Landeswettbewerb Mathematik
Schuljahr 2020/2021
2. Runde

Rheinland-Pfalz
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Name: **Klasse:**

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:
Die Lösungswege müssen mathematisch begründet und übersichtlich dargestellt werden. Nachmessen oder Nachrechnen einiger Beispiele genügt als Lösung nicht.

Aufgabe 1: Vielfache von 3

a) *Bestimme alle Reste, die bei der Division einer Quadratzahl durch 3 auftreten können.*

b) **m** und **n** seien positive ganze Zahlen, für die gilt: $\mathbf{m^2 + n^2}$ ist ein Vielfaches von 3.
*Begründe, dass dann auch **m** und **n** jeweils Vielfache von 3 sind.*

Aufgabe 2: Flaschenverschluss

Die meisten Schraubverschlüsse von PET-Flaschen haben die Form eines Kegelstumpfs, d.h. eines geraden Kegels mit parallel zur Grundfläche abgeschnittener Spitze.

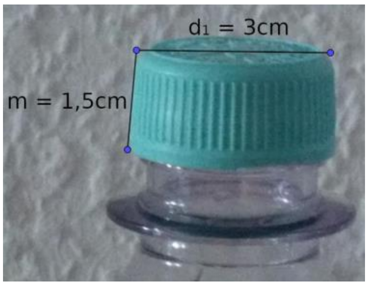


Abb. 2

Deshalb ist die Grundfläche etwas größer als die Deckfläche. Bei dem abgebildeten Verschluss beträgt der Durchmesser der Deckfläche d_1 = 3 cm. Die Mantellinie hat eine Länge von m = 1,5 cm (s. Abb. 1).
Rollt der Verschluss über einen Tisch, so beschreibt seine Bahn einen Kreisring, dessen innerer Radius r = 30 cm beträgt (s. Abb. 2).
Bestimme den Durchmesser der Grundfläche des Schraubverschlusses.

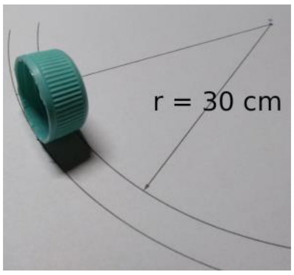
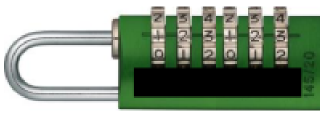


Abb. 1

Aufgabe 3: Zahlenschloss

Hellen und Jürgen spielen mit einem sechsstelligen Zahlenschloss, bei dem man jedes Rad auf eine der Ziffern 0, 1, …, 8, 9 einstellen kann.



Jürgen beginnt und stellt eines der Räder auf eine der zehn Ziffern. Anschließend stellt Hellen eines der Räder, die noch nicht gedreht wurden, auf eine der zehn Ziffern, u.s.w., bis alle sechs Räder auf eine Ziffer eingestellt wurden.
Diese 6 Ziffern werden dann als Zahl *z* gelesen, zum Beispiel 455.216, 1.010 (bei zwei Nullen vorne) oder 0 (alle Ziffern 0). Hellen gewinnt das Spiel, wenn diese Zahl *z* durch eine vor dem Spiel vereinbarte Zahl *n* teilbar ist, ansonsten gewinnt Jürgen.

a) *Zeige, dass Hellen für n = 9 stets gewinnen kann und beschreibe die Gewinnstrategie!*

b) *Zeige, dass Hellen auch für n = 11 gewinnen kann und beschreibe auch hier die Gewinnstrategie!*

Aufgabe 4: Gummibärchen

In einem nichteinsehbaren Gefäß befinden sich XXL-Gummibärchen. Es wird zufällig ein Gummibärchen gezogen, nach dem Betrachten sofort wieder zurückgelegt und unter die übrigen gemischt. Dieser Ablauf wird fünfmal durchgeführt.

a) *Es ist bekannt, dass die Gummibärchen genau die Farben grün, gelb und rot besitzen, deren Anzahlen sich wie 3 : 5 : 4 verhalten. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei allen fünf Ziehungen ein rotes Gummibärchen gezogen wird.*

Bei den folgenden beiden Teilaufgaben ist die genaue Farbzusammensetzung der Gummibärchen nicht mehr bekannt, jedoch weiß man, dass sich insgesamt nur genau fünf Gummibärchen in dem Gefäß befinden.

b) *Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei allen fünf Ziehungen das Gummibärchen rot ist, wenn vorab bekannt ist, dass sich in dem Gefäß genau 1 rotes Gummibärchen befindet (bzw. 2, 3, 4 oder 5 rote Gummibärchen befinden).*

c) *Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in dem Gefäß ausschließlich rote Gummibärchen befinden, wenn bei allen fünf Ziehungen ein rotes Gummibärchen gezogen wird.*

Lösungen für die Aufgaben zur 2. Runde des Landeswettbewerbs 2021

Lösung zu Aufgabe 1: Vielfache von 3

a) Jede positive ganze Zahl z hat die Darstellung:
$z = k \cdot 3 + r$ mit $k = 0, 1, 2, ...$ und $r = 0, 1$ oder 2. Genau dann, wenn $r = 0$ ist, dann ist z ein Vielfaches von 3.
$z^2 = (k \cdot 3 + r)^2 = 9 \cdot k^2 + 6 \cdot k \cdot r + r^2$
Die ersten beiden Summanden sind durch 3 teilbar und $r^2 = 0, 1$ oder 4.
Da 4 bei der Division durch 3 den Rest 1 besitzt, hat z^2 nur die Reste 0 oder 1.

b) In der nachfolgenden Tabelle sind die Reste von $m^2 + n^2$ bei der Division durch 3 angegeben, abhängig von den jeweiligen Resten von m^2 und n^2:

Rest von n^2 →	**0**	**1**
Rest von m^2 ↓ 0	0	1
1	1	2

Man sieht:
Wenn $m^2 + n^2$ ein Vielfaches von 3 ist, d.h. den Rest 0 besitzt, dann haben sowohl m^2 als auch n^2 jeweils den Rest 0, d.h., sie sind jeweils ein Vielfaches von 3.
Folgerung: $m^2 + n^2$ *Vielfaches von 3* $\Rightarrow$ m^2 *und* n^2 *Vielfaches von 3*

Aus $m^2 = m \cdot m = 3 \cdot k$ folgt, weil 3 eine Primzahl ist, dass 3 auch ein Teiler von m ist und damit m ein Vielfaches von 3 ist.
Analog: n ist ein Vielfaches von 3.

Lösung zu Aufgabe 2: Flaschenverschluss
Der obere Rand des Deckels hat einen Umfang von $U_1 = 3 \cdot \pi cm$.
Bei einer Umdrehung durchläuft der obere Rand des Deckels einen Kreisbogen der Länge $b_1 = \pi \cdot 30 \cdot \frac{\alpha}{180°} cm$.
Mit $b_1 = U_1$ erhält man $\alpha = 18°$.

Da die Mantellinie 1,5 cm lang ist, durchläuft der untere Rand des Deckels einen Bogen der Länge $b_2 = \pi \cdot 31{,}5 \cdot \frac{18°}{180°} cm$
der genauso lang ist wie der Umfang des unteren Randes des Deckels. Aus $\pi \cdot d = \pi \cdot 31{,}5 \cdot \frac{18°}{180°} cm$ ergibt sich der Durchmesser *d* des unteren Deckelrandes zu 3,15 cm.

Variante mit Hilfe des Strahlensatzes:
$\frac{U_2}{U_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{31{,}5cm}{30cm}$ **mit Begr.** $\Rightarrow d_2 = 3cm \cdot \frac{31{,}5cm}{30cm} = 3{,}15cm$

Lösung zu Aufgabe 3: Zahlenschloss

a) Hellen geht strategisch folgendermaßen vor:
Jürgen dreht ein beliebiges Rad auf $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, Hellen dreht ein beliebiges zweites Rad auf $9 - a$. Jürgen dreht ein drittes Rad auf b, Hellen ein viertes auf $9 - b$. Jürgen dreht das vorletzte Rad auf c, Hellen das letzte auf $9 - c$.

Somit entsteht eine Zahl *z* mit der Quersumme
$Q(z) = a + 9 - a + b + 9 - b + c + 9 - c = 27$, unabhängig von der Reihenfolge und Wahl der gedrehten Ziffern.

Nach der Teilbarkeitsregel für *n* = 9 ist wegen 9|27 auch *z* durch 9 teilbar und Hellen gewinnt.

b) Eine Zahl der Form $abcabc$ hat die alternierende Quersumme
$c - b + a - c + b - a = 0$ und ist nach der Teilbarkeitsregel für 11 somit durch 11 teilbar.

Gewinnstrategie: Hellen kann die Zahlenform $abcabc$ erzwingen, indem sie in jedem Doppelzug genau die gleiche Ziffer wie Jürgen vor ihr an demjenigen Rad dreht, das sich genau drei Drehräder (rechts oder links) von Jürgens gedrehten Rad entfernt befindet. So ist die Teilbarkeit durch 11 gewährleistet.

Bemerkungen:

1. Analog kann Hellen z. B. auch die Form $bbcaac$und alle abc-Permutationen in der Gruppe Einer-/Hunderter- und Zehntausenderstelle sowie in der Gruppe Zehner-/Tausender-/Hunderttausenderstelle erzwingen.
2. $abcabc = (100000 + 100)a + (10000 + 10)b + (1000 + 1)c = 1001 \cdot (100a + 10b + c)$ ist für alle $a, b, c \in Z$ durch 1001 teilbar, wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ also sogar neben 11 auch durch 7 und 13.

Lösung zu Aufgabe 4: Gummibärchen

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer der Ziehungen ein rotes Gummibärchen gezogen wird, beträgt $\frac{4}{3+5+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, fünfmal hintereinander ein rotes Gummibärchen zu ziehen, $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$.

b) Es sei p_i die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle fünf gezogenen Gummibärchen rot sind, wenn sich genau *i* rote Gummibärchen in dem Gefäß befinden.
Dann gelten:
$p_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125}, p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^5 = \frac{32}{3125}, p_3 = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}, p_4 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}, \quad p_5 = 1 = \frac{3125}{3125}$.

c) Die Wahrscheinlichkeiten aus b) verhalten sich also wie 1 : 32 : 243 : 1024 : 3125.

Wegen 1 + 32 + 243 + 1024 + 3125 = 4425, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich fünf rote Gummibärchen in dem Gefäß befinden, $\frac{3125}{4425} = \frac{125}{177} = 70{,}62\%$.