Lösung zu Aufgabe 1: <u>Neue Rechenoperation</u>

a) $20\#23 = 20:23 + 23:20 = \frac{929}{460} = 2\frac{9}{460}$.

b) $x\#y = x:y + y:x \overset{!}{=} 2 \underset{\cdot\, xy \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 = 2xy \underset{-2xy,\, b.F.}{\Leftrightarrow} (x-y)^2 = 0$.

Somit gilt: $x\#y = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$, also die Zahlenpaare (x, x) mit beliebiger positiver rationaler Zahl *x*.

c) Für alle rationalen Zahlenpaare (x, y) gilt:

$$x\#y = x:y + y:x = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} + 2 \geq 2,$$

da der erste Summand am Ende der Gleichungskette nach Voraussetzung größer oder gleich 0 ist, was zu zeigen war.

Lösung zu Aufgabe 2: <u>Radrennen</u>

Wenn Felix die Kuppe erreicht hat, benötigt Florian weitere 12s wegen

$$v = \frac{s}{t} \Leftrightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{50m}{15\frac{km}{h}} = \frac{0{,}05}{15}\, h = \frac{0{,}01}{3}\, h = 0{,}2\, min = 12s,$$

um die Kuppe zu erreichen.

Da beide zum Beschleunigen die gleiche Strecke und die gleiche Zeitspanne benötigen, bleibt dieser zeitliche Vorsprung bis ins Ziel gleich. Florian kommt also 12s nach seinem Freund ins Ziel.

In dieser Zeit legt er eine Strecke von

$\frac{12}{3600} \cdot 54\, km = \frac{9}{50}\, km = 180\, m < 500\, m$ zurück.

Felix‘ Vorsprung im Ziel beträgt daher 180m.

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen

Lösung zu Aufgabe 3: <u>Würfel</u>

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ die Augenzahlen auf den Oberseiten der Würfel zu Beginn.
Deren Summe beträgt: (1) $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$

a) Wenn man alle Würfel umdreht, dann ist in der Summe S jedes a_i durch $(7 - a_i)$ mit $i = 1, \ldots, 10$ zu ersetzen.
Man erhält:

$$S' = (7 - a_1) + (7 - a_2) + \ldots + (7 - a_{10}) = 70 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}) = 70 - S$$

Da S gerade ist, ist auch S' gerade und nach insgesamt 2023 Umdrehungsvorgängen ist die Summe der Augenzahlen auf den Oberseiten gerade.

b) Wenn man drei Würfel umdreht – z.B. den 1., 2. und 3. Würfel – dann sind in der Summe S a_1 durch $(7 - a_1)$, a_2 durch $(7 - a_2)$ und a_3 durch $(7 - a_3)$ zu ersetzen.
Man erhält:

$$S' = (7 - a_1) + (7 - a_2) + (7 - a_3) + \ldots + a_{10} = 21 - (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 + \ldots + a_{10} \quad (2)$$

1. Fall: $(a_1 + a_2 + a_3)$ ist gerade
Daraus folgt mit (1) und da S gerade ist: $a_4 + \ldots + a_{10}$ ist gerade (3)
Wegen (2), (3) und da $21 - (a_1 + a_2 + a_3)$ ungerade ist, ist S' ungerade.

2. Fall: $(a_1 + a_2 + a_3)$ ist ungerade.
Daraus folgt mit (1) und da S gerade ist: $a_4 + \ldots + a_{10}$ ist ungerade (4)
Wegen (2), (4) und da $21 - (a_1 + a_2 + a_3)$ gerade ist, ist S' ungerade.
Es entsteht nach dem ersten Umdrehungsvorgang eine ungerade Summe S'.
Ersetzt man oben „S gerade“ durch „S ungerade“, ergibt sich nach dem zweiten Umdrehungsvorgang eine gerade Summe S', d.h. die Summe wechselt jedes Mal von gerade nach ungerade und umgekehrt.
Nach 2023 Schritten ist die Summe ungerade.

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen

Lösung zu Aufgabe 4: Grundstücksvergrößerung

a) Foto

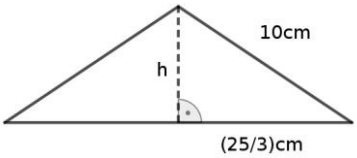
b) Benennungen:

s: Mantellinie

α: Mittelpunktswinkel des Kegelmantels

r_i: Radien der Kegelgrundflächen

s = 10cm bei beiden Kegeln, der Mittelpunktswinkel beträgt 300° bzw. 180°.



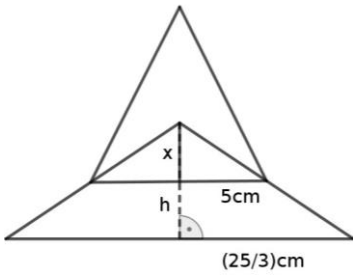
Erster Kegel:

Umfang der Grundfläche: $2\pi r_1 = 2\pi s \frac{300°}{360°} \Leftrightarrow$

$r_1 = s \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{3} cm$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man:

$$h_1 = \sqrt{100cm^2 - \frac{625}{9} cm^2} = \sqrt{\frac{275}{9}} cm \approx 5{,}5cm$$



Zweiter Kegel:

Umfang der Grundfläche: $2\pi r_2 = 2\pi s \frac{180°}{360°} \Leftrightarrow r_2 = s \cdot \frac{1}{2} = 5cm$ (s.o.)

Daraus erhält man $h_2 = \sqrt{100cm^2 - 25cm^2} = \sqrt{75} cm \approx 8{,}7cm$

c) Mit x benennen wir den Teil von h_1, der im Inneren des oberen Kegels liegt.

Dann gilt nach dem zweiten Strahlensatz:

$\frac{x}{h_1} = \frac{5}{\frac{25}{3}}$ <==> $x = \frac{3}{5} \cdot h_1$

Daher ergibt sich für die Gesamthöhe des Hutes:

$$H = \frac{2}{5} \cdot h_1 + h_2 = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{275}{9}} cm + \sqrt{75} cm \approx 10{,}9cm$$

Der Landeswettbewerb Mathematik wird unterstützt von Debeka Versichern und Bausparen