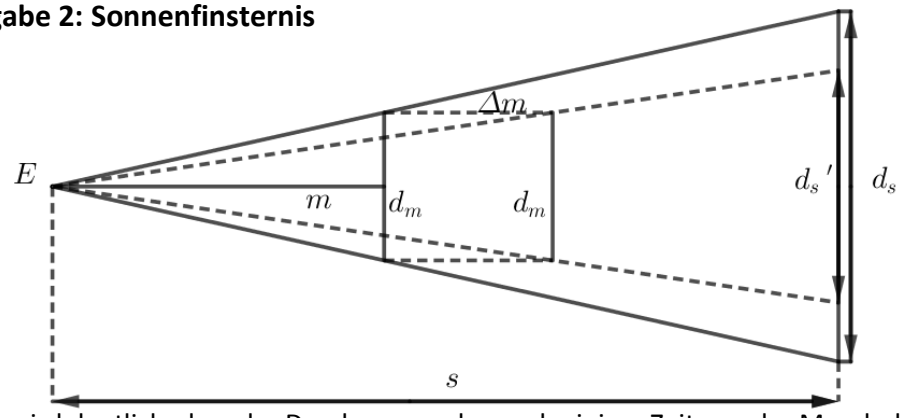
b) Wenn ein Fadenstück in 7 kleinere Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl der insgesamt vorhandenen Fadenteilstücke um 6, wenn es in 10 kleinere Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die entsprechende Anzahl um 9.
Da 6 und 9 beide durch 3 teilbar sind, erhöht sich die Anzahl der insgesamt vorliegenden Teilstücke, ausgehend von einem einzigen Faden am Anfang, also bei jedem Zerteilungsprozess / Schritt um eine durch 3 teilbare Zahl.
Man kann also bei diesem Vorgehen nur Anzahlen an Fadenteilstücken erhalten, die bei der Division durch 3 den Rest 1 ergeben. Da 2022 durch 3 teilbar ist, können durch dieses Verfahren nicht genau 2022 Teilstücke entstehen.

Alternative Lösung:
Mit jedem einzelnen Schritt erhöht sich die Gesamtanzahl der Fadenstücke um entweder genau 6 oder um genau 9, in Abhängigkeit davon, ob man das entsprechende Stück in 7 oder 10 Teilabschnitte zerteilt hat. Hat man nun insgesamt n-mal in 7 Stücke und m-mal in 10 Stücke unterteilt, so kamen n-mal 6 Teile und m-mal 9 Teile zu dem ursprünglich vorhandenen einen Faden hinzu.
Damit beträgt die Anzahl der vorhandenen Fadenstücke nach (n + m) Schritten:
$1 + 6n + 9m = 1 + 3(2n + 3m)$.
So zeigt sich, dass die Anzahl der nach jedem Schritt vorhandenen Fadenstücke bei der Division durch 3 den Rest 1 aufweisen muss. Da 2022 durch 3 teilbar ist, können durch dieses Verfahren nicht genau 2022 Teilstücke entstehen.

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen

Lösung zu Aufgabe 2: Sonnenfinsternis

a)



In der Zeichnung wird deutlich, dass der Durchmesser des nach einiger Zeit von der Mondscheibe bedeckten Teils der Sonnenscheibe $d_s{}'$ kleiner ist als der Durchmesser der Sonnenscheibe d_s am 11.8.1999.

b) Am 11.8.1999 galt nach dem zweiten Strahlensatz: $\frac{d_m}{m} = \frac{d_s}{s} \Leftrightarrow d_s = \frac{s \cdot d_m}{m}$.

Der Flächeninhalt A der Sonnenscheibe beträgt $A = \pi \cdot \frac{{d_s}^2}{4}$.

Nach x Jahren gilt daher $(d_s{}')^2 = 0{,}5 \cdot {d_s}^2$ und für den Zuwachs des Abstands Mond-Erde $\Delta m = 3{,}8cm \cdot x$.

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt also

$$\frac{d_m}{m+3{,}8cm \cdot x} = \frac{\frac{d_s}{\sqrt{2}}}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2} \cdot s \cdot d_m}{d_s} = m + 3{,}8cm \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot s \cdot d_m}{d_s} - m\right) \cdot \frac{1}{3{,}8cm} = \frac{(\sqrt{2}-1) \cdot m}{3{,}8cm} \approx 4072 \cdot 10^6.$$

Nach etwa 4072 Millionen Jahren bedeckt die Mondscheibe nur noch die Hälfte der Sonnenscheibe.

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen

Lösung zu Aufgabe 3: Sechserzahlen

Eine (x + 1) - stellige natürliche Zahl, die mit 6 beginnt, kann in der Form $6 \cdot 10^x + n$ dargestellt werden. Dabei ist n diejenige natürliche Zahl, die durch Abtrennen der führenden 6 entsteht.

Fügt man die Ziffer sechs am Ende der Zahl an, so erhält man die natürliche Zahl: $10 \cdot n + 6$.

Die gegebene Bedingung kann also durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$(10 \cdot n + 6) \cdot 4 = 6 \cdot 10^x + n \quad \Leftrightarrow \quad 40 \cdot n + 24 = 6 \cdot 10x + n$$
$$\Leftrightarrow \quad 39n = 6 \cdot 10x - 24$$
$$\Leftrightarrow \quad n = \frac{2 \cdot (10^x - 4)}{13}$$

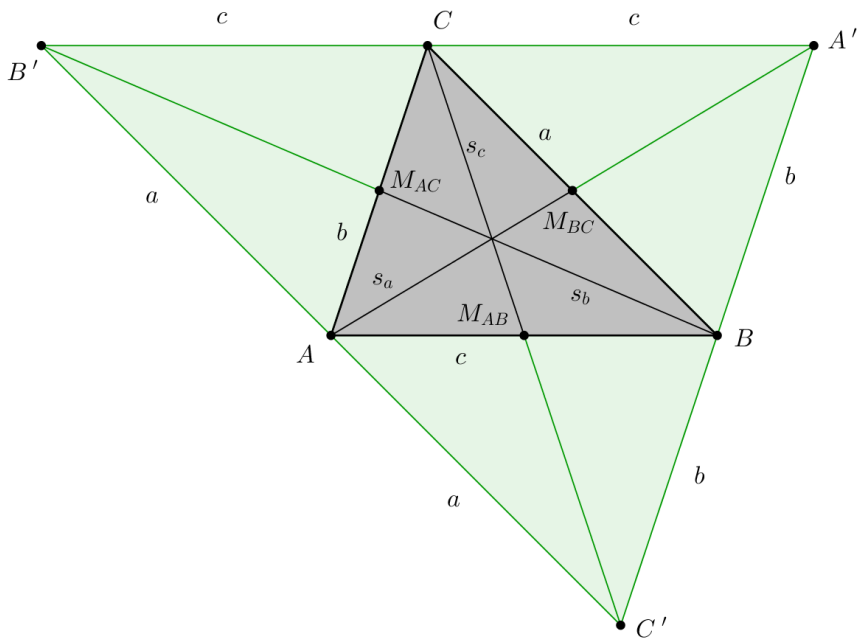
n wird mit wachsendem x größer. Um das beschriebene Verfahren durchführen zu können, muss die gesuchte natürliche Zahl mindestens zweistellig sein. Daher ist der kleinste Wert, der für x in Frage kommt 1.

$$x = 1: \quad n = \frac{2 \cdot (10^1 - 4)}{13} = \frac{12}{13} \quad \notin \mathbb{N},$$
$$x = 2: \quad n = \frac{2 \cdot (10^2 - 4)}{13} = \frac{192}{13} \approx 14{,}77 \quad \notin \mathbb{N},$$
$$x = 3: \quad n = \frac{2 \cdot (10^3 - 4)}{13} = \frac{1992}{13} \approx 153{,}23 \quad \notin \mathbb{N},$$
$$x = 4: \quad n = \frac{2 \cdot (10^4 - 4)}{13} = \frac{19992}{13} \approx 1537{,}85 \quad \notin \mathbb{N},$$
$$x = 5: \quad n = \frac{2 \cdot (10^5 - 4)}{13} = \frac{199992}{13} = 15384 \quad \in \mathbb{N},$$

Daher ist 153840 + 6 ein Viertel der gesuchten natürlichen Zahl. Die gesuchte Zahl selbst ist 615 384.

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen

Lösung zu Aufgabe 4: Grundstücksvergrößerung



a) Wählt man in den Dreiecken $CM_{BC}A'$ und $M_{BC}BA'$ als Grundseite $\overline{CM_{BC}}$ bzw. $\overline{M_{BC}B}$, so haben beide Dreiecke dieselbe Höhe durch A'. Da $|\overline{CM_{BC}}| = |\overline{M_{BC}B}|$ ist, sind die Flächeninhalte der beiden Dreiecke gleich.
Die Flächengleichheit der Teildreiecke ACB' und $AC'B$ kann analog gezeigt werden.

b) In jedem Dreieck mit den Seitenlängen *x*, *y* und *z* erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung: $x + y > z\,;\, y + z > x\,;\, z + x > y$.

Auf Grund der Eigenschaften der Punktspiegelung sind die Vierecke $ABA'C$, $ABCB'$ und $AC'BC$ Parallelogramme. Die Seitenlängen dieser Parallelogramme entsprechen *a*, *b* bzw. *c*, wie in der Abbildung eingezeichnet.
Ihre Diagonalen $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ haben die Längen $2 \cdot s_a$, $2 \cdot s_b$ bzw. $2 \cdot s_c$, wobei s_a , s_b und s_c die Längen der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC sind.
Wendet man die Dreiecksungleichung auf die Teildreiecke ABA', ABB' und ACC' der Figur an, so erhält man

$b + c > 2 \cdot s_a$, $\quad a + c > 2 \cdot s_b \quad$ und $\quad a + b > 2 \cdot s_c$.

Durch Addition dieser drei Ungleichungen erhält man:

$2a + 2b + 2c > 2s_a + 2s_b + 2s_c \Leftrightarrow \; a + b + c > s_a + s_b + s_c$ (*).

Der Zaun, der neu gekauft werden muss, hat die Gesamtlänge

$$Z_{neu} = 2a + 2b + 2c + s_a + s_b + s_c$$

Mit der Ungleichung (*) ergibt sich:

$$Z_{neu} < 2a + 2b + 2c + a + b + c = 3(a + b + c)$$

Folglich hat der Nachbar nicht recht!