

Landeswettbewerb Mathematik

Musteraufgaben I

2. Runde



Rheinland-Pfalz
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

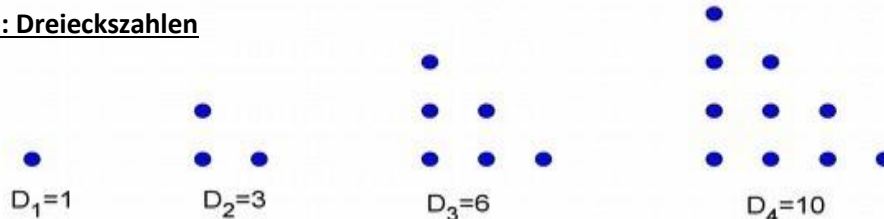
Name: _____

Klasse: _____

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Die Lösungswege müssen mathematisch begründet und übersichtlich dargestellt werden. Nachmes-
sen oder Nachrechnen einiger Beispiele genügt als Lösung nicht.

Aufgabe 1: Dreieckszahlen



Die Figur zeigt die ersten vier Dreieckszahlen.

- Bestimme die Dreieckszahlen D_5 , D_6 und D_{100} .
- Zeige allgemein, dass die Summe zweier aufeinander folgender Dreieckszahlen stets eine
Quadratzahl ist.

Aufgabe 2: Zugdurchfahrt

Jonas wartet auf einem Bahnsteig auf seinen Zug. Bevor dieser kommt, fährt ein Zug mit konstanter
Geschwindigkeit ohne zu halten durch.

Jonas schätzt die Länge des Bahnsteigs auf 340 m. Zwischen dem Zeitpunkt, zu dem die Lokomotive
den Anfang des Bahnsteigs passiert, bis zu dem Moment, in dem das Schlusslicht das Ende des
Bahnsteigs erreicht, vergehen ungefähr 23 s. Um an Jonas vorbeizufahren, benötigt der Zug ca. 6s.
Welche Länge und welche Geschwindigkeit des Zuges ergeben sich aus diesen Werten?

Aufgabe 3: Uhrenvergleich

Bei einem Uhrmacher wurden eine Wanduhr, eine Tischuhr, ein Wecker und eine Armbanduhr zur
Reparatur abgegeben. Alle vier Uhren sind mit einem mechanischen Uhrwerk und einem
Sekundenzeiger ausgestattet.

- Die Wanduhr geht im Vergleich zur Echtzeit genau 2 Minuten je Stunde nach.
- Die Tischuhr geht genau 2 Minuten pro Wanduhrstunde vor.
- Der Wecker geht genau 2 Minuten pro Tischuhrstunde nach.
- Die Armbanduhr geht genau 2 Minuten pro Weckerstunde vor.

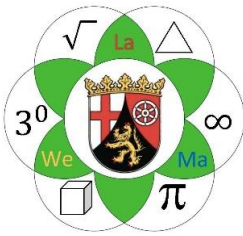
Um die Abweichungen zu überprüfen, stellt der Uhrmacher um Punkt 12 Uhr alle Uhren auf die
Echtzeit ein.

- Bestimme, welche Zeit die Tischuhr um genau 13 Uhr Echtzeit desselben Tages anzeigt.
- Welche Uhrzeit zeigt die Armbanduhr um 19 Uhr Echtzeit an diesem Tag an?

Aufgabe 4: Flächenoptimierung

Gegeben ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse \overline{AB} der Länge 6 cm.
Der Schnittpunkt der Höhe h_c mit der Seite \overline{AB} sei D . P sei ein beliebiger von C und D verschiedener
Punkt auf h_c . M sei der Mittelpunkt der Strecke $x = \overline{PD}$.
Durch P und M werden Parallelen zur Geraden AB gelegt. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit den
Dreiecksseiten \overline{AC} und \overline{BC} bilden ein Trapez.

- Fertige für $x = 1$ cm eine saubere Zeichnung an.
Bestimme den Flächeninhalt des oben beschriebenen Trapezes.
*Hinweis: Die Längen der benötigten Strecken müssen mit Hilfe geometrischer Überlegungen
bestimmt werden, reines Messen ist nicht zulässig.*
- Bestimme, für welche Lage P der Flächeninhalt des Trapezes am größten ist.



Landeswettbewerb Mathematik
Musteraufgaben I
2. Runde



Rheinland-Pfalz
 MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Lösungen zur Aufgabe 1

a) $D_5 = 15; D_6 = 21$

$$D_{100} = 1 + 2 + \dots + 100 = 50 \cdot 101 = 5050$$

b) $D_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1) \Rightarrow$

$$D_n + D_{n+1} = \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Lösungen zur Aufgabe 2

x sei die Länge des Zuges in m und v seine Geschwindigkeit in m/s.

In 23 s legt der Zug $340 + x$ Meter zurück. Daher ist $v = \frac{340 + x}{23}$.

Andererseits legt der Zug x Meter in 6s zurück. Daher gilt $v = \frac{x}{6}$.

Daraus erhält man

$$6(340 + x) = 23x \quad \Leftrightarrow \quad 2040 = 17x \quad \Leftrightarrow \quad x = 120$$

Für v ergibt sich damit $v = 120 : 6 = 20$.

Der Zug ist also ungefähr 120 m lang und fährt mit einer Geschwindigkeit von ca. $20 \text{ m/s} = 72 \text{ km/h}$.

Lösungen zur Aufgabe 3

a) Nach 60 min Wanduhrzeit ist die Tischuhr 62 min weiter gegangen. Daher zeigt die Tischuhr

für jede Minute der Wanduhr $\frac{62}{60}$ Minuten an.

Nach einer Stunde Echtzeit ist die Wanduhr 58 min gegangen. Daher entsprechen einer

Stunde Echtzeit $58 \cdot \frac{62}{60} = \frac{899}{15} = 59 \frac{14}{15} = 59 \frac{56}{60}$ Minuten auf der Tischuhr.

Also fehlen genau 4 Tischuhrsekunden und somit zeigt die Tischuhr 12:59:56 Uhr.

b) Für 60 min auf der Tischuhr zeigt der Wecker 58 min an. Folglich zeigt der Wecker für jede

Minute auf der Tischuhr $\frac{58}{60}$ Minuten an. Für $58 \cdot \frac{62}{60}$ Minuten auf der Tischuhr

(also für eine Stunde Echtzeit, siehe Teil a)) zeigt der Wecker entsprechend

$$\left(58 \cdot \frac{62}{60}\right) \frac{58}{60} = \frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{3600} = \frac{208568}{3600} = 57 \frac{3368}{3600} \text{ Minuten an.}$$

Analog zeigt die Armbanduhr für jede Minute auf dem Wecker $\frac{62}{60}$ Minuten an. Daher

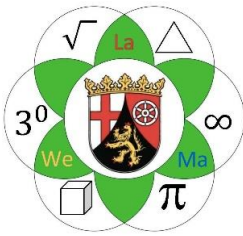
zeigt die Armbanduhr für $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{3600}$ Minuten auf dem Wecker, also für eine Stunde

Echtzeit, $\frac{58 \cdot 62 \cdot 58}{3600} \cdot \frac{62}{60} = \frac{58 \cdot 62 \cdot 58 \cdot 62}{216000} = \frac{12931216}{216000}$ Minuten an.

In 7 Stunden Echtzeit vergehen auf der Armbanduhr entsprechend

$$7 \cdot \frac{12931216}{216000} = \frac{90518512}{216000} \text{ Minuten. Das entspricht } 60 \cdot \frac{90518512}{216000} = 25144,03\bar{1} \text{ Sekunden, also}$$

etwa 6 h 59 min 4 s. Somit zeigt die Armbanduhr um 19 Uhr Echtzeit 18:59:04 Uhr an.



Landeswettbewerb Mathematik
 Musteraufgaben I
 2. Runde



Rheinland-Pfalz
 MINISTERIUM FÜR BILDUNG

Lösung zur Aufgabe 4:

Natürlich lässt sich eine Lösung zu b) auf a) übertragen. Korrekturfreundlich ist hier jedoch eine in a) und b) getrennte Lösung dargestellt.

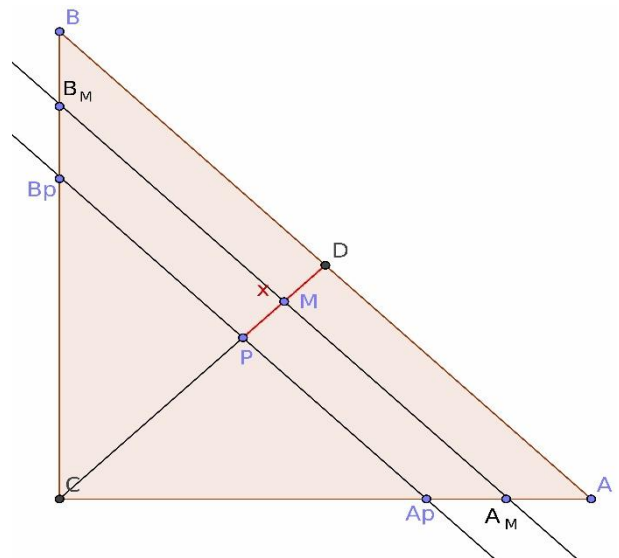
Im gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck muss die Höhe h_c halb so lang sein wie die Hypotenuse, also $h_c = 3$ cm.

Seien die Schnittpunkte der Parallelen zu \overline{AB} durch P mit den Dreiecksseiten des Dreiecks ABC mit A_p und B_p und analog die Punkte A_M und B_M wie in der Skizze bezeichnet.

Die Dreiecke $A_p B_p C$ und $A_M B_M C$ sind nach Konstruktion dem Ausgangsdreieck ABC ähnlich.

Mit $x = 1$ cm ergibt sich in nebenstehende Skizze:

$\overline{PM} = \overline{MD} = 0,5$ cm und aufgrund der Ähnlichkeit und der Symmetrie
 $\overline{B_M M} = \overline{M A_M} = \overline{M C} = 2,5$ cm,
 sowie $\overline{B_p P} = \overline{P A_p} = \overline{P C} = 2$ cm.
 Flächensubtraktion ergibt die Trapezfläche:
 $F_T = F_{A_M B_M C} - F_{A_p B_p C} = 2,25$ cm².



Für die allgemeinen Überlegungen wird auf Einheiten verzichtet.

Für variables $0 < x < 3$ ergibt sich für die Streckfaktoren $k_p = \frac{h_c - x}{h_c}$ und $k_M = \frac{h_c - 0,5x}{h_c}$.

Den Flächeninhalt des zu untersuchenden Trapezes erhält man wieder durch Flächensubtraktion $F_T = F_{A_M B_M C} - F_{A_p B_p C} = F_{ABC} \left((k_M)^2 - (k_p)^2 \right)$.

Äquivalente Umformungen führen auf $F_T = F_{ABC} \cdot \frac{3}{4h_c^2} \left(\frac{4}{3} h_c x - x^2 \right)$.

Mit $h_c = 3$ vereinfacht sich dies zu $F_T = \frac{1}{12} \cdot F_{ABC} (4x - x^2)$.

Der Faktor $\frac{1}{12} \cdot F_{ABC}$ ist konstant, damit wird die Trapezfläche genau dann am größten, wenn

$4x - x^2$ maximal wird.

Nullstellen- und Symmetriebetrachtung für die Funktion $f(x) = 4x - x^2$ liefern $x = 2$.