# TIM Jahrestagung
# 20.6.06-21.6.06 Mainz

**B.Grabinger:**

## Die Rolle der Technologie bei der Einführung neuer Themen im Mathematikunterricht der Klasse 10

I. Trigonometrische Funktionen

II. Logarithmusfunktionen

# Trigonometrische Funktionen

# Ein Flug mit dem London Eye

http://www.ba-londoneye.com/

A flight on the London Eye is an unrivalled experience. As you rise to an incredible 135 metres above the River Thames, the 30 minute rotation provides stunning panoramic views of the city and reveals parts of London which are simply not visible from the ground. For a truly stunning view, visit at sunset or after dark and see the city awash with colour and famous landmarks floodlit. Each capsule is fully enclosed, air-conditioned and holds up to 25 passengers with bench seating provided.

**Price including 10% online discount**
Adult £11.70, Child (5-15) £5.85, Under 5 FREE, Senior (60+)*£9.00
*Senior discount not valid weekends or during July / August.

Spoil your loved one with a romantic champagne flight for two in the luxury of your own private capsule complete with a bottle of Laurent-Perrier champagne served by your host. The package also includes exclusive check-in and fast track entrance; the couple are given a mini guide and box of luxury chocolates for their flight. An all-inclusive price for a maximum of 2 guests aged 18+ years. In addition up to two children aged under five are permitted in the capsule.

**Price includes 10% discount**
£269.10

**1. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit bewegt sich das Riesenrad?**

Lösung:

Verschiedene Antworten sind möglich:

1. Bahngeschwindigkeit $$v = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot \frac{135\,\text{m}}{2} \cdot \pi}{30\,\text{min}} \approx 14{,}14\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

2. Winkelgeschwindigkeit $$\omega = \frac{360^{\circ}}{30\,\text{min}} = \frac{12^{\circ}}{\text{min}}$$

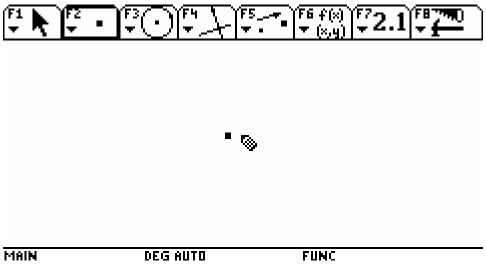
**2. Baue ein Riesenrad mit einem DGS-Programm nach**

Der Radius des Kreises soll 1 sein.

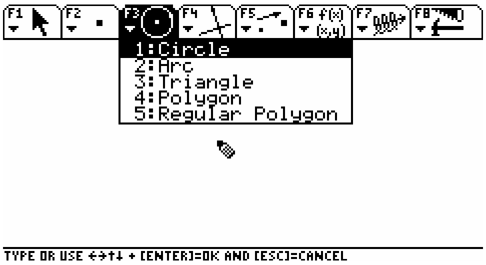

Animation des Riesenrades (roten Punkt mit der Maus greifen und bewegen).

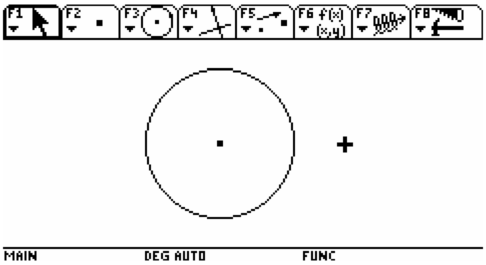
Lösung mit dem voyage 200:

Einen Punkt in die Zeichenebene setzen

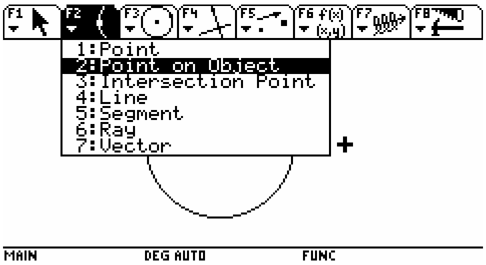


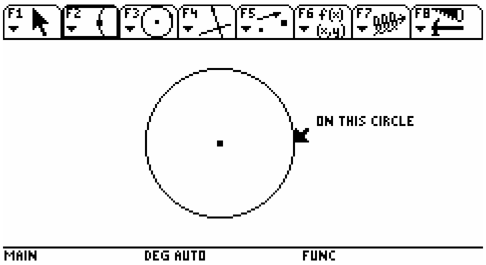

Einen Kreis um diesen Punkt aufziehen

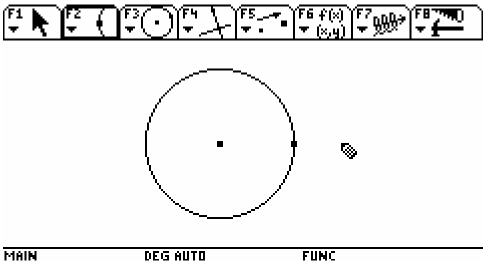


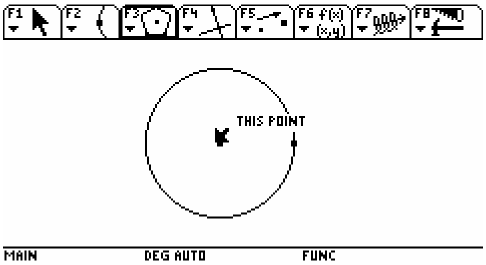

Einen Punkt an den Kreisumfang binden:

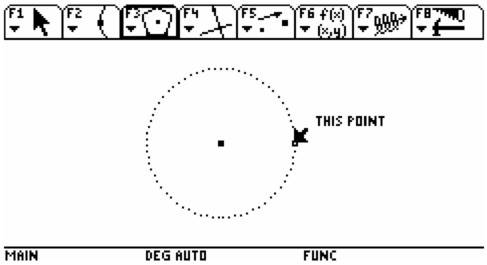


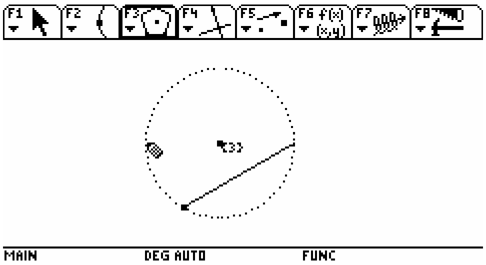



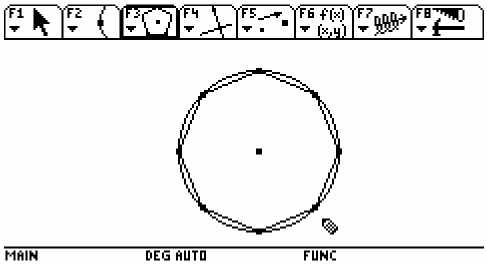




Ein reguläres Polygon um den Kreismittelpunkt zeichnen:

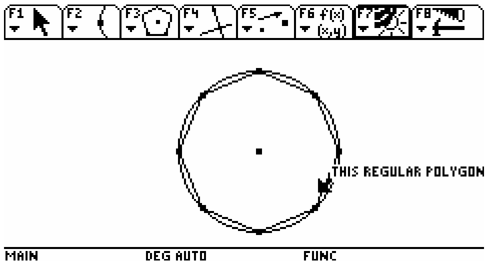


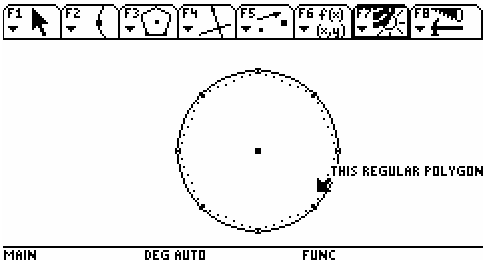



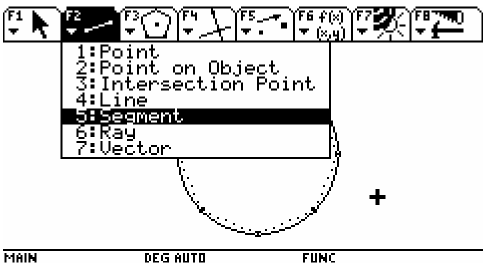



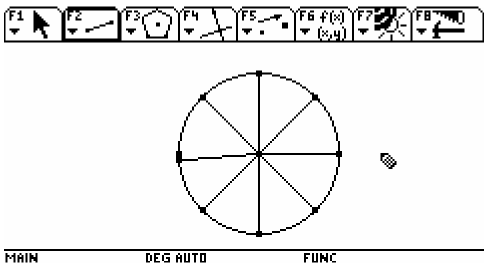

Das Polygon verstecken:

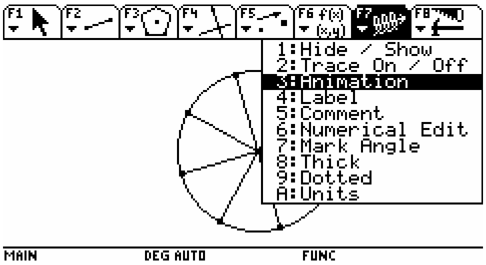



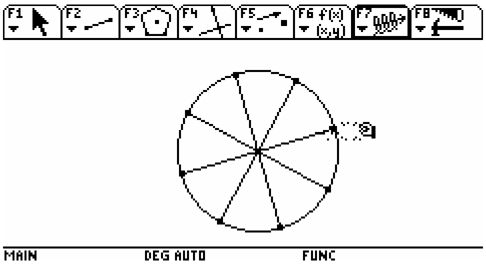

Strecken zwischen Mittelpunkt und Ecken zeichnen:



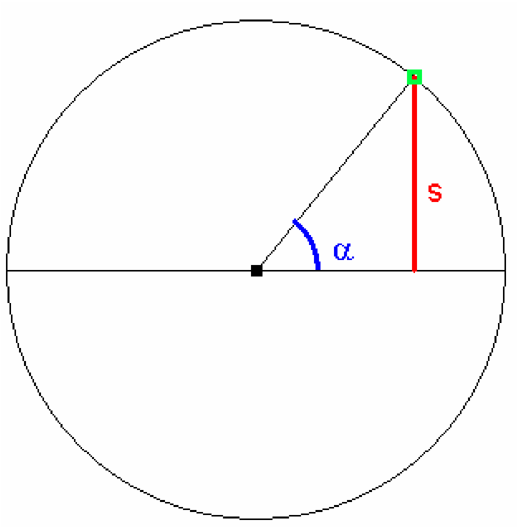

Den zu Beginn an den Kreis gebundenen Punkt animieren:




Das „Riesenrad“ dreht sich.

**3. In welcher Höhe s befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die betrachtete Gondel?**

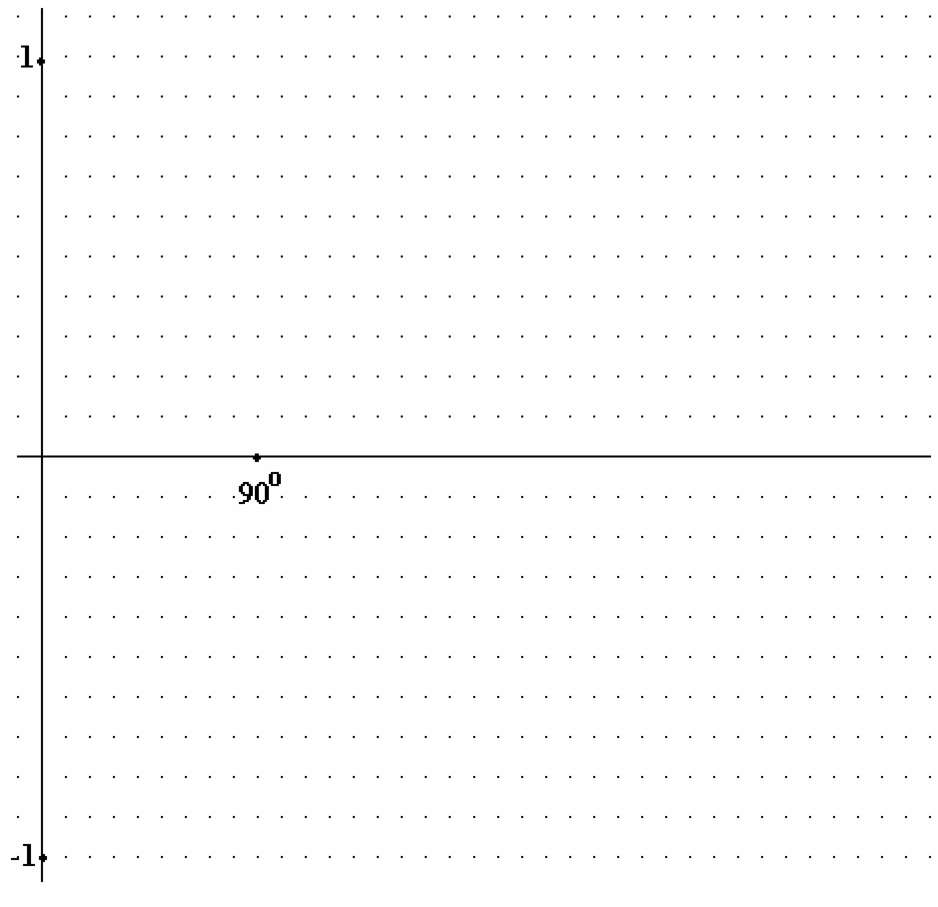



Um diese Frage zu beantworten wird die Zuordnung

**Drehwinkel α → Höhe s**

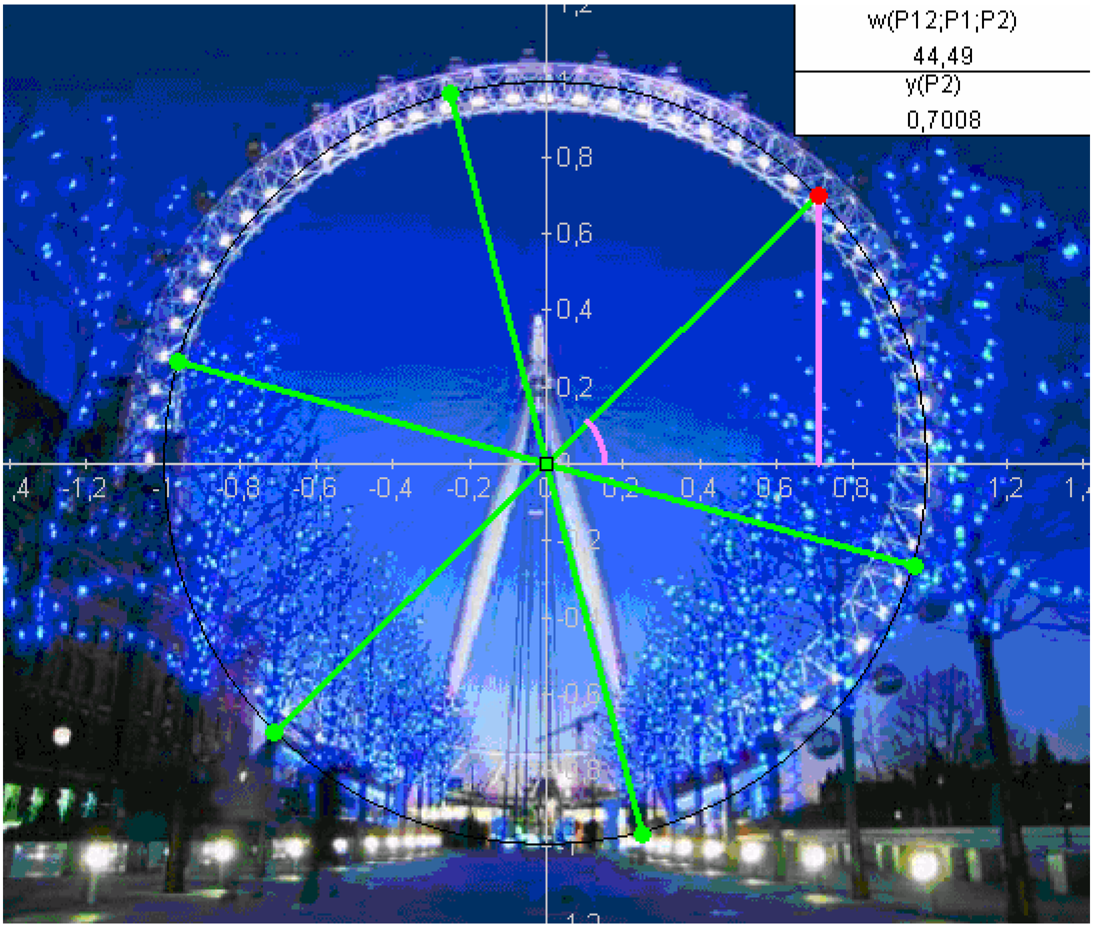
betrachtet.

Versuche den Graph dieser Zuordnung zu skizzieren:



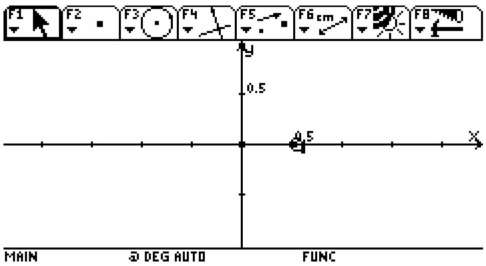
Genauer erhält man den Graphen der betrachteten Zuordnung, indem man zu jedem Winkel α die Höhe s des Punkte über der  x-Achse mißt, die Werte in einer Tabelle sammelt und diese dann graphisch darstellt.

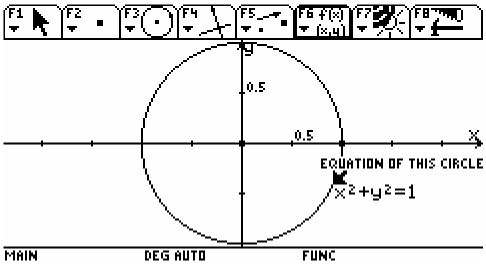
Animation:



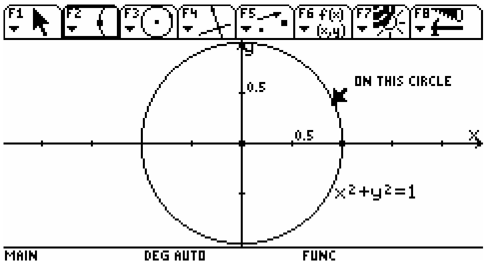

Durchführung mit dem TI-Voyage

In der Applikation „Cabri“ einen Kreis aufziehen und dessen Gleichung anzeigen lassen.

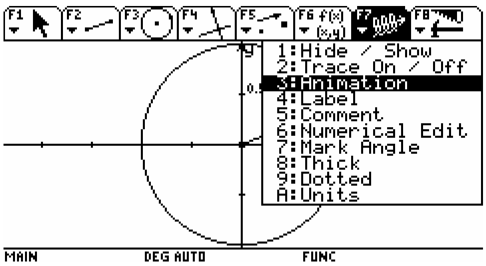


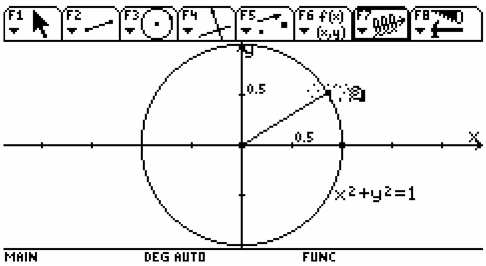



Einen Punkt an den Kreis binden:

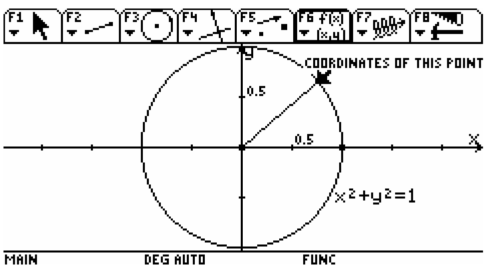



Strecke „Punkt-Mittelpunkt“ einzeichnen und dann den Punkt animieren.

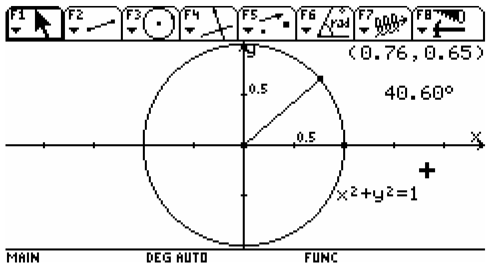


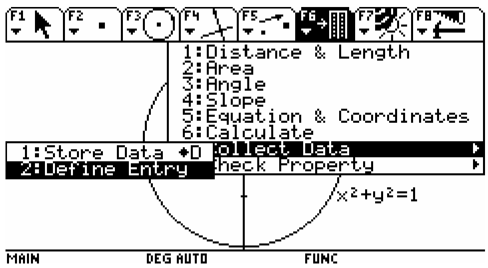

Die Koordinaten des Punktes anzeigen lassen:

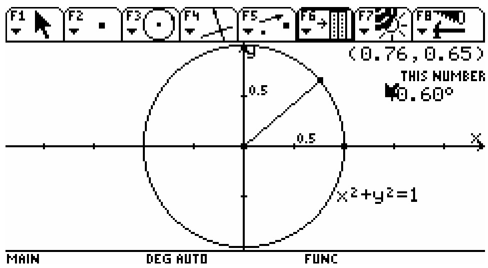



Den Winkel messen lassen:

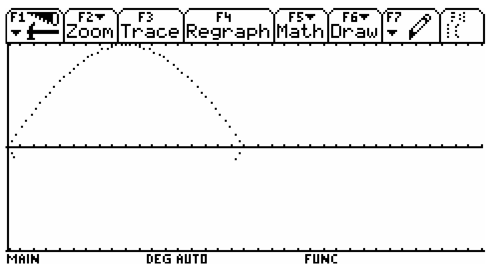



Die gemessenen Werte sammeln lassen und in den Data-Matrix-Editor übertragen:

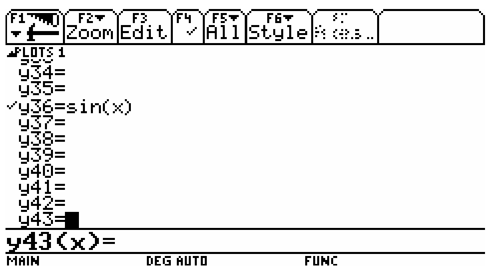


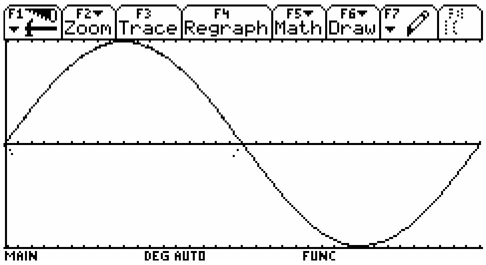

Die gemessenen Werte aus dem Data-Matrix-Editor heraus graphisch darstellen (α zwischen 0 und 90 Grad !)



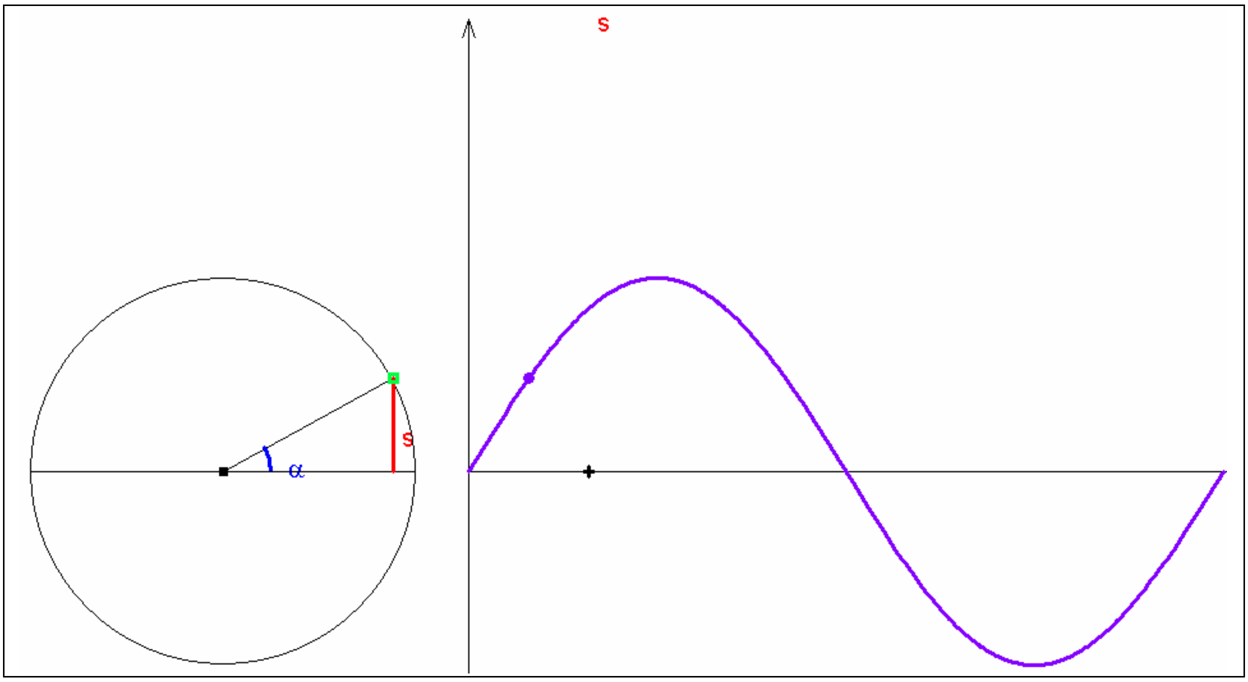

Die Funktion, welche diese Zuordnung beschreibt heißt sin(α) und ist auf dem Rechner implementiert (Rechner ins Gradmaß stellen):



Die Funktion sin(x) angeben als y-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis, wobei x im Gradmaß eingesetzt wird.




Demonstration des Zusammenhangs zwischen α und s:




Weiterführungen des Themas:

**Modellierung des London Eyes**

Die Funktion f(t) soll die Höhe der Gondel über dem Boden zur Zeit t angeben.

Umlaufdauer: $T = 30$ min.

Radius: $r = \frac{135}{2}\,\text{m} = 67{,}5$ m

Es ist $f(t) = r + r\sin(g(t))$, wobei g(t) eine lineare Funktion in t mit folgenden Eigenschaften ist:

$g(0)=0$ (Startwinkel 0 zur Zeit 0)

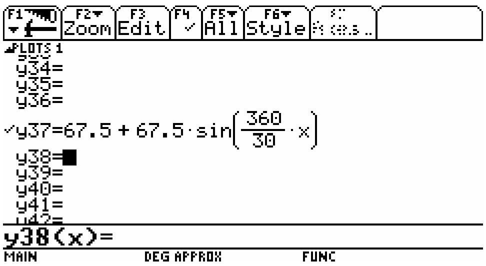
$g(30\text{ min}) = 360^\circ$ (Eine Umdrehung in 30 min)

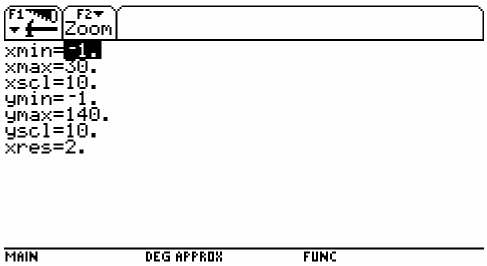
$g(t) = a\,t$

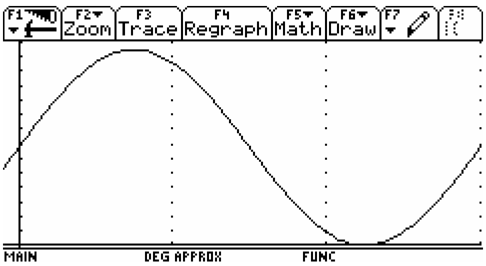
$$360^\circ = a \cdot 30\,\text{min}$$

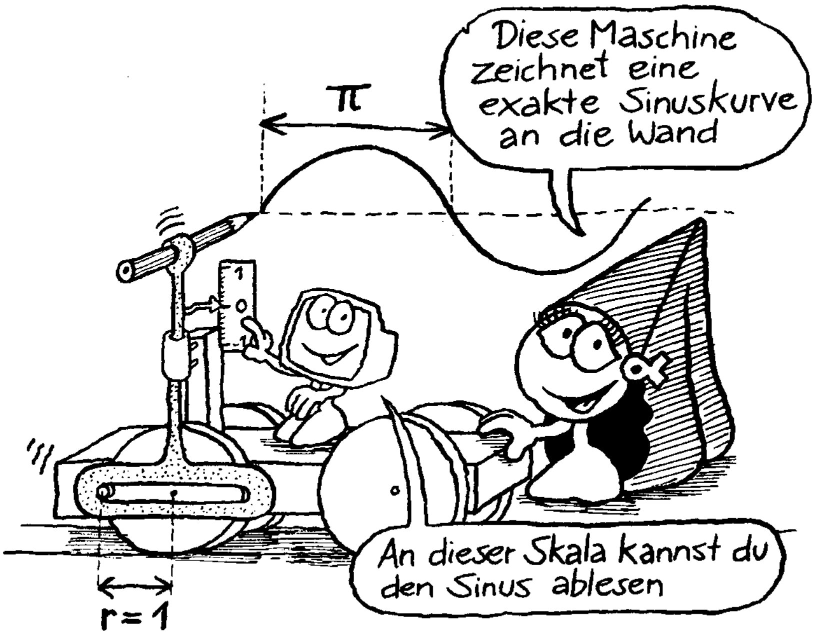
$$a = \frac{360^\circ}{30\,\text{min}}$$

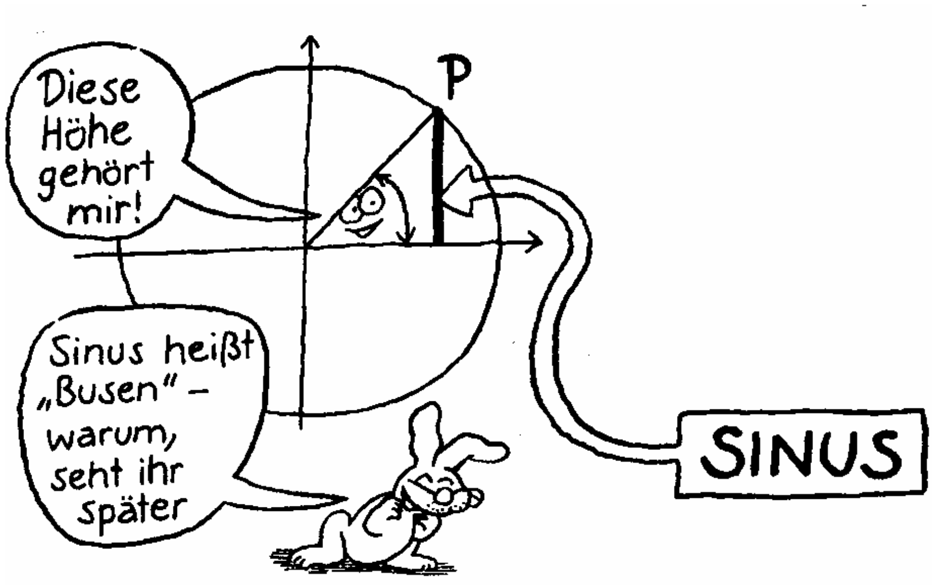
$$f(t) = 67{,}5 + 67{,}5 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{30\,\text{min}} \cdot t\right)$$




π
Diese Maschine zeichnet eine exakte Sinuskurve an die Wand
r = 1
An dieser Skala kannst du den Sinus ablesen


P
Diese Höhe gehört mir!
Sinus heißt „Busen" – warum, seht ihr später
SINUS


Merke dir am besten: Der Sinus steht!
Genau wie ich! Der Sinus ist eigentlich auch die Y-Koordinate des Punktes P
α
P
y
α

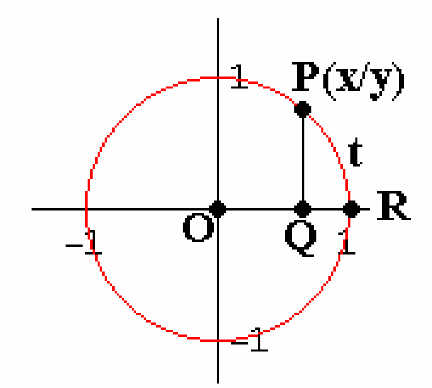
Entsprechend für die x-Koordinate, d.h. cos(x)

Nahe liegend ist auch:

Parameterdarstellung des Kreises anschließen.
(Ab hier wird der Winkel im Bogenmaß genommen!)

# Rennwagen auf dem Rundkurs

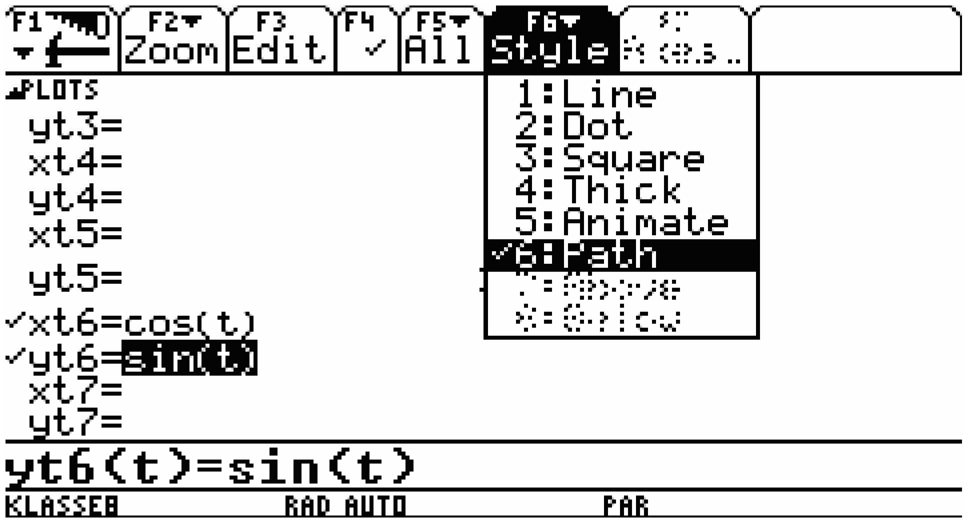
Autos fahren auf einem Rundkurs:

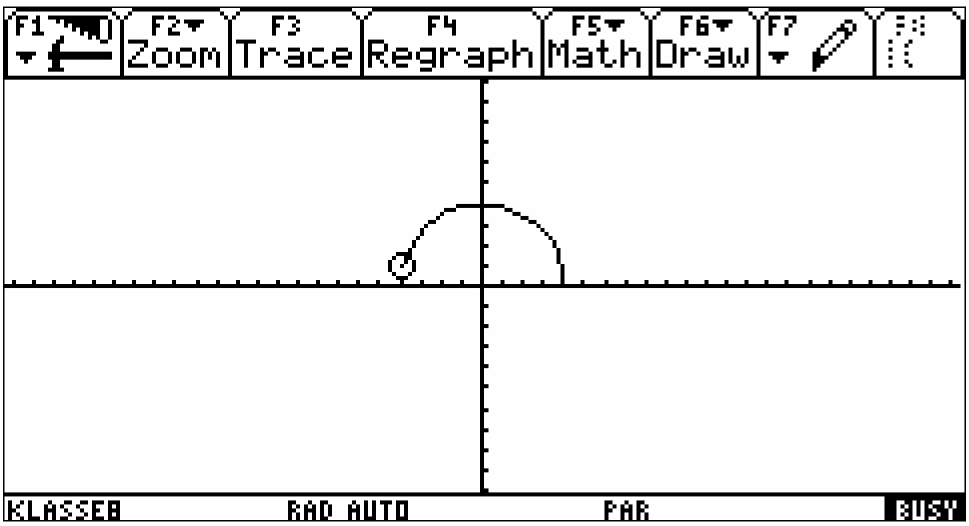



Der Punkt P auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten x und y. Diese hängen ab von der Länge t des Bogens von R nach P.

Üblicherweise nennt man die x-Koordinate von P den **Cosinus von t**, die y-Koordinate den **Sinus von t**.

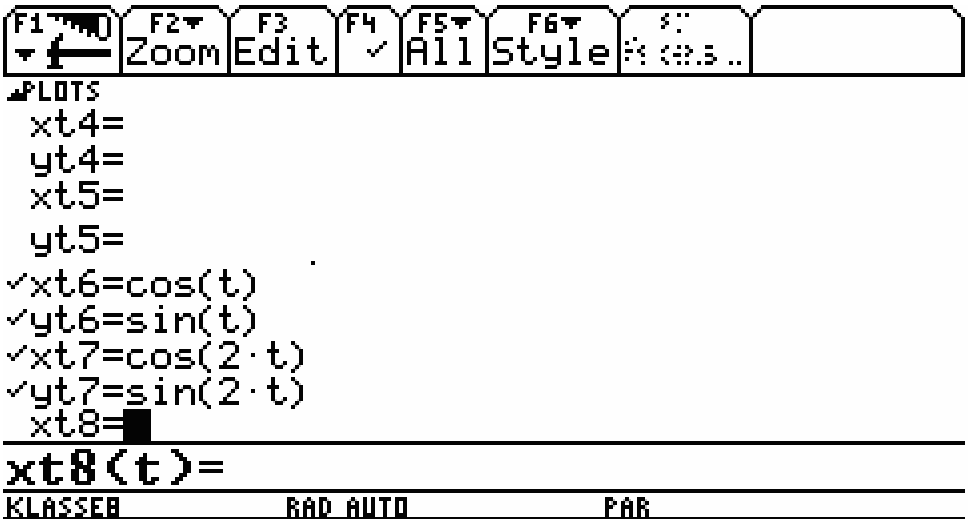
In der Zeichnung gilt also: $\overline{OQ} = x = \cos(t)$ und $\overline{PQ} = y = \sin(t)$


F1
F2 Zoom
F3 Edit
F4 ✓
F5 All
F6 Style
PLOTS
yt3=
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
✓xt6=cos(t)
✓yt6=sin(t)
xt7=
yt7=
1:Line
2:Dot
3:Square
4:Thick
5:Animate
✓6:Path
yt6(t)=sin(t)
KLASSEB RAD AUTO PAR


F1
F2 Zoom
F3 Trace
F4 Regraph
F5 Math
F6 Draw
F7
KLASSEB RAD AUTO PAR BUSY

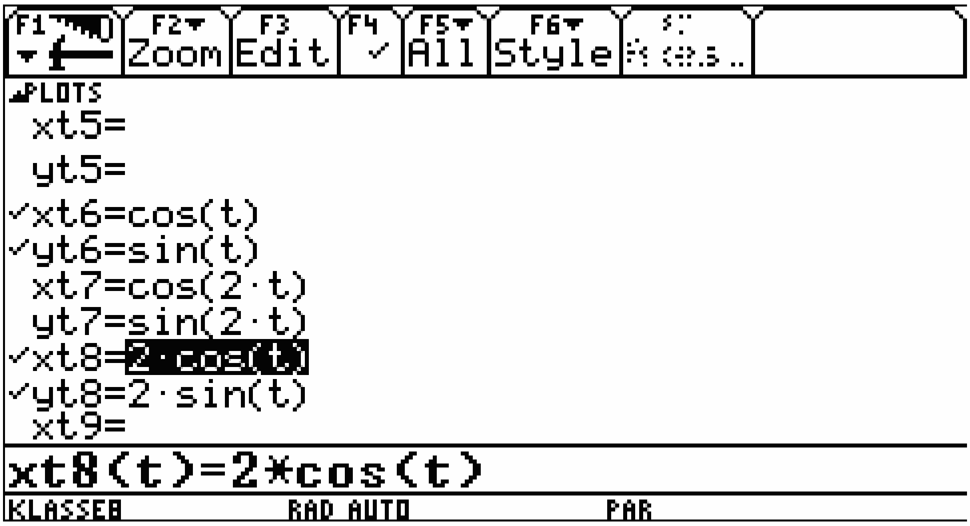
Aufgabe

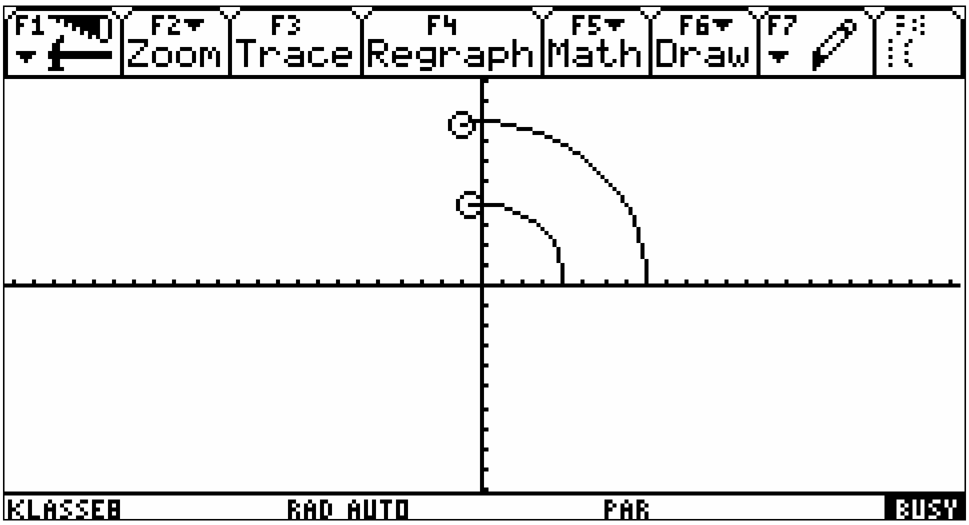
Baue ein Auto das genau doppelt so schnell auf dem Rundkurs fährt wie das eben betrachtete Auto.



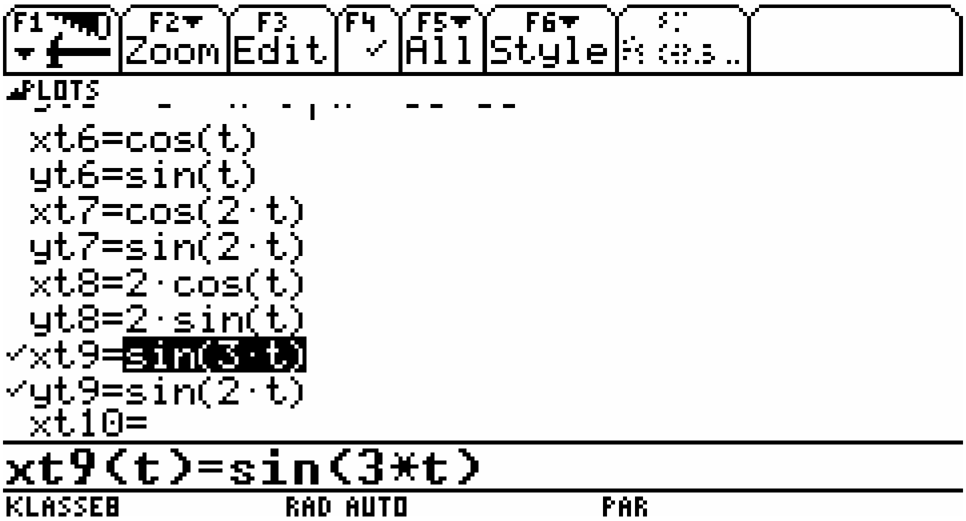
Aufgabe

Baue ein Auto das auf einem Rundkurs mit dem Radius 2 fährt.

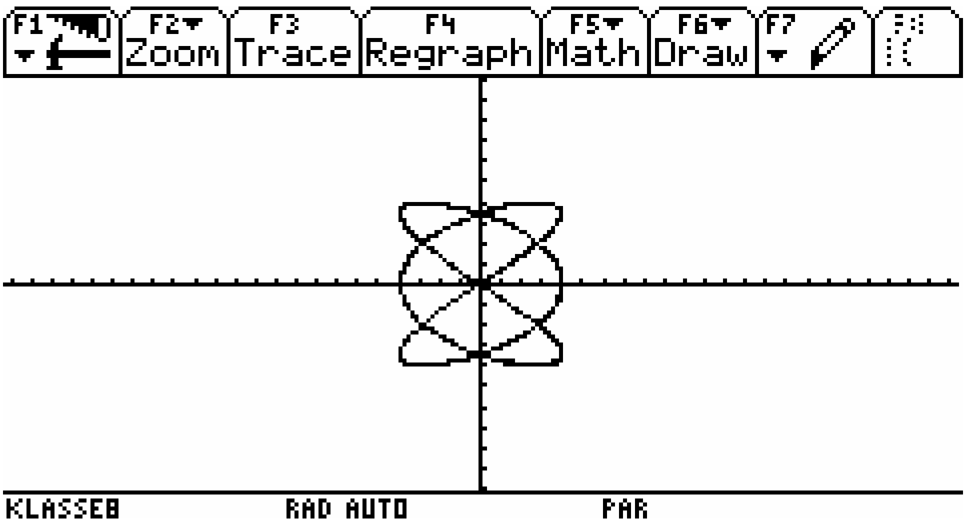


Aufgabe
In der Eingabe von xt9 und yt9 scheint etwas durcheinander geraten zu sein:

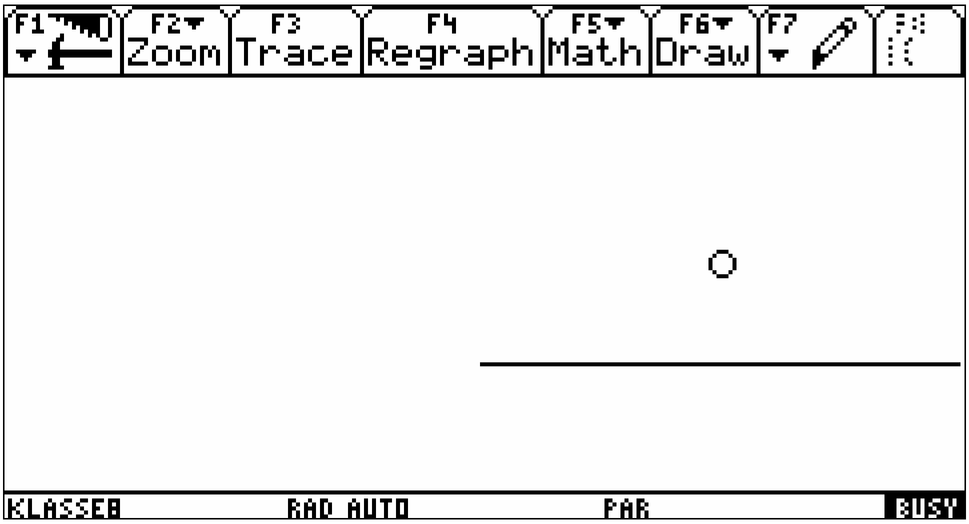


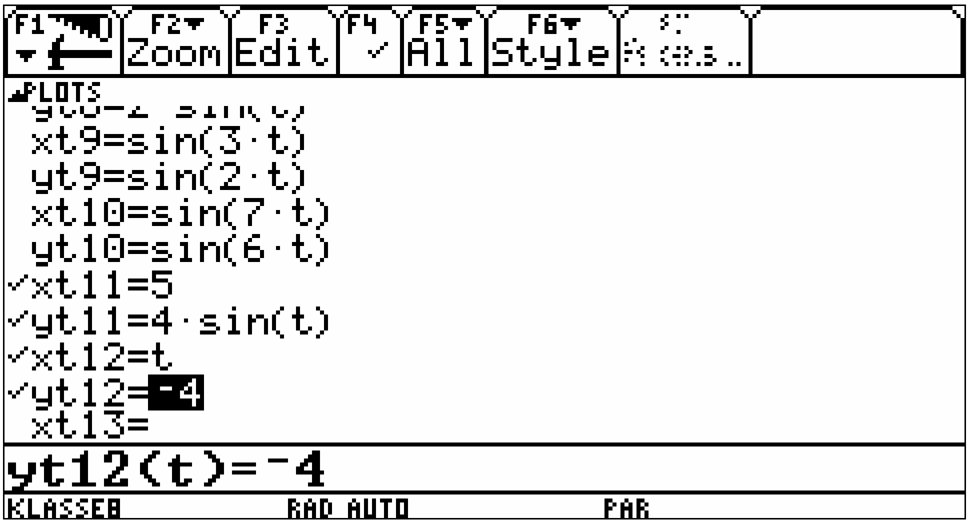

Wie äußert sich dieses „Versehen“ im Aussehen der Bahnkurve? Experimentiere selbst weiter.



Aufgabe

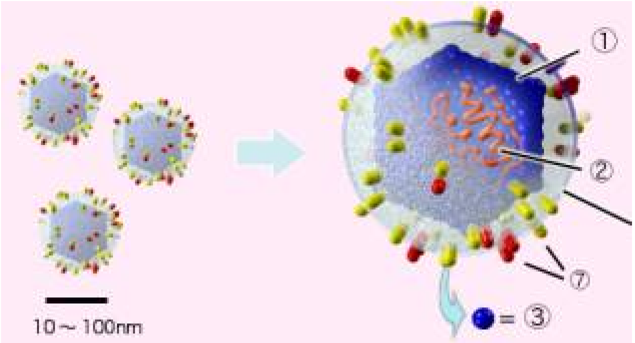
Baue einen „Ball“ der beliebig lange parallel zur y-Achse springt.



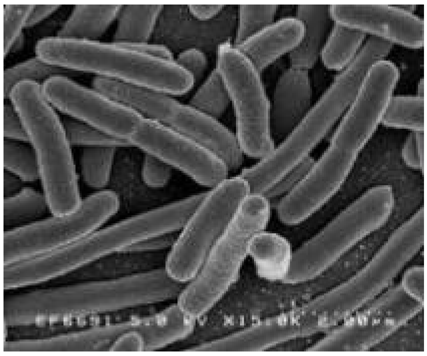



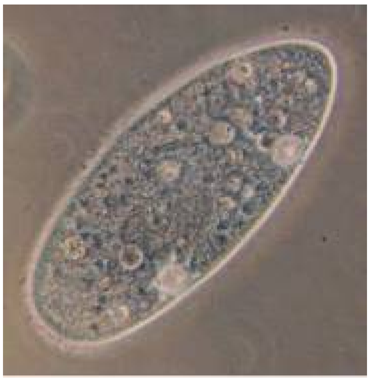
# Logarithmusfunktionen

Stelle die Größe der „Lebewesen“ auf einer Skala dar.



Virus 10 nm


Bakterien  10 Mikrometer


Pantoffeltierchen 0,1 mm


Floh 1mm


Käfer 1cm

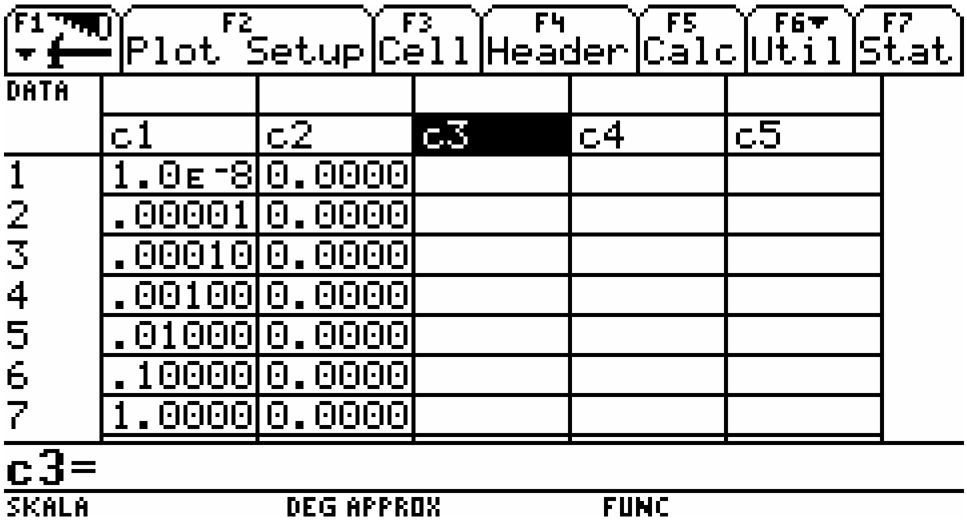

Maus 10 cm

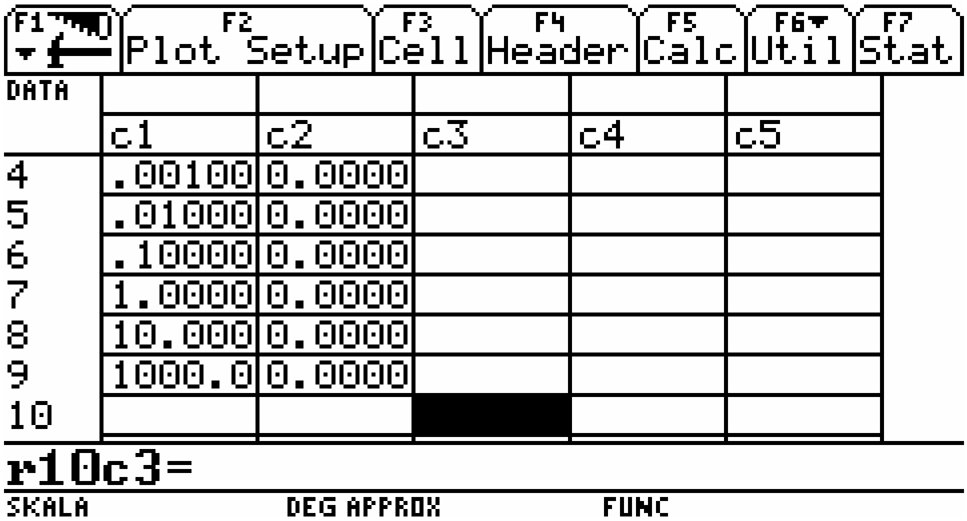

Rotfuchs 1m

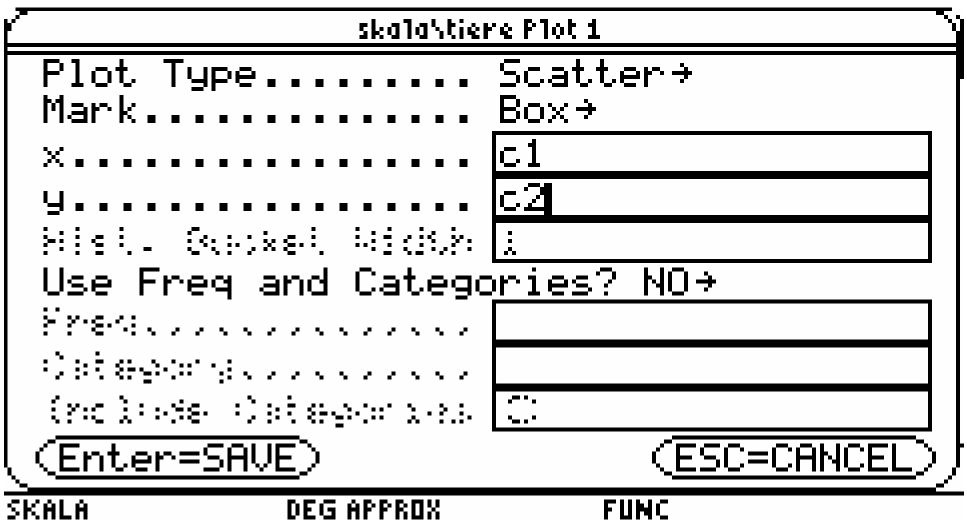

Großer Schwertwal 10 m

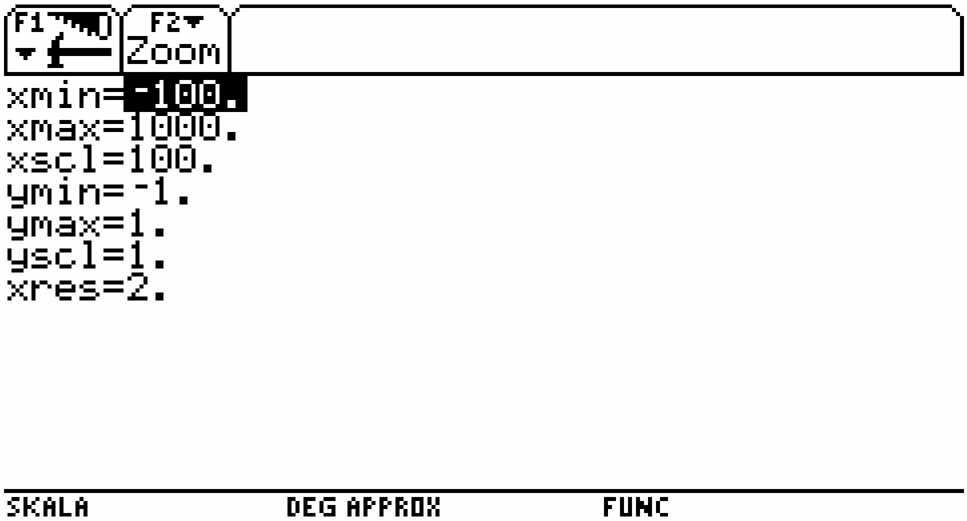
ohne Abbildung: Großes Pilzgeflecht 1 km (Quelle Wikipedia)

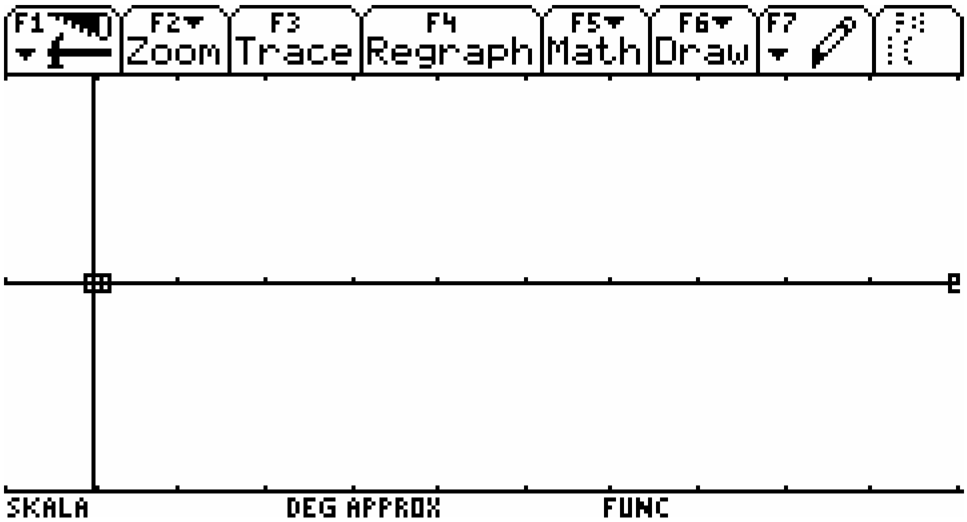
Eingabe der Punktepaare zur Darstellung auf der x-Achse (y-Wert ist 0)



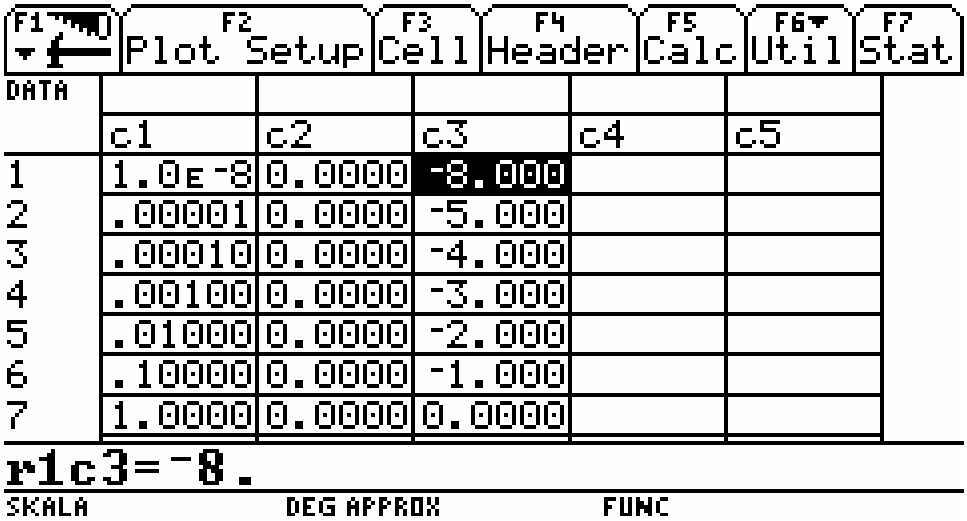


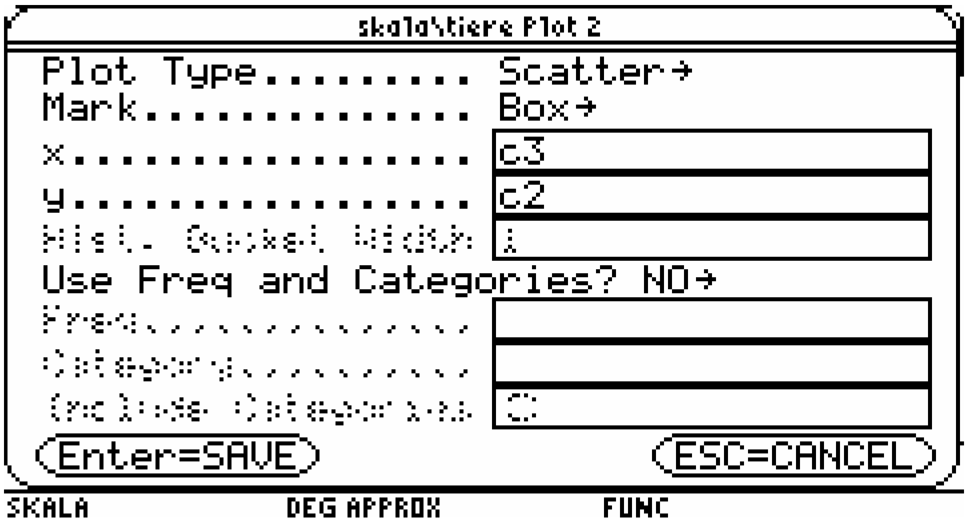



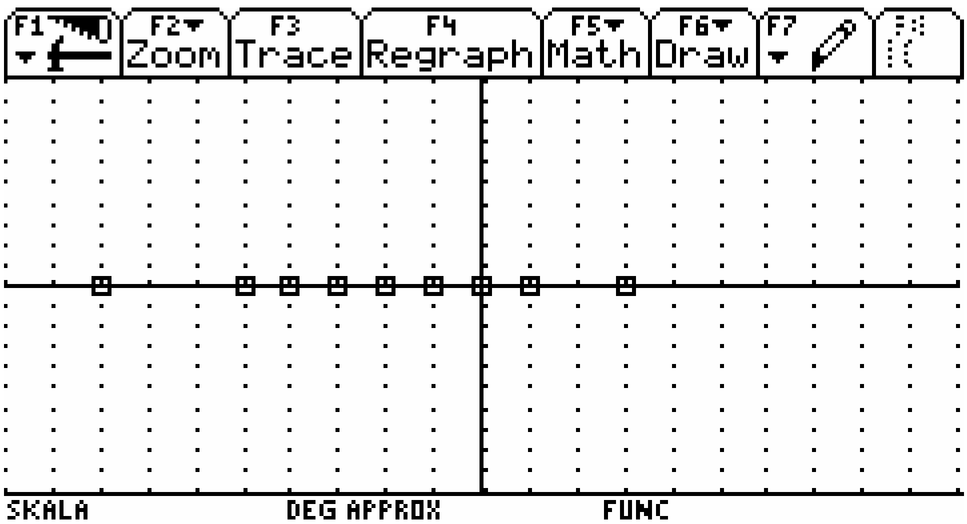

Lösung:
Es ist nicht möglich sämtliche Größen auf einer linearen Skala gleichzeitig darzustellen.

Hinweis:
Schreibe alle Größen in der Einheit Meter. Verwende die Zehnerpotenzdarstellung.

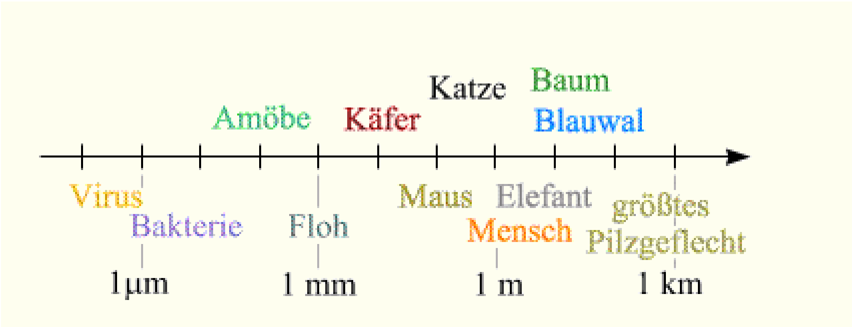
Ausweg: Es bietet sich an den Exponent der Zehnerpotenz aufzutragen.




Damit können alle Zahlen dargestellt werden.



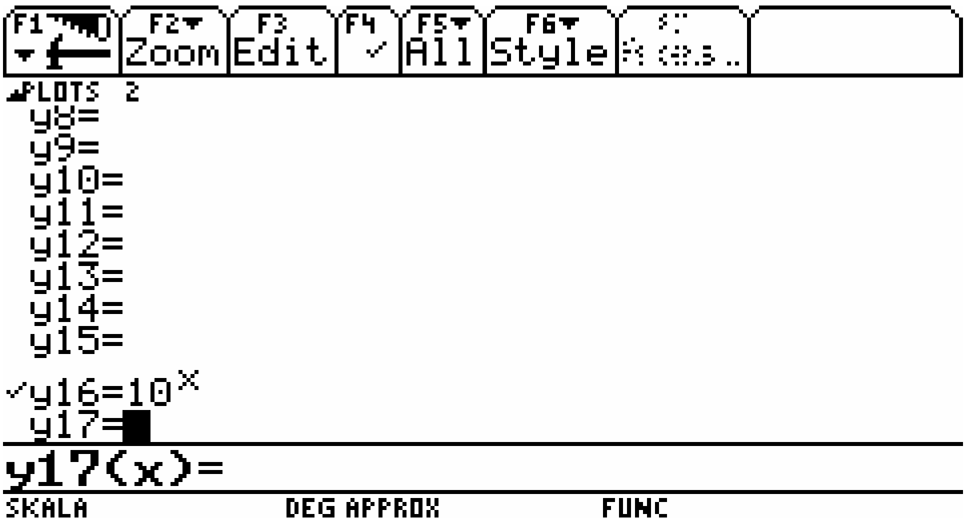

Wie sieht es aber mit Zahlen aus die keine Zehnerpotenzen sind?

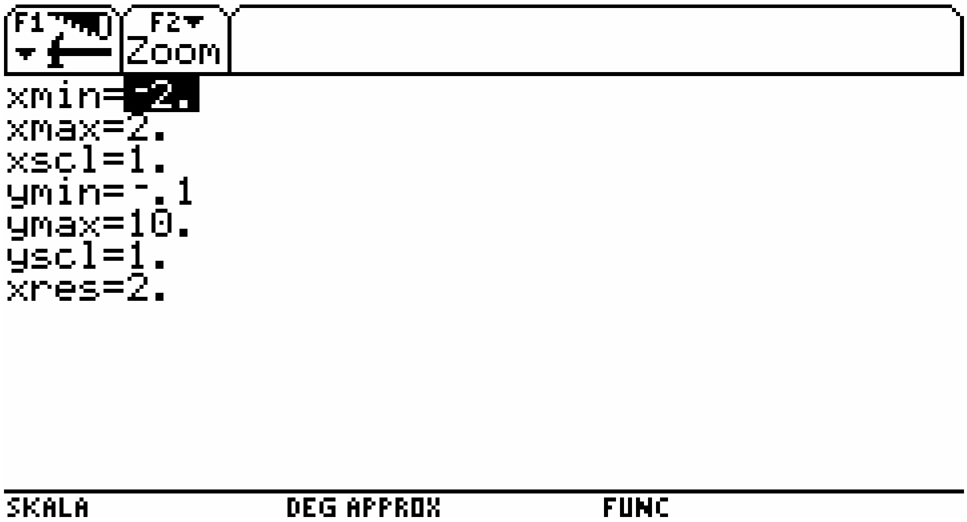
Kann man jede Zahl als Zehnerpotenz schreiben? Wie sehen die Exponenten dann aus?

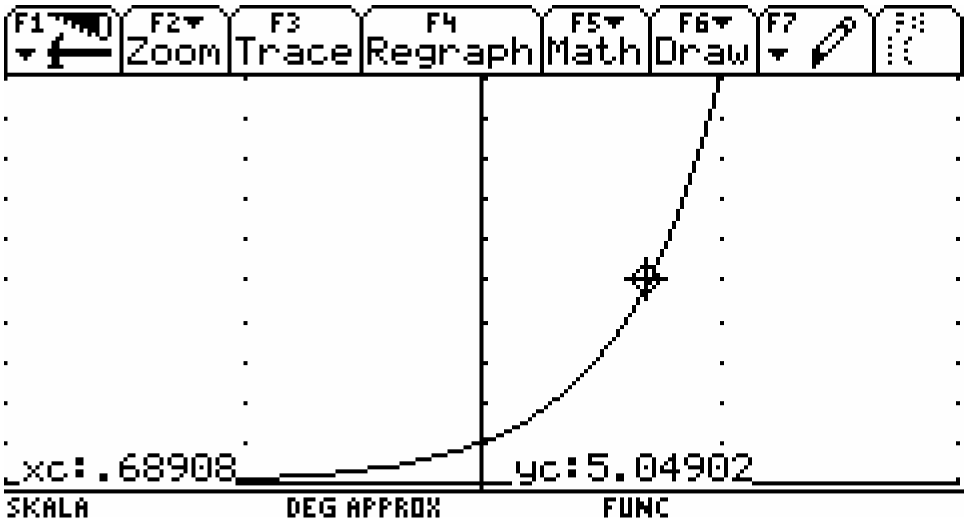
Für welche Zahl z gilt: $5 = 10^z$ ?

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten wie man vorgehen kann um z zu bestimmen:

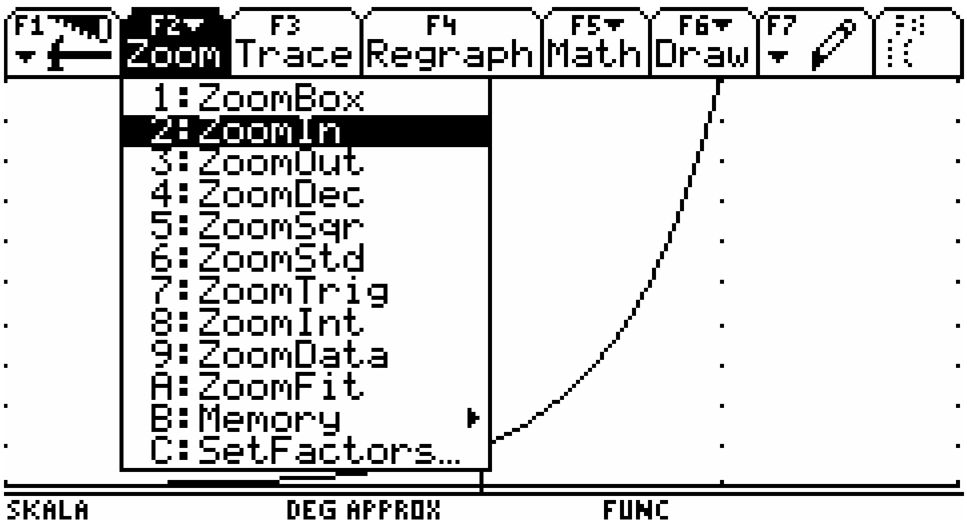
Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 10^x$:

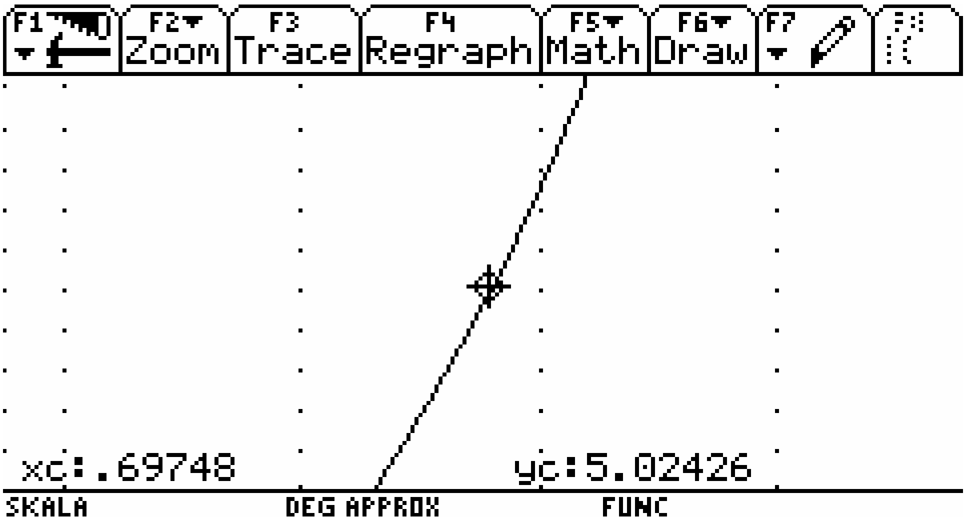




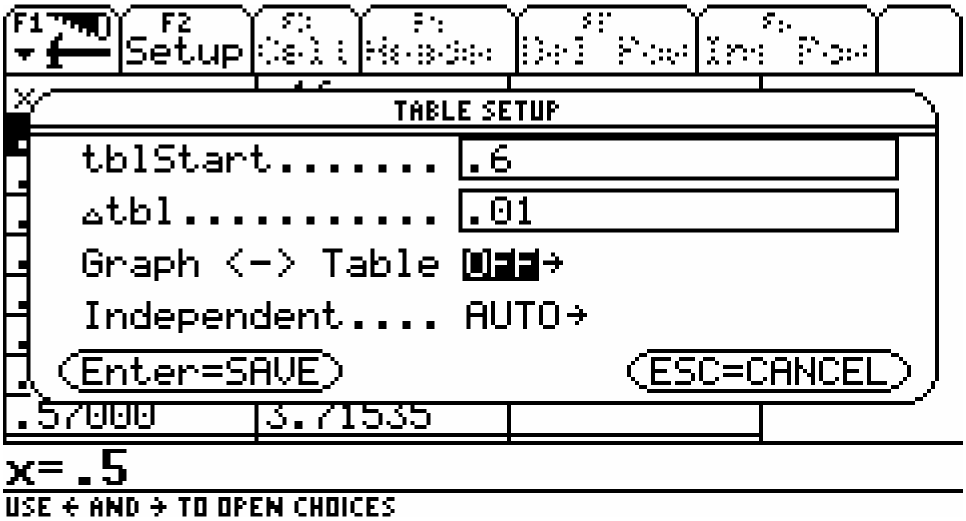



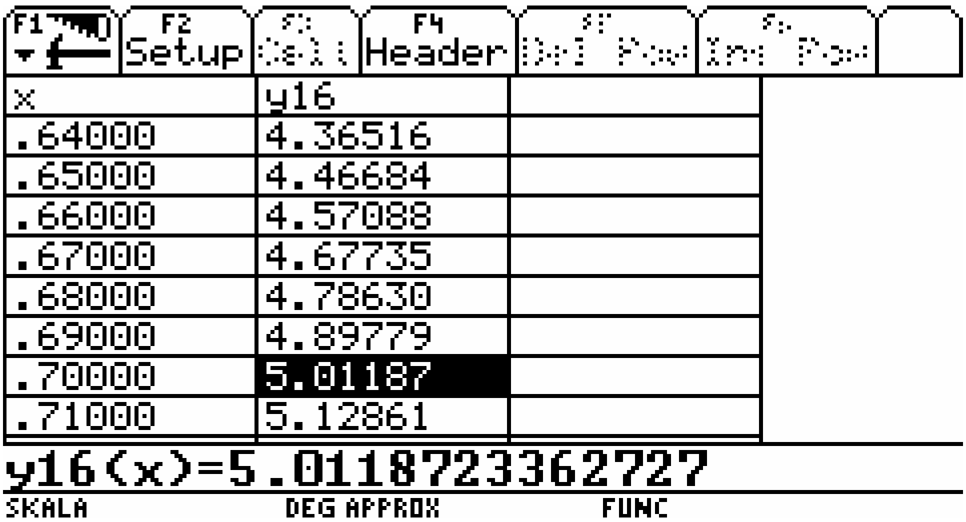

Wie man ablesen kann liegt der gesuchte Wert in der Nähe von 0,6.
Ein Zoom in den Graph führt zur Verbesserung des Wertes:

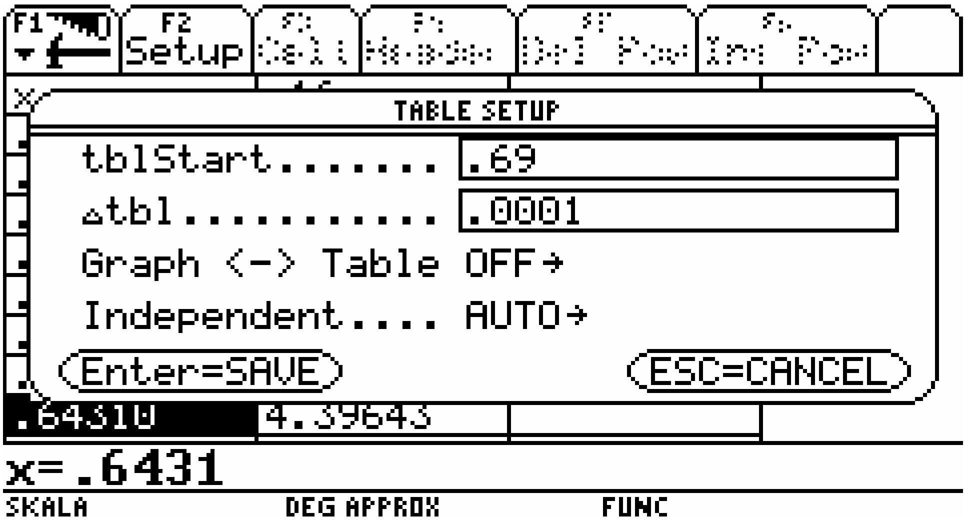


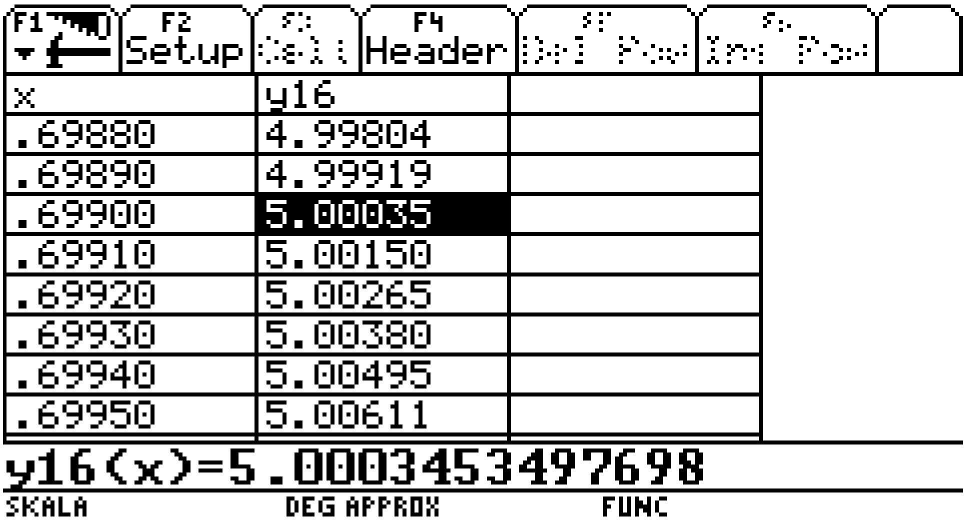



Weitere Möglichkeit: Suchen in der Wertetabelle:

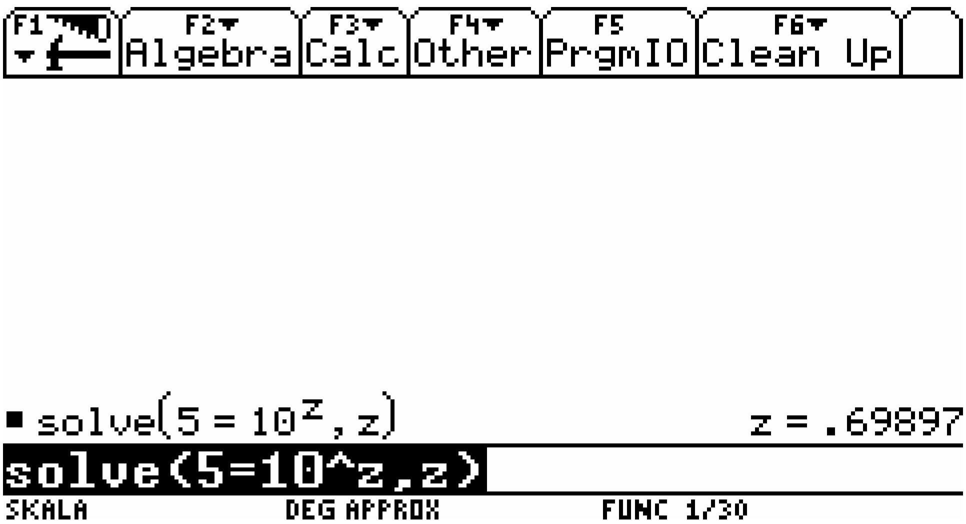




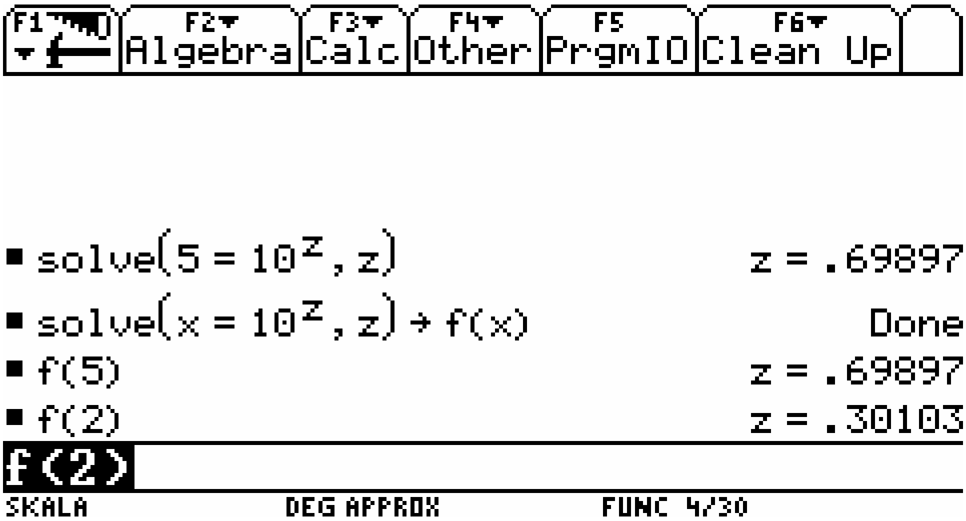




Weitere Möglichkeit: Einsatz von Computeralgebra:



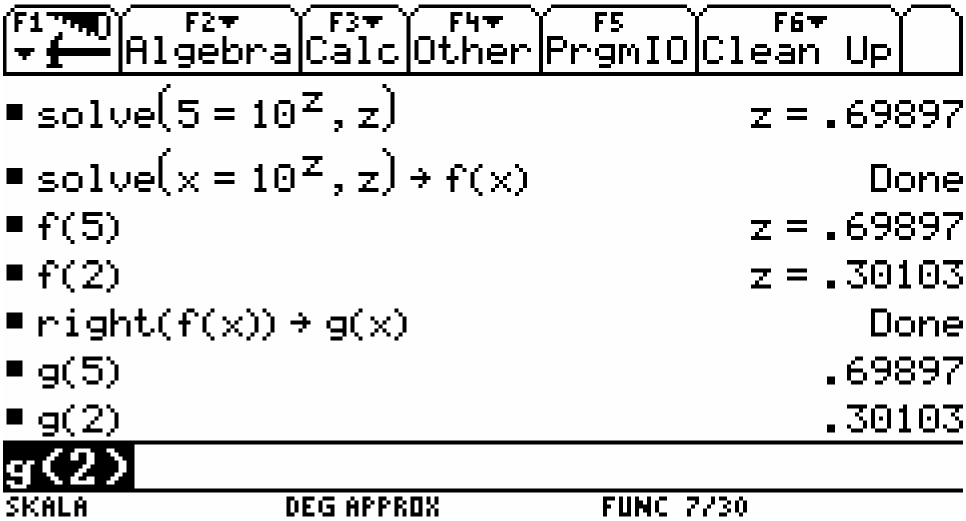
Verallgemeinerung dieses Verfahrens:

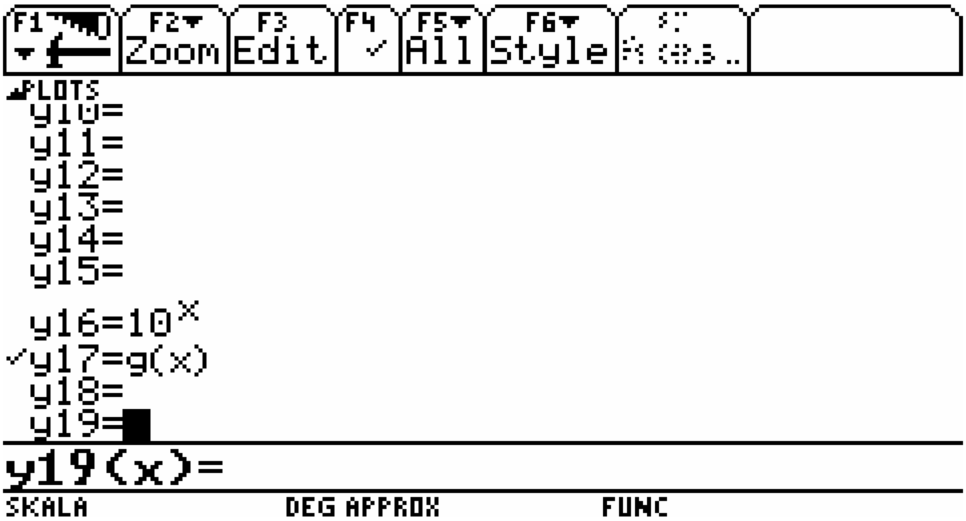
Wähle statt 5 nun eine beliebige Zahl x. Die sich ergebende Lösung wird als Wert einer Funktion f(x) interpretiert:



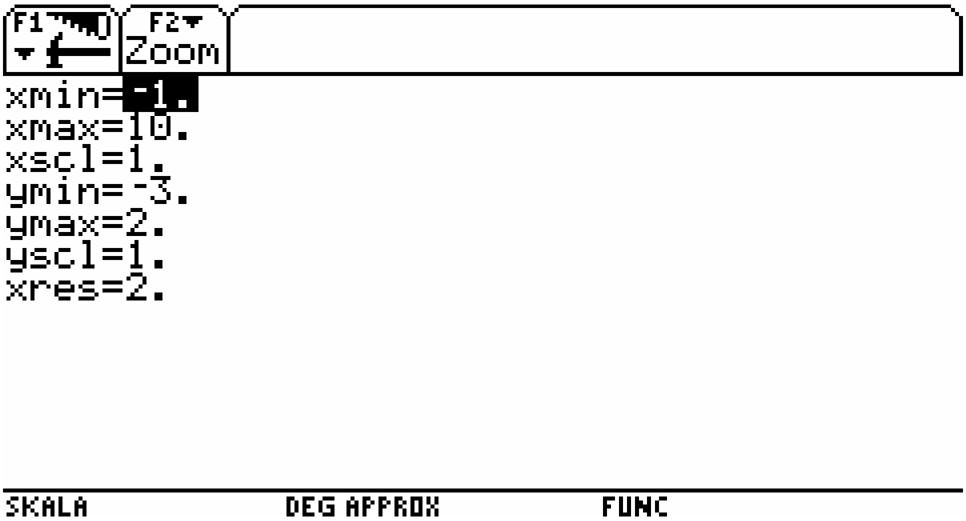

Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?

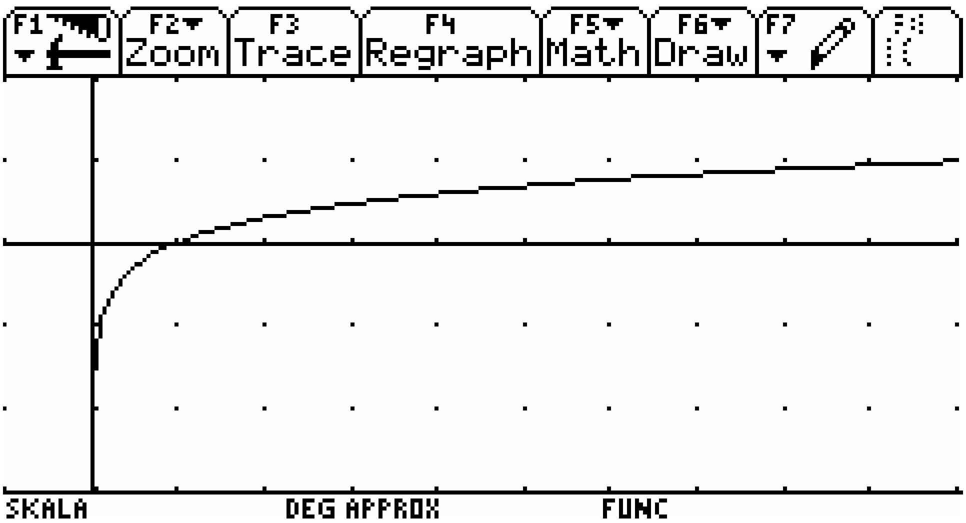
f(x) liefert als Wert eine Gleichung. Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Funktionswert:



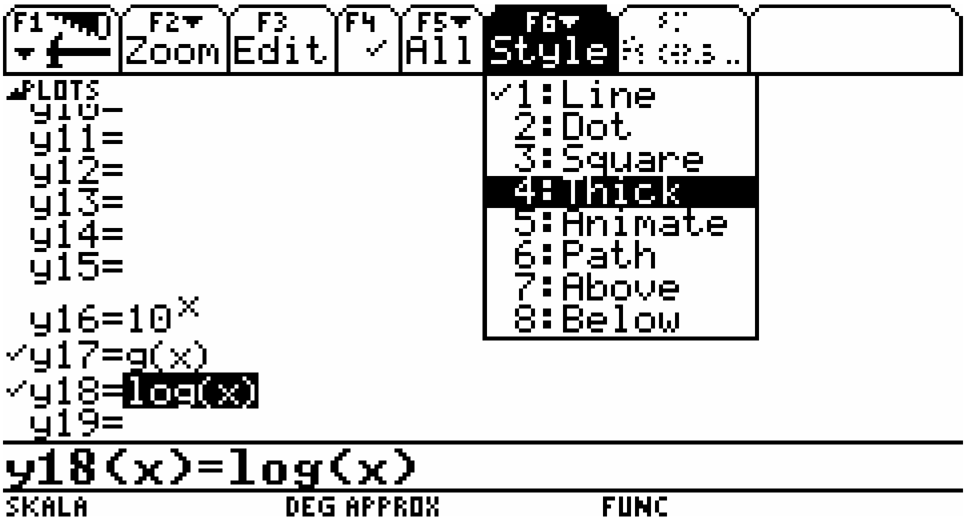



Einstellungen zum Zeichnen der Funktion:

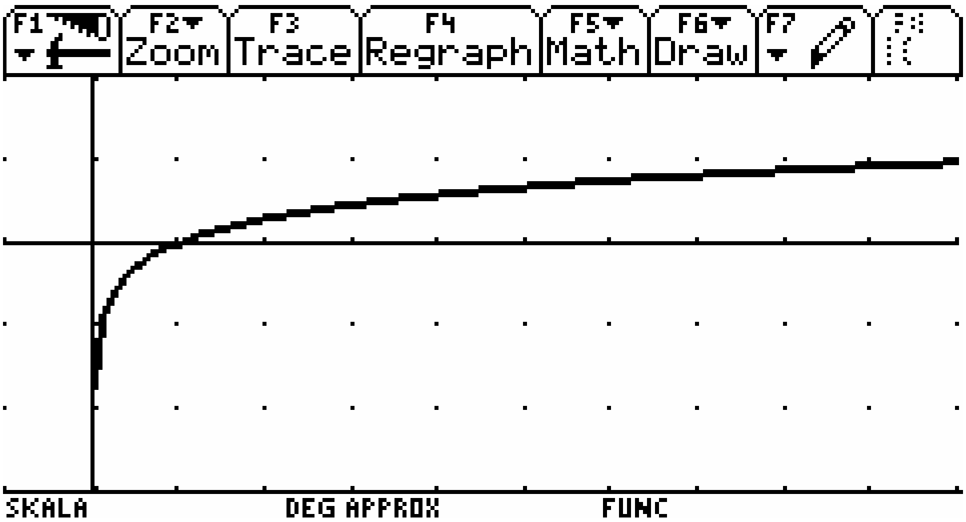


Die Funktion g(x) heißt Logarithmusfunktion zur Basis 10 und ist auf dem Rechner unter dem Namen log(x) vorhanden:

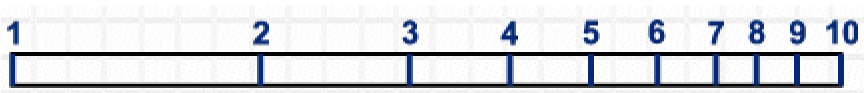



Demonstration durch das Zeichnen beider Graphen:



**Aufgabe**

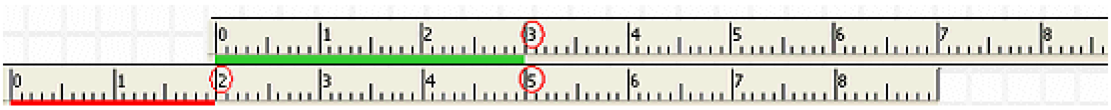
Stelle zwei logarithmische Skalen her, d.h. trage statt x den Wert log(x) auf, markiere diese Stelle aber mit x:



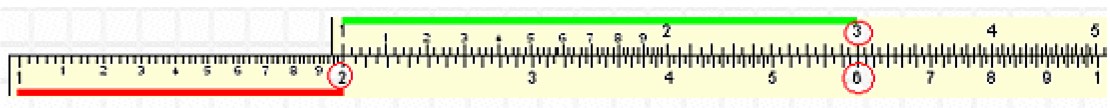

Experimentiere mit den beiden Skalen etwas. Was fällt auf?

Lösung:

Beim einer normalen Einteilung wird addiert:



Bei einer logarithmischen Einteilung wird multipliziert:



[Rechenschieber]

Vermutung:

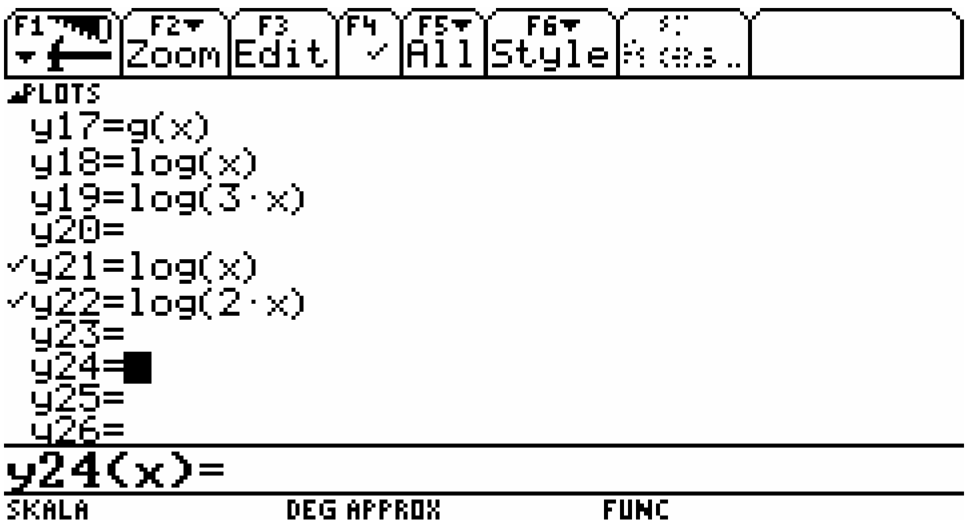
$$\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$$

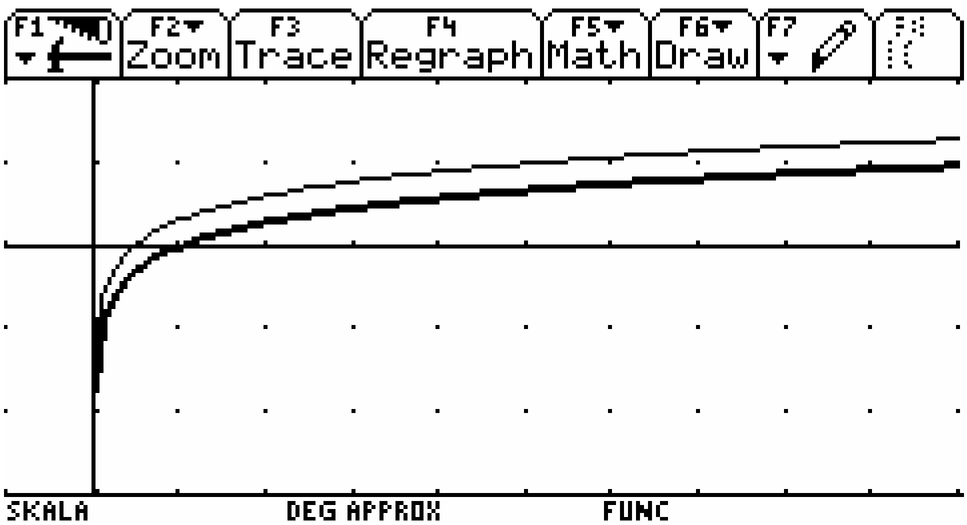
**Aufgabe**

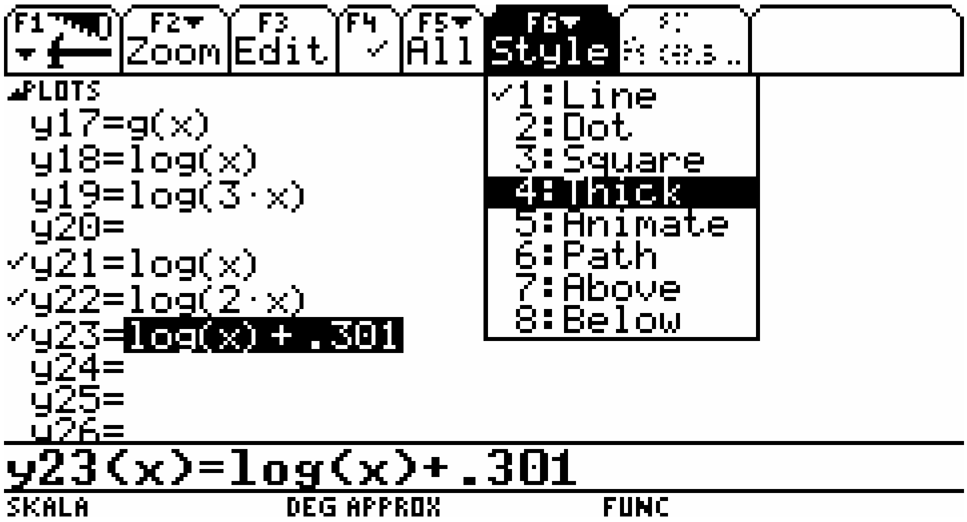
Für eine feste Zahl y, z.B. y=2 folgt aus $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ die Beziehung

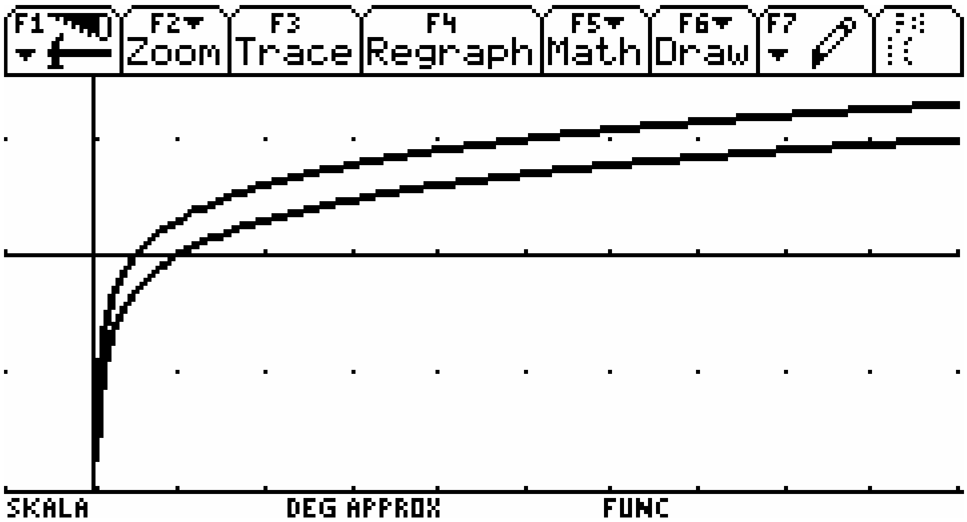
$\log(2 \cdot x) = \log(x) + \log(2) = \log(x) + 0{,}301$

d.h. die Graphen der Funktionen $\log(2 \cdot x)$ und log(x) gehen durch eine Verschiebung ineinander über.
Veranschauliche dies in einer Graphik.
Zeige an einem anderen Beispiel, dass diese Eigenschaft für andere Funktionen nicht gilt.

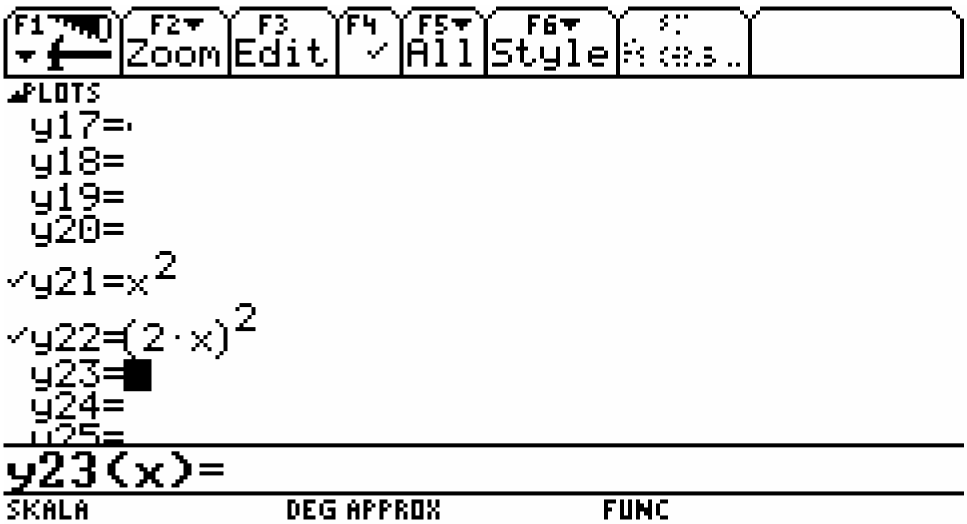


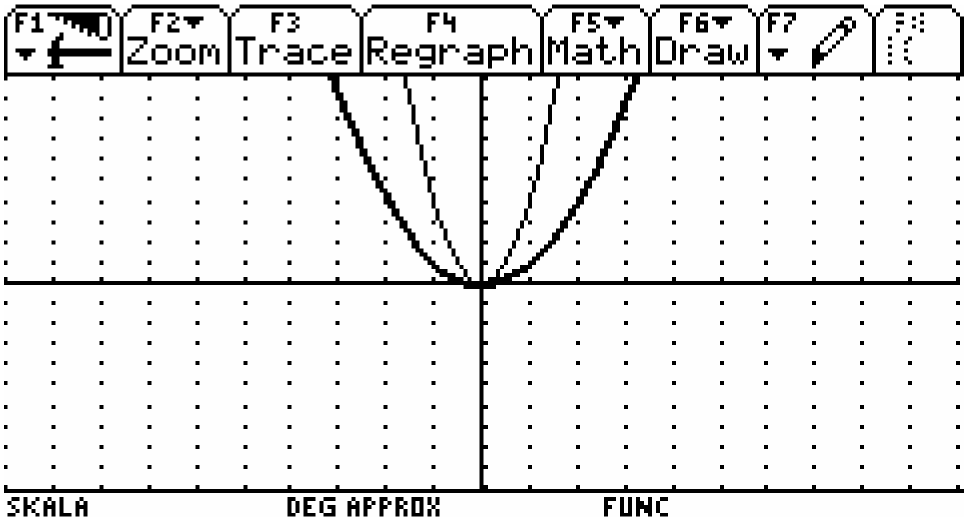






Gegenbeispiel






Beweis der Logarithmengesetze über die Potenzrechenregeln.

Mögliche Weiterführungen des Themas

[Die Reise zu den Liliputanern]

[3. Keplersches Gesetz]

[Champion]