

TIM Jahrestagung 20.6.06-21.6.06 Mainz

B.Grabinger:

**Die Rolle der Technologie bei der Einführung neuer Themen im
Mathematikunterricht der Klasse 10**

I. Trigonometrische Funktionen

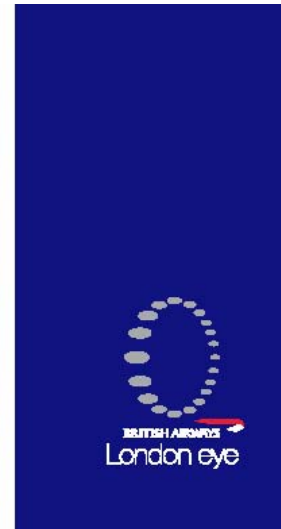


II. Logarithmusfunktionen



Trigonometrische Funktionen

Ein Flug mit dem London Eye



<http://www.ba-londoneye.com/>

A flight on the London Eye is an unrivalled experience. As you rise to an incredible 135 metres above the River Thames, the 30 minute rotation provides stunning panoramic views of the city and reveals parts of London which are simply not visible from the ground. For a truly stunning view, visit at sunset or after dark and see the city awash with colour and famous landmarks floodlit. Each capsule is fully enclosed, air-conditioned and holds up to 25 passengers with bench seating provided.

Price including 10% online discount

Adult £11.70, Child (5-15) £5.85, Under 5 FREE, Senior (60+)*£9.00

*Senior discount not valid weekends or during July / August.

Spoil your loved one with a romantic champagne flight for two in the luxury of your own private capsule complete with a bottle of Laurent-Perrier champagne served by your host. The package also includes exclusive check-in and fast track entrance; the couple are given a mini guide and box of luxury chocolates for their flight. An all-inclusive price for a maximum of 2 guests aged 18+ years. In addition up to two children aged under five are permitted in the capsule.

Price includes 10% discount
£269.10



1. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit bewegt sich das Riesenrad?

Lösung:

Verschiedene Antworten sind möglich:

1. Bahngeschwindigkeit $v = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2 \cdot \frac{135\text{m}}{2} \cdot \pi}{30\text{min}} \approx 14,14 \frac{\text{m}}{\text{min}}$

2. Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{360^\circ}{30\text{min}} = \frac{12^\circ}{\text{min}}$

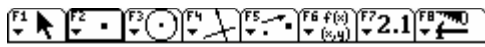
2. **Baue ein Riesenrad mit einem DGS-Programm nach**
Der Radius des Kreises soll 1 sein.



[Animation](#) des Riesenrades (roten Punkt mit der Maus greifen und bewegen).

Lösung mit dem voyage 200:

Einen Punkt in die Zeichenebene setzen

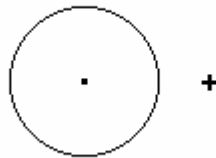


MAIN DEG AUTO FUNC

Einen Kreis um diesen Punkt aufziehen



- 1:Circle
- 2:Arc
- 3:Triangle
- 4:Polygon
- 5:Regular Polygon



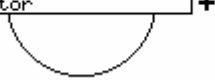
TYPE OR USE ←→+ [ENTER]=OK AND [ESC]=CANCEL

MAIN DEG AUTO FUNC

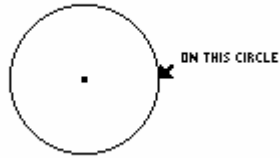
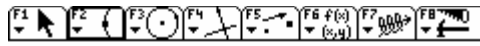
Einen Punkt an den Kreisumfang binden:



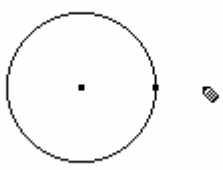
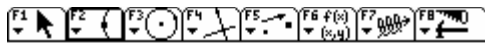
- 1:Point
- 2:Point on Object
- 3:Intersection Point
- 4:Line
- 5:Segment
- 6:Ray
- 7:Vector



MAIN DEG AUTO FUNC

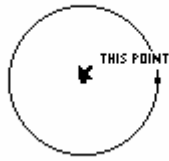
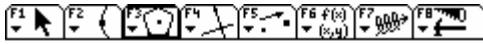


MAIN DEG AUTO FUNC

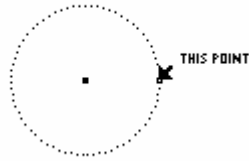


MAIN DEG AUTO FUNC

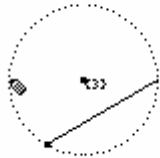
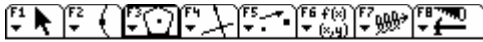
Ein reguläres Polygon um den Kreismittelpunkt zeichnen:



MAIN DEG AUTO FUNC



MAIN DEG AUTO FUNC



MAIN DEG AUTO FUNC



MAIN DEG AUTO FUNC

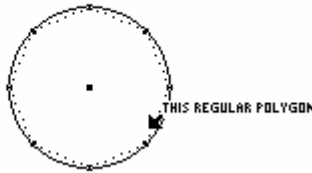
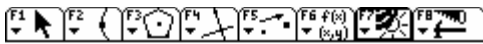
Das Polygon verstecken:



MAIN DEG AUTO FUNC

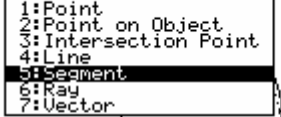
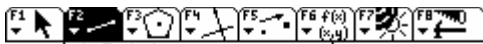


MAIN DEG AUTO FUNC

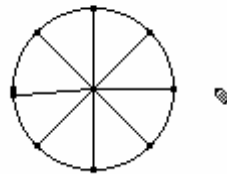


MAIN DEG AUTO FUNC

Strecken zwischen Mittelpunkt und Ecken zeichnen:

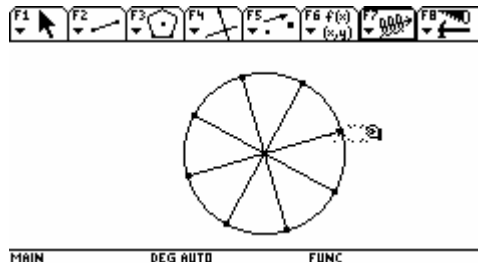
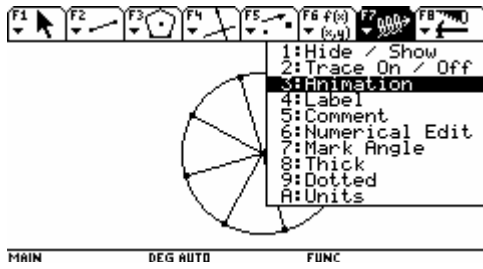


MAIN DEG AUTO FUNC



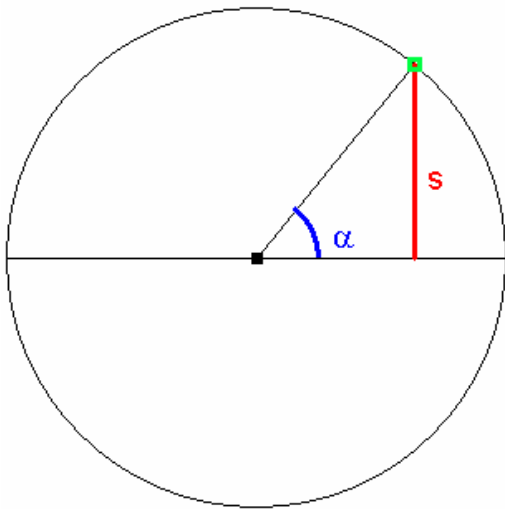
MAIN DEG AUTO FUNC

Den zu Beginn an den Kreis gebundenen Punkt animieren:



Das „Riesenrad“ dreht sich.

3. In welcher Höhe s befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die betrachtete Gondel?

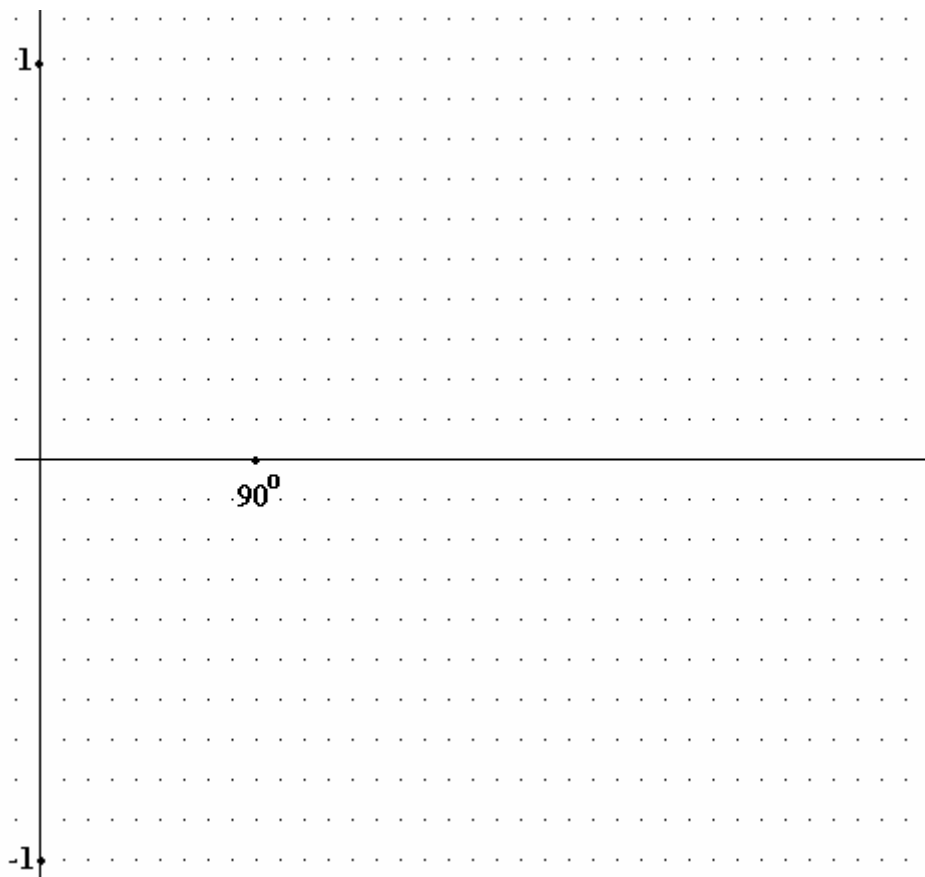


Um diese Frage zu beantworten wird die Zuordnung

Drehwinkel $\alpha \rightarrow$ Höhe s

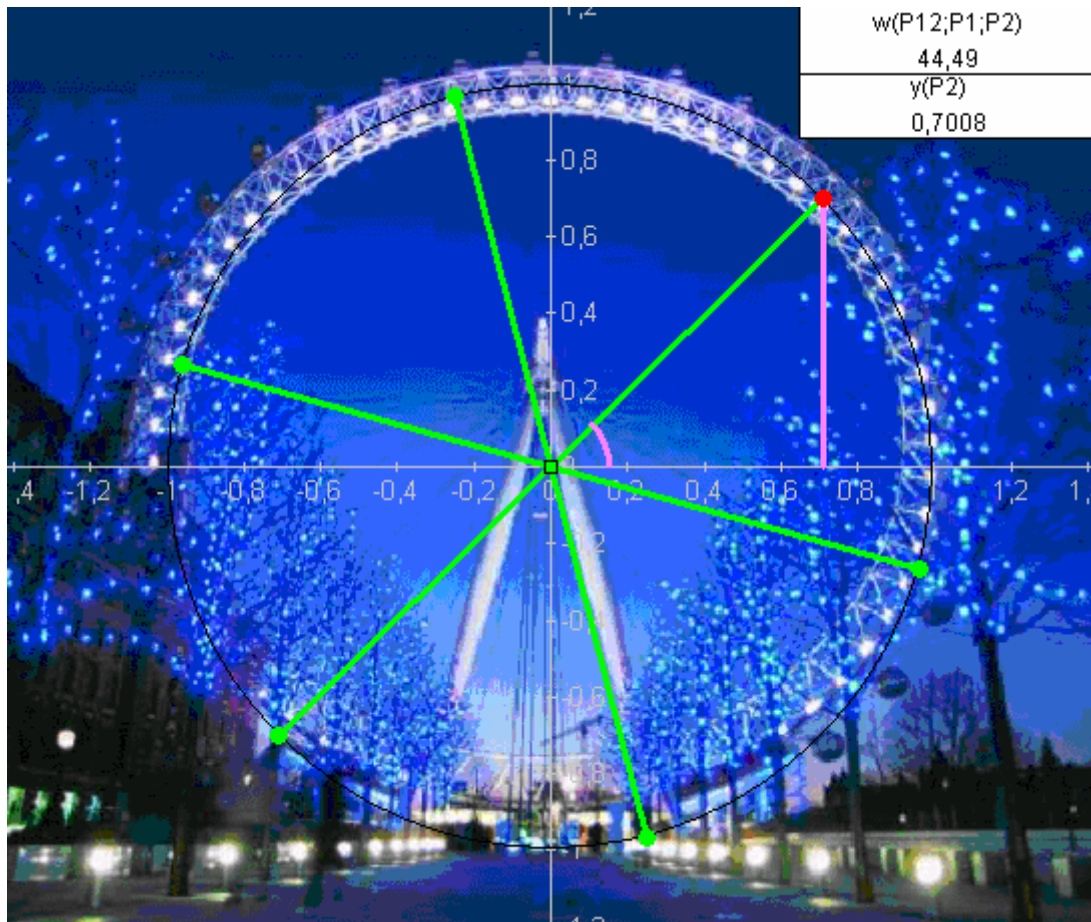
betrachtet.

Versuche den Graph dieser Zuordnung zu skizzieren:



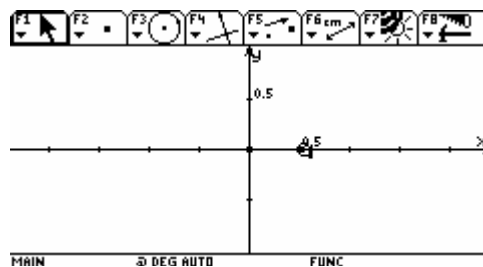
Genauer erhält man den Graphen der betrachteten Zuordnung, indem man zu jedem Winkel α die Höhe s des Punkte über der x -Achse mißt, die Werte in einer Tabelle sammelt und diese dann graphisch darstellt.

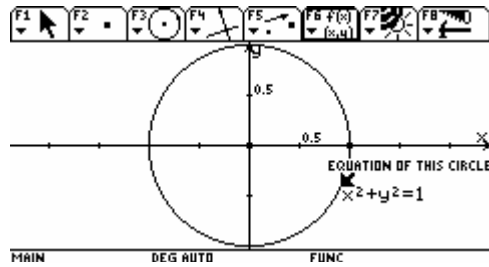
[Animation:](#)



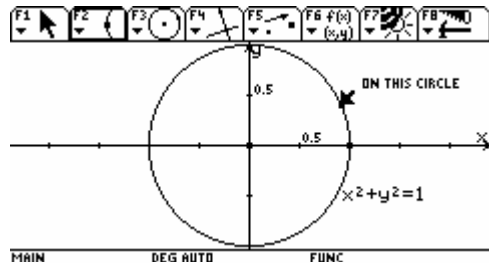
Durchführung mit dem TI-Voyage

In der Applikation „Cabri“ einen Kreis aufziehen und dessen Gleichung anzeigen lassen.

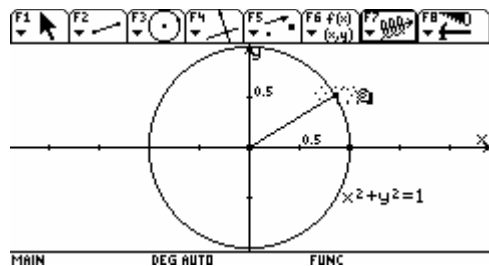
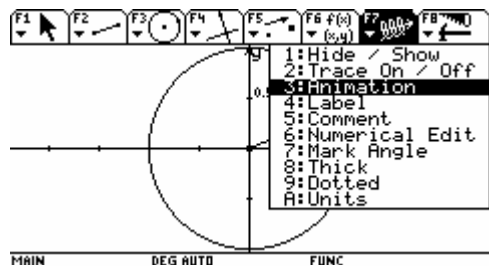




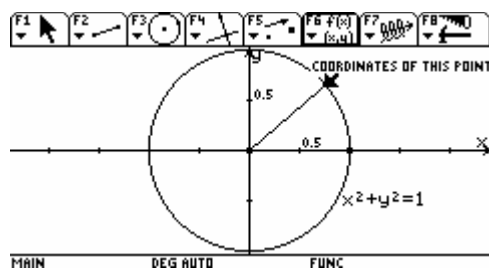
Einen Punkt an den Kreis binden:



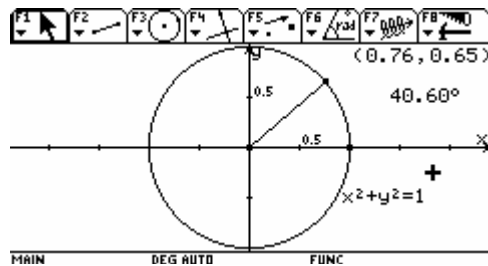
Strecke „Punkt-Mittelpunkt“ einzeichnen und dann den Punkt animieren.



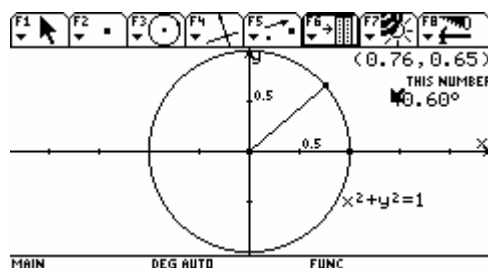
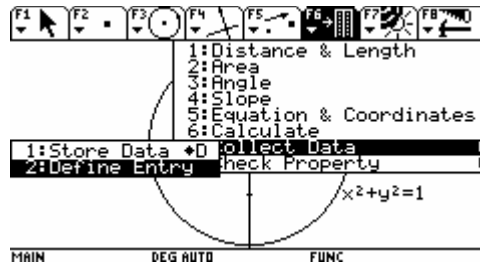
Die Koordinaten des Punktes anzeigen lassen:



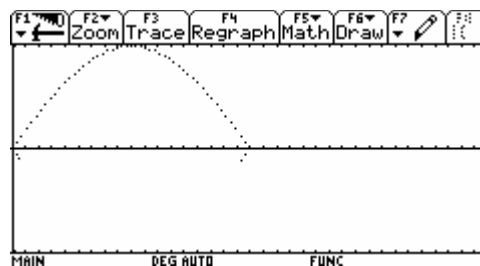
Den Winkel messen lassen:



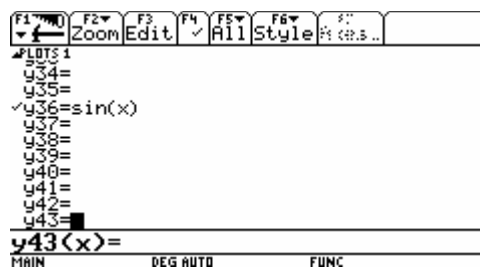
Die gemessenen Werte sammeln lassen und in den Data-Matrix-Editor übertragen:



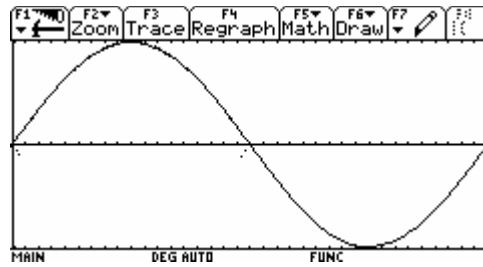
Die gemessenen Werte aus dem Data-Matrix-Editor heraus graphisch darstellen (α zwischen 0 und 90 Grad !)



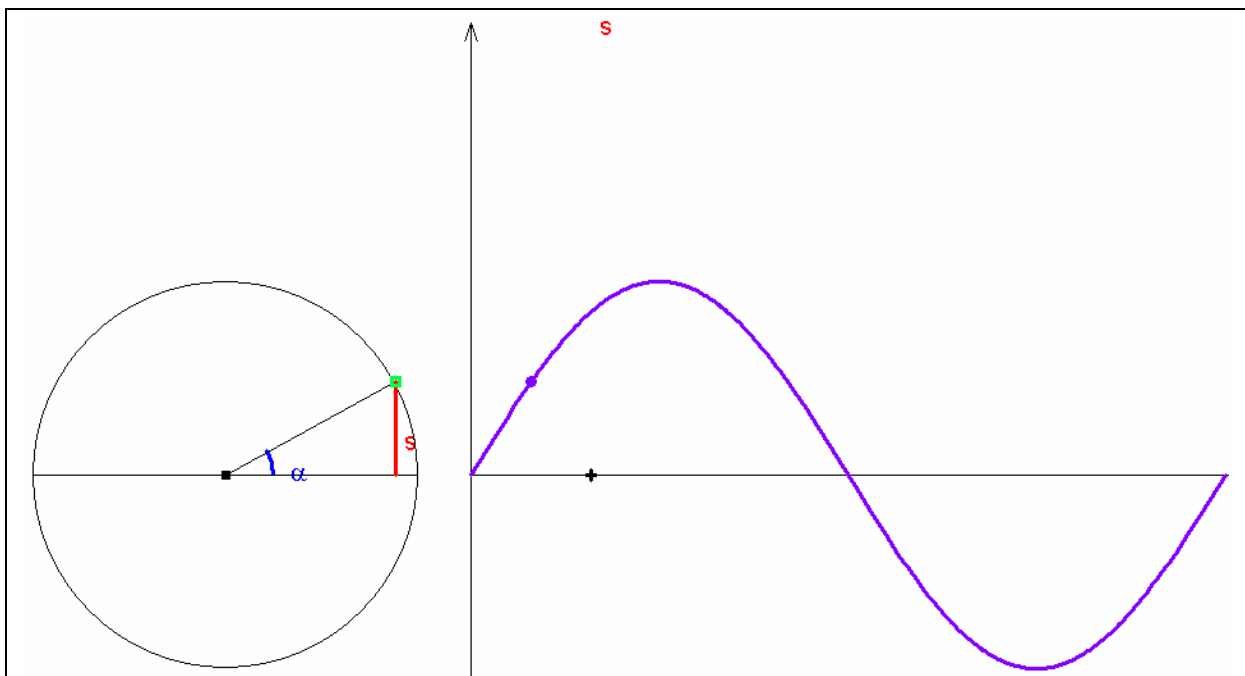
Die Funktion, welche diese Zuordnung beschreibt heißt $\sin(\alpha)$ und ist auf dem Rechner implementiert (Rechner ins Gradmaß stellen):



Die Funktion $\sin(x)$ angeben als y-Koordinate des Punktes auf dem Einheitskreis, wobei x im Gradmaß eingesetzt wird.



[Demonstration](#) des Zusammenhangs zwischen α und s :



Weiterführungen des Themas:

Modellierung des London Eyes

Die Funktion $f(t)$ soll die Höhe der Gondel über dem Boden zur Zeit t angeben.

Umlaufdauer: $T = 30 \text{ min.}$

Radius: $r = \frac{135}{2} \text{ m} = 67,5 \text{ m}$

Es ist $f(t) = r + r \sin(g(t))$, wobei $g(t)$ eine lineare Funktion in t mit folgenden Eigenschaften ist:

$g(0) = 0$ (Startwinkel 0 zur Zeit 0)

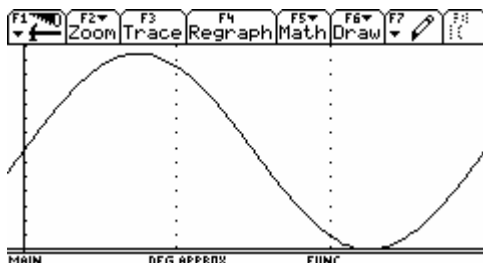
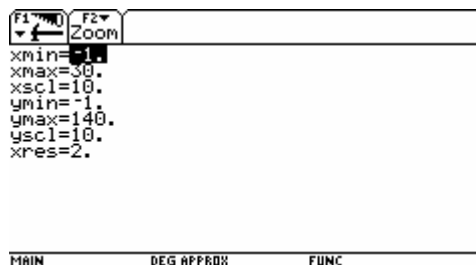
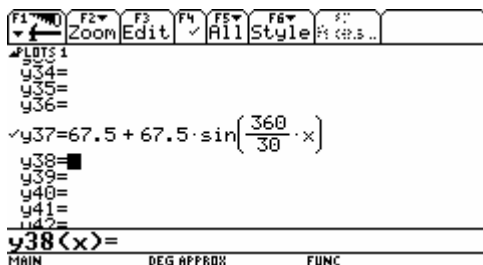
$g(30 \text{ min}) = 360^\circ$ (Eine Umdrehung in 30 min)

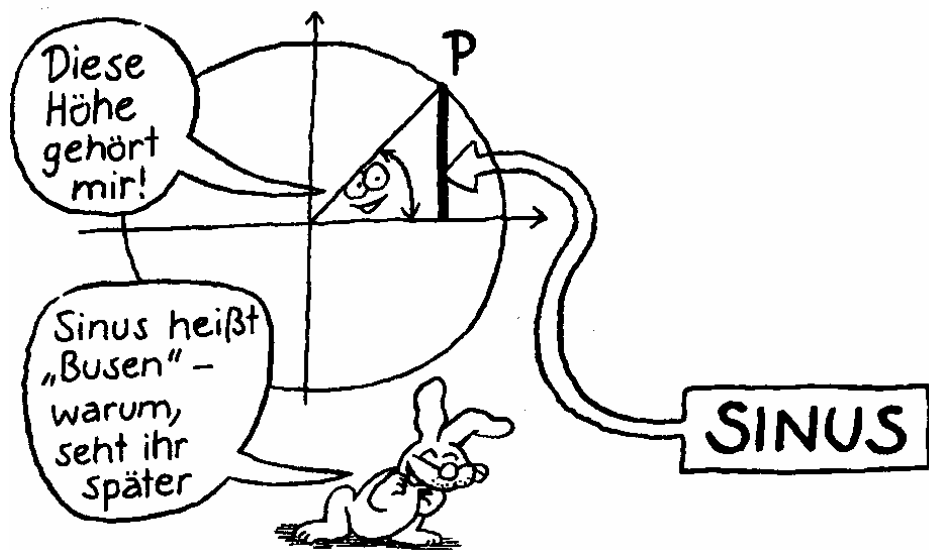
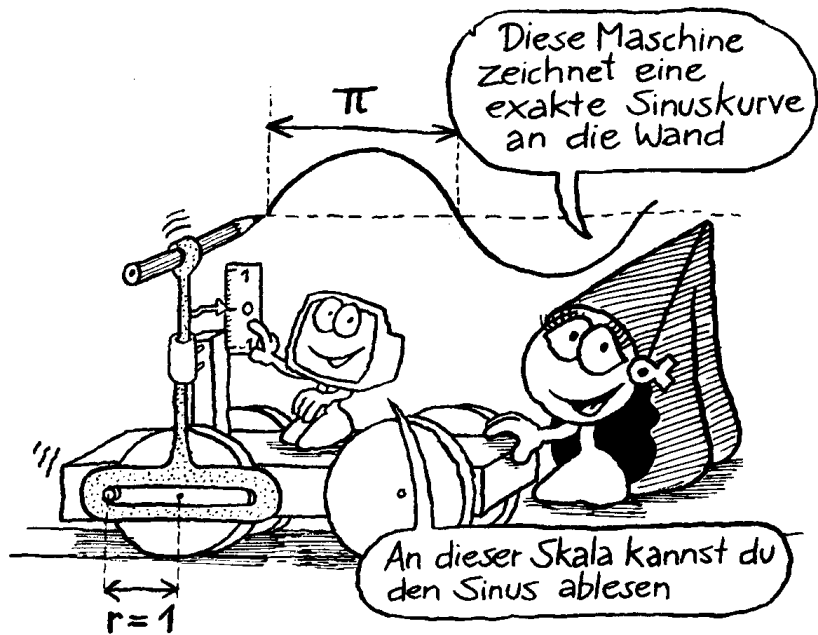
$g(t) = a \cdot t$

$360^\circ = a \cdot 30 \text{ min}$

$a = \frac{360^\circ}{30 \text{ min}}$

$f(t) = 67,5 + 67,5 \cdot \sin\left(\frac{360^\circ}{30 \text{ min}} \cdot t\right)$





Entsprechend für die x-Koordinate, d.h. $\cos(x)$

Nahe liegend ist auch:

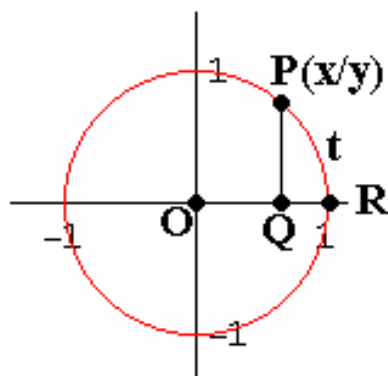
Parameterdarstellung des Kreises anschließen.

(Ab hier wird der Winkel im Bogenmaß genommen!)

Rennwagen auf dem Rundkurs



Autos fahren auf einem Rundkurs:



Der Punkt P auf dem Einheitskreis hat die Koordinaten x und y. Diese hängen ab von der Länge t des Bogens von R nach P.

Üblicherweise nennt man die x-Koordinate von P den **Cosinus von t**, die y-Koordinate den **Sinus von t**.

In der Zeichnung gilt also: $\overline{OQ} = x = \cos(t)$ und $\overline{PQ} = y = \sin(t)$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Zoom	Edit	✓	All	Style	F7 (Help)

PLOTS
 yt3=
 xt4=
 yt4=
 xt5=
 yt5=
 ✓xt6=cos(t)
 ✓yt6=sin(t)
 xt7=
 yt7=

1: Line
2: Dot
3: Square
4: Thick
5: Animate
6: Path
7:
8:

yt6(t)=sin(t)

KLASSEB RAD AUTO PAR

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
	Zoom	Trace	Regraph	Math	Draw		

KLASSEB RAD AUTO PAR BUSY

Aufgabe

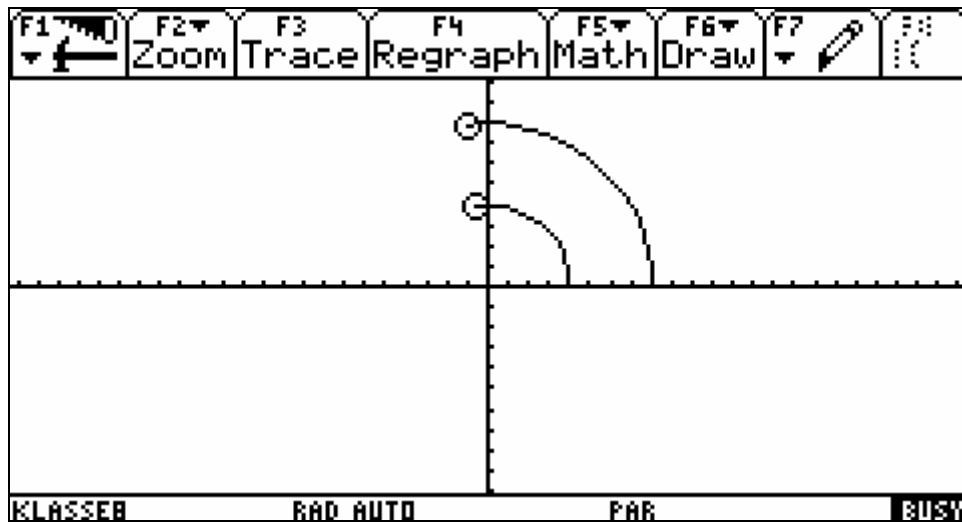
Baue ein Auto das genau doppelt so schnell auf dem Rundkurs fährt wie das eben betrachtete Auto.

```
F1 [F1] F2 [F2] F3 [F3] F4 [F4] F5 [F5] F6 [F6] [F7] [F8]
[Left Arrow] Zoom Edit ✓ All Style [F9] [F10]
PLOTS
xt4=
yt4=
xt5=
yt5=
✓xt6=cos(t)
✓yt6=sin(t)
✓xt7=cos(2·t)
✓yt7=sin(2·t)
xt8=
-----
xt8(t)=
-----
KLASSEN          RAD AUTO          PAR
```

Aufgabe

Baue ein Auto das auf einem Rundkurs mit dem Radius 2 fährt.

```
F1 [Home] F2 [Zoom] F3 [Edit] F4 [✓] F5 [All] F6 [Style] F7 [↻]
PLOTS
xt5=
yt5=
✓xt6=cos(t)
✓yt6=sin(t)
xt7=cos(2·t)
yt7=sin(2·t)
✓xt8=2*cos(t)
✓yt8=2·sin(t)
xt9=
xt8(t)=2*cos(t)
KLASSEB RAD AUTO PAR
```

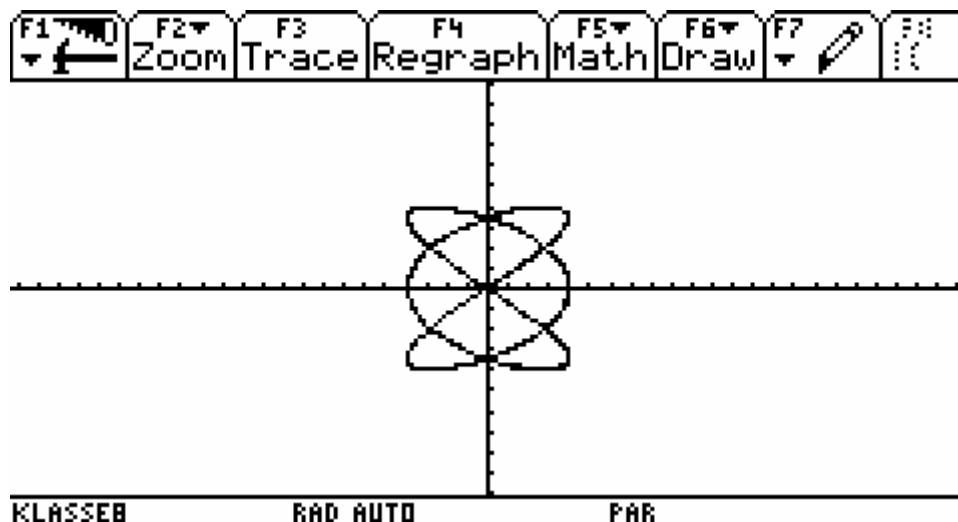


Aufgabe

In der Eingabe von x_{t9} und y_{t9} scheint etwas durcheinander geraten zu sein:

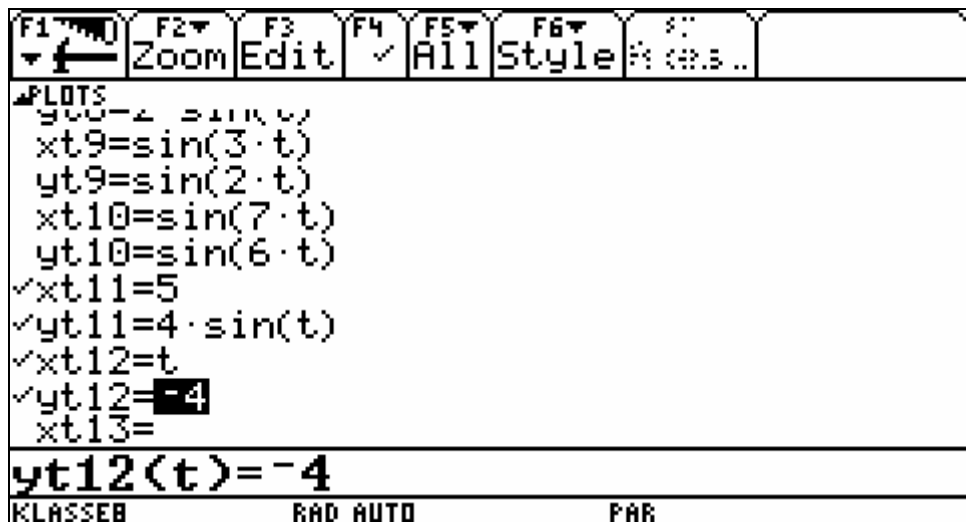
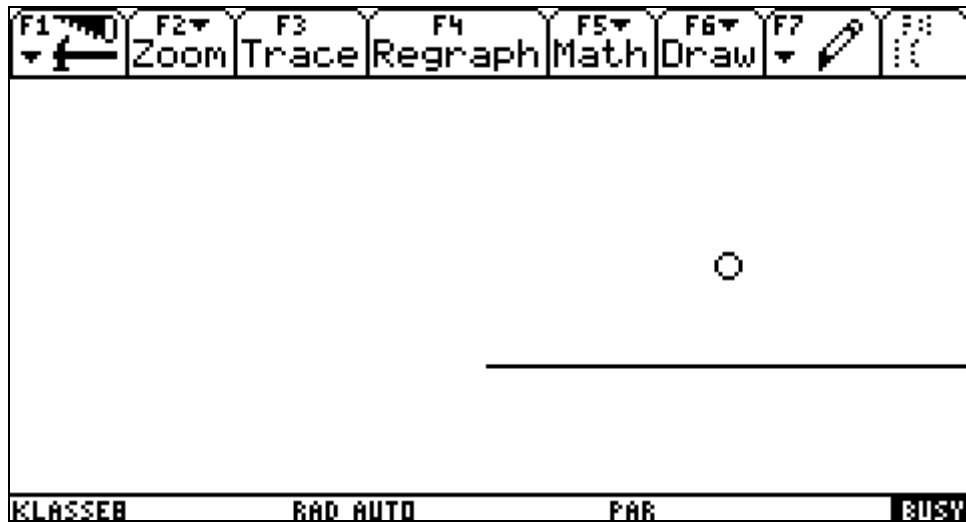
```
F1 [ ] F2 [ ] F3 [ ] F4 [ ] F5 [ ] F6 [ ] [ ] [ ]
Zoom Edit [ ] All Style [ ]
PLOTS
xt6=cos(t)
yt6=sin(t)
xt7=cos(2*t)
yt7=sin(2*t)
xt8=2*cos(t)
yt8=2*sin(t)
✓xt9=sin(3*t)
✓yt9=sin(2*t)
xt10=
-----
xt9(t)=sin(3*t)
-----
KLASSEB          RAD AUTO          PAR
```

Wie äußert sich dieses „Versehen“ im Aussehen der Bahnkurve?
Experimentiere selbst weiter.



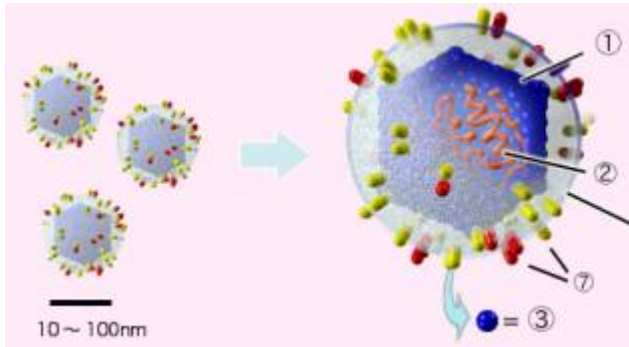
Aufgabe

Baue einen „Ball“ der beliebig lange parallel zur y-Achse springt.



Logarithmusfunktionen

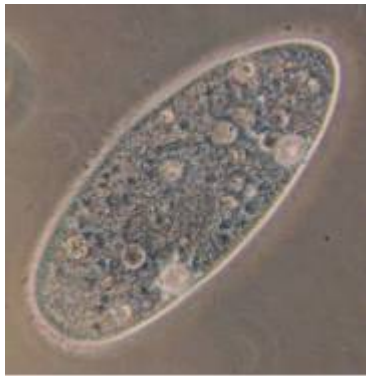
Stelle die Größe der „Lebewesen“ auf einer Skala dar.



Virus 10 nm



Bakterien 10 Mikrometer



Pantoffeltierchen 0,1 mm



Floh 1mm



Käfer 1cm



Maus 10 cm



Rotfuchs 1m



Großer Schwertwal 10 m

ohne Abbildung: Großes Pilzgeflecht 1 km

(Quelle Wikipedia)

Eingabe der Punktepaare zur Darstellung auf der x-Achse (y-Wert ist 0)

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	1.0E-8	0.0000					
2	.00001	0.0000					
3	.00010	0.0000					
4	.00100	0.0000					
5	.01000	0.0000					
6	.10000	0.0000					
7	1.0000	0.0000					

c3=

SKALA DEG APPROX FUNC

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA							
	c1	c2	c3	c4	c5		
4	.00100	0.0000					
5	.01000	0.0000					
6	.10000	0.0000					
7	1.0000	0.0000					
8	10.000	0.0000					
9	1000.0	0.0000					
10							

r10c3=

SKALA DEG APPROX FUNC

skalastiere Plot 1

Plot Type..... Scatter →

Mark..... Box →

x..... c1

y..... c2

Plot. Overlay Width: 1

Use Freq and Categories? NO →

Freq.....

Category.....

(include Categories) C

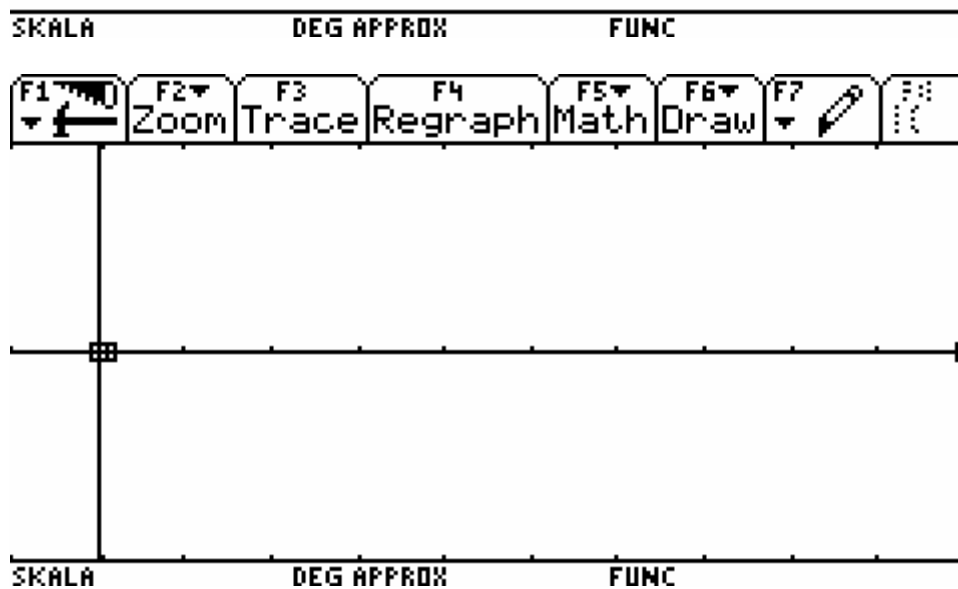
(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)

SKALA DEG APPROX FUNC

```

F1 [Zoom] F2 [Zoom]
xmin=-100.
xmax=1000.
xsc1=100.
ymin=-1.
ymax=1.
ysc1=1.
xres=2.

```



Lösung:
 Es ist nicht möglich sämtliche Größen auf einer linearen Skala gleichzeitig darzustellen.

Hinweis:
 Schreibe alle Größen in der Einheit Meter. Verwende die Zehnerpotenzdarstellung.

Ausweg: Es bietet sich an den Exponent der Zehnerpotenz aufzutragen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA						
	c1	c2	c3	c4	c5	
1	1.0E-8	0.0000	-8.000			
2	.00001	0.0000	-5.000			
3	.00010	0.0000	-4.000			
4	.00100	0.0000	-3.000			
5	.01000	0.0000	-2.000			
6	.10000	0.0000	-1.000			
7	1.0000	0.0000	0.0000			

r1c3=-8.

SKALA DEG APPROX FUNC

skalastiere Plot 2

Plot Type..... Scatter→

Mark..... Box→

X..... c3

Y..... c2

Min. Gabel. Width: 1

Use Freq and Categories? NO→

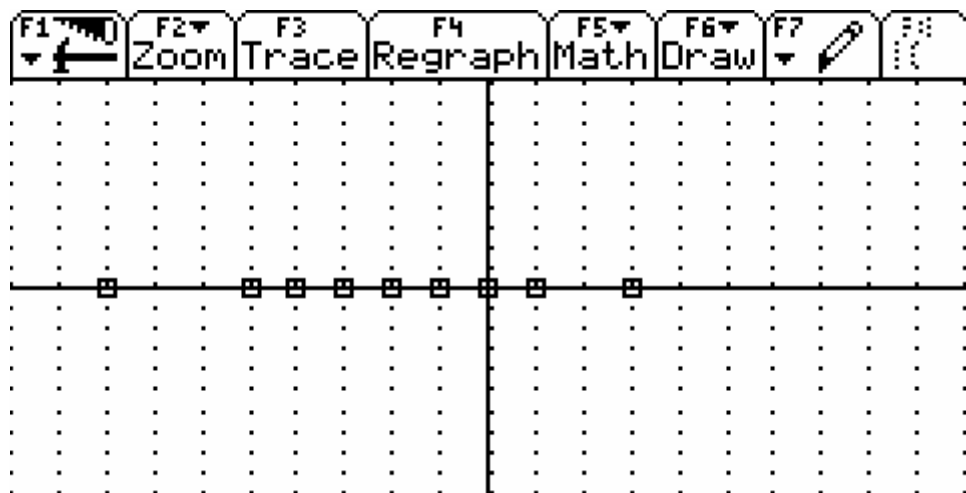
Freq.....

Category.....

(no) use Category.....

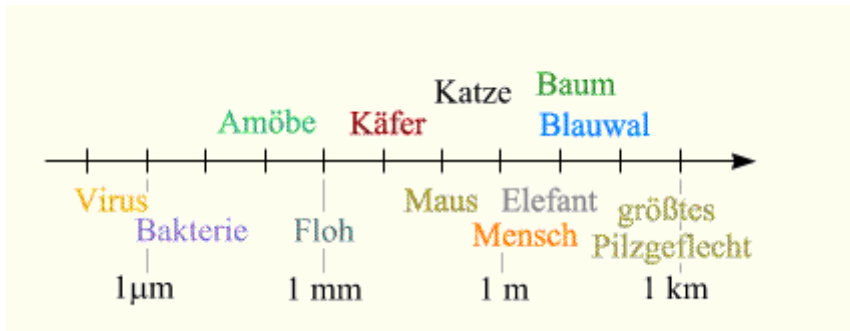
(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)

SKALA DEG APPROX FUNC



SKALA DEG APPROX FUNC

Damit können alle Zahlen dargestellt werden.



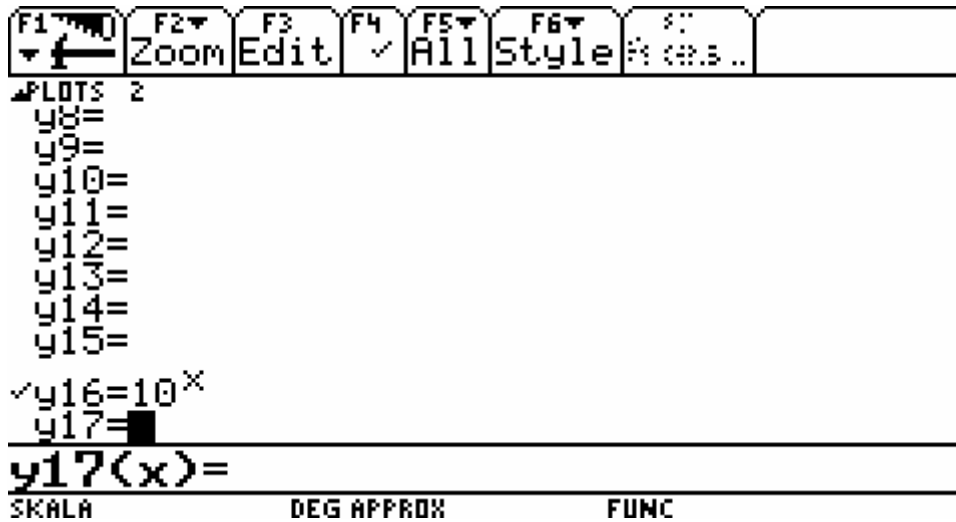
Wie sieht es aber mit Zahlen aus die keine Zehnerpotenzen sind?

Kann man jede Zahl als Zehnerpotenz schreiben? Wie sehen die Exponenten dann aus?

Für welche Zahl z gilt: $5 = 10^z$?

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten wie man vorgehen kann um z zu bestimmen:

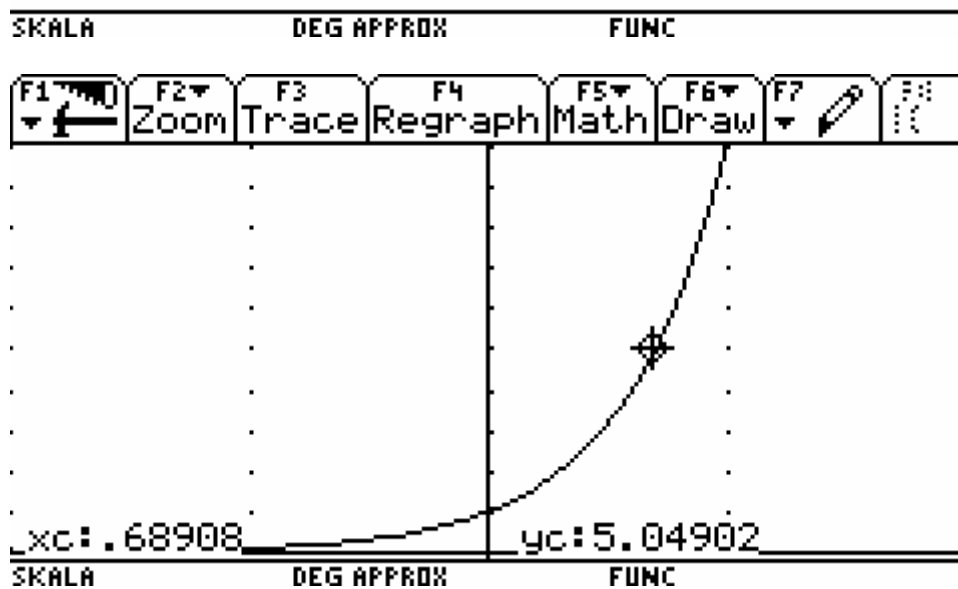
Graphische Darstellung der Funktion $f(x) = 10^x$:



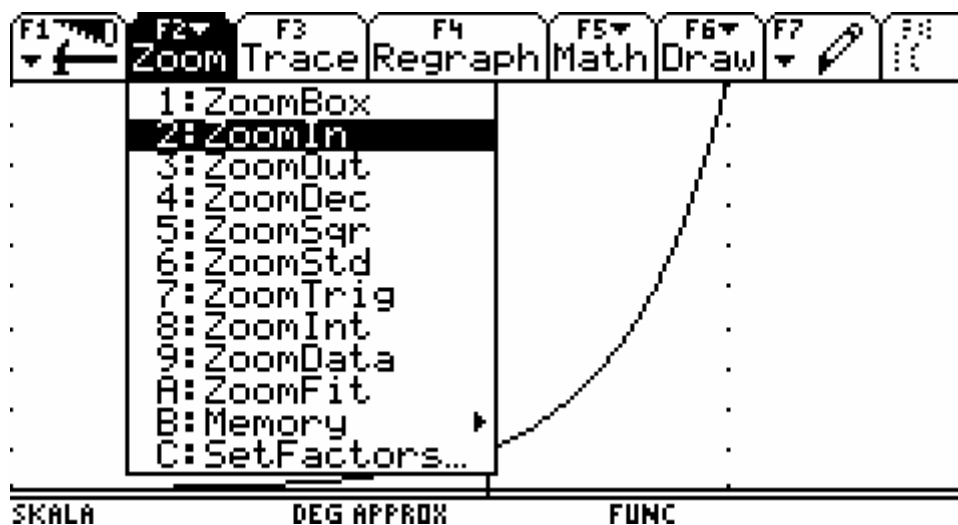
```

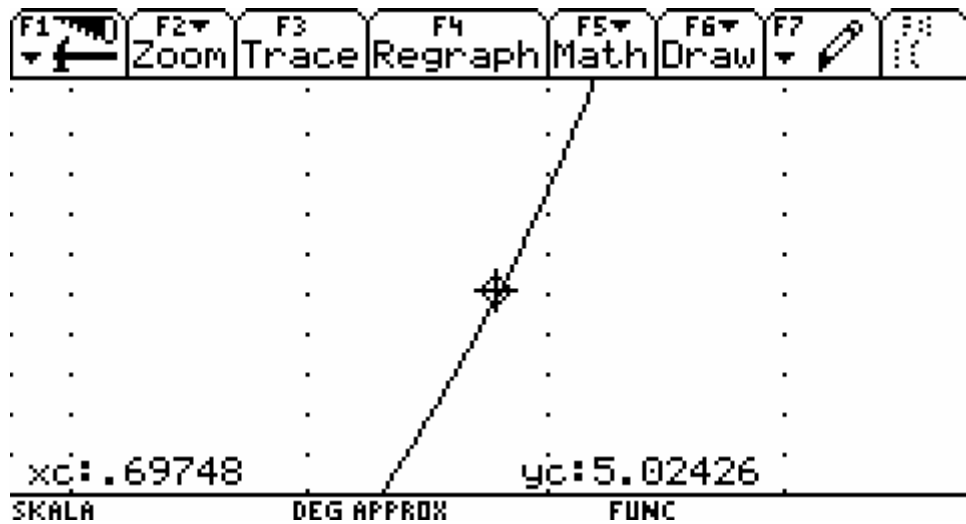
F1 [Zoom] F2
Zoom
xmin=-2.
xmax=2.
xscl=1.
ymin=-.1
ymax=10.
yscl=1.
xres=2.

```



Wie man ablesen kann liegt der gesuchte Wert in der Nähe von 0,6.
 Ein Zoom in den Graph führt zur Verbesserung des Wertes:





Weitere Möglichkeit: Suchen in der Wertetabelle:

Calculator screen showing the TABLE SETUP menu. The menu includes options for $tblStart$, Δtbl , Graph \leftrightarrow Table, and Independent. The current values are $tblStart: .6$, $\Delta tbl: .01$, and Independent: AUTO. The cursor is at the x-value $.57000$.

x = .5
USE \leftarrow AND \rightarrow TO OPEN CHOICES

x	y16
.64000	4.36516
.65000	4.46684
.66000	4.57088
.67000	4.67735
.68000	4.78630
.69000	4.89779
.70000	5.01187
.71000	5.12861

y16(x) = 5.0118723362727
SKALA DEG APPROX FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	
Setup	Calc	Header	Del Pow	Ins Pow		

TABLE SETUP

tblStart..... .69

Δtbl..... .0001

Graph <-> Table OFF→

Independent.... AUTO→

(Enter=SAVE) (ESC=CANCEL)

x = .6431

SKALA DEG APPROX FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	
Setup	Calc	Header	Del Pow	Ins Pow		

X	y16	
.69880	4.99804	
.69890	4.99919	
.69900	5.00035	
.69910	5.00150	
.69920	5.00265	
.69930	5.00380	
.69940	5.00495	
.69950	5.00611	

y16(x) = 5.0003453497698

SKALA DEG APPROX FUNC

Weitere Möglichkeit: Einsatz von Computeralgebra:

F1	F2	F3	F4	F5	F6	
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up		

■ solve(5 = 10^z, z) z = .69897

solve(5=10^z,z)

SKALA DEG APPROX FUNC 1/30

Verallgemeinerung dieses Verfahrens:

Wähle statt 5 nun eine beliebige Zahl x . Die sich ergebende Lösung wird als Wert einer Funktion $f(x)$ interpretiert:

```

F1 [←] F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──┐
│ solve(5 = 10Z, z) │                │ z = .69897 │
│ solve(x = 10Z, z) → f(x) │                │ Done        │
│ f(5) │                │ z = .69897 │
│ f(2) │                │ z = .30103 │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──┤
│ f(2) │
├──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──┤
│ SKALA │                │ DEG APPROX │                │ FUNC 4/30 │

```

Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?

$f(x)$ liefert als Wert eine Gleichung. Die rechte Seite dieser Gleichung ist der Funktionswert:

```

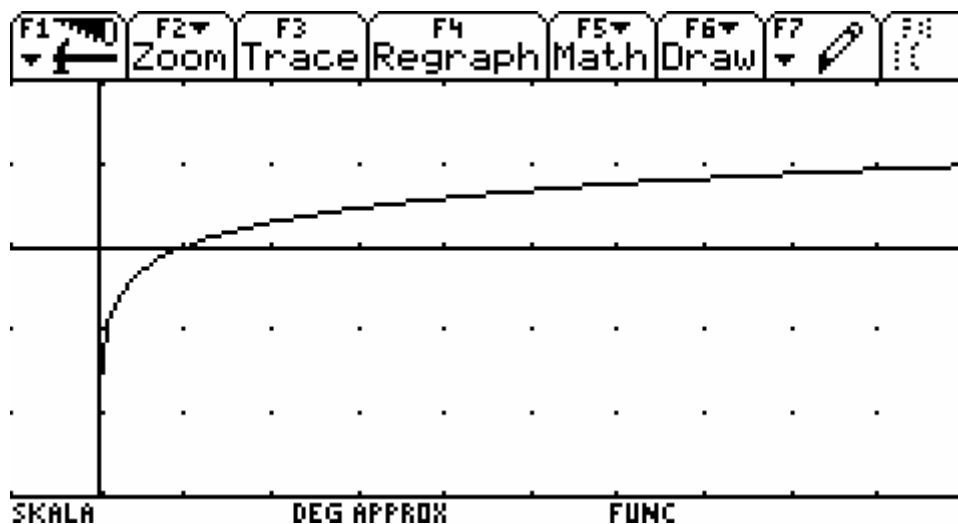
F1 [←] F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up
┌──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──┐
│ solve(5 = 10Z, z) │                │ z = .69897 │
│ solve(x = 10Z, z) → f(x) │                │ Done        │
│ f(5) │                │ z = .69897 │
│ f(2) │                │ z = .30103 │
│ right(f(x)) → g(x) │                │ Done        │
│ g(5) │                │ .69897     │
│ g(2) │                │ .30103     │
├──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──────────┴──┤
│ g(2) │
├──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──────────┬──┤
│ SKALA │                │ DEG APPROX │                │ FUNC 7/30 │

```

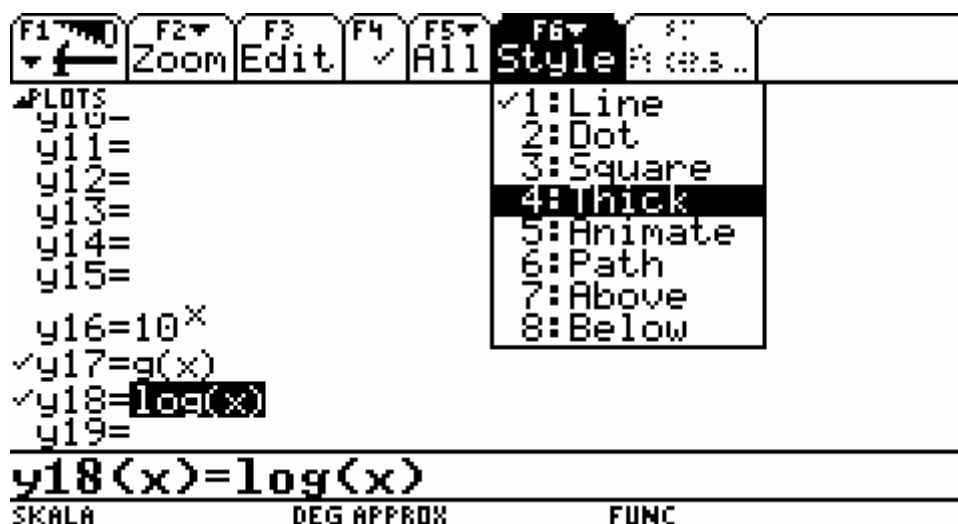
F1 ↙	F2 Zoom	F3 Edit	F4 ✓	F5 All	F6 Style	F7 F8	
↙ PLOTS y10= y11= y12= y13= y14= y15= y16=10 ^x ✓ y17=g(x) y18= y19=							
y19(x)=							
SKALA		DEG APPROX			FUNC		

Einstellungen zum Zeichnen der Funktion:

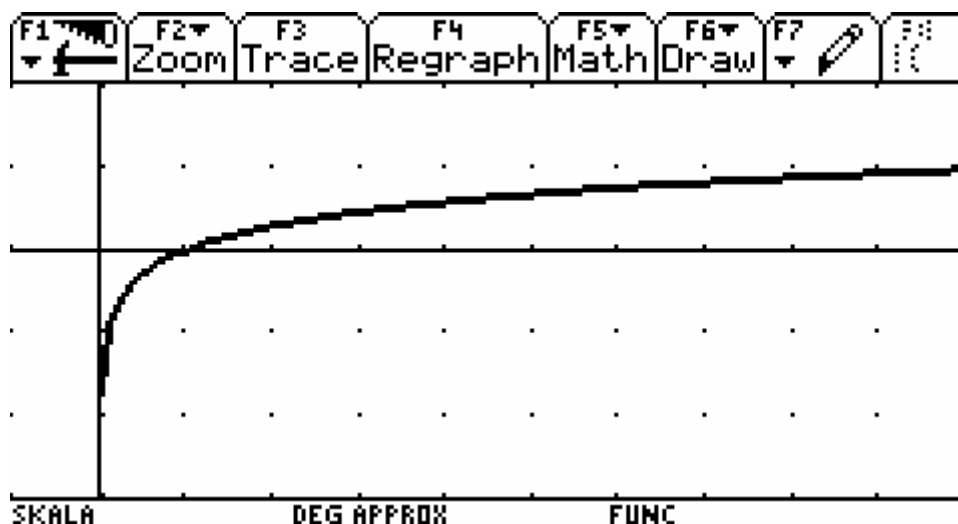
F1 ↙	F2 Zoom						
xmin=-1. xmax=10. xscl=1. ymin=-3. ymax=2. yscl=1. xres=2.							
SKALA		DEG APPROX			FUNC		



Die Funktion $g(x)$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis 10 und ist auf dem Rechner unter dem Namen $\log(x)$ vorhanden:

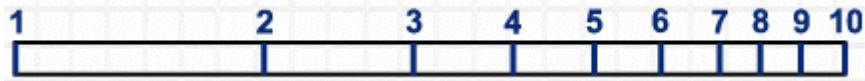


Demonstration durch das Zeichnen beider Graphen:



Aufgabe

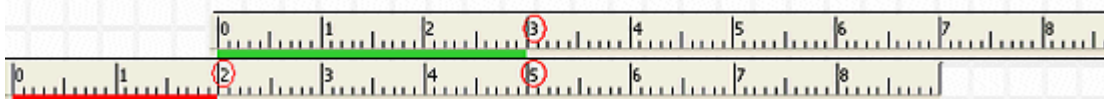
Stelle zwei logarithmische Skalen her, d.h. trage statt x den Wert $\log(x)$ auf, markiere diese Stelle aber mit x :



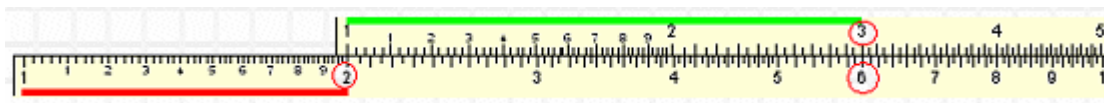
Experimentiere mit den beiden Skalen etwas. Was fällt auf?

Lösung:

Beim einer normalen Einteilung wird addiert:



Bei einer logarithmischen Einteilung wird multipliziert:



Rechenschieber

Vermutung:

$$\log(x) + \log(y) = \log(x \cdot y)$$

Aufgabe

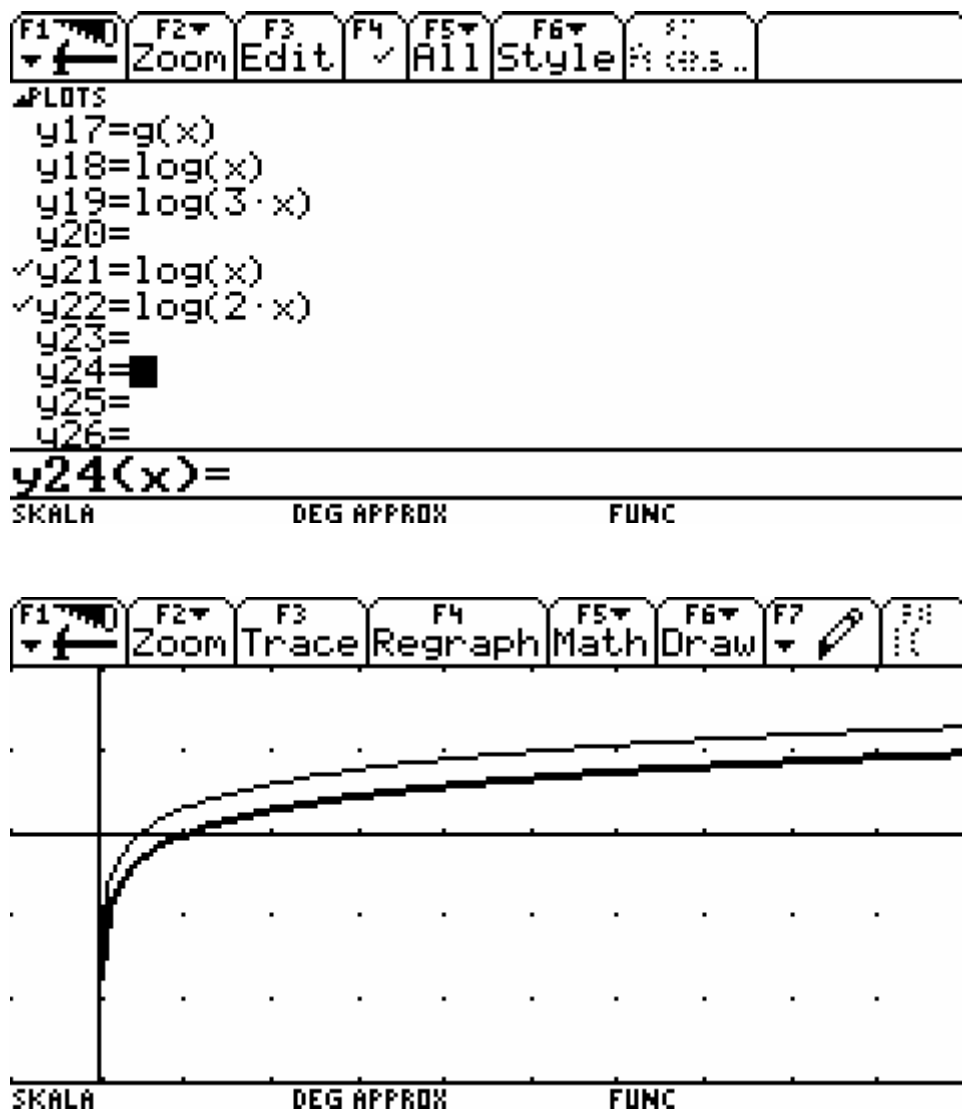
Für eine feste Zahl y , z.B. $y=2$ folgt aus $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ die Beziehung

$$\log(2 \cdot x) = \log(x) + \log(2) = \log(x) + 0,301$$

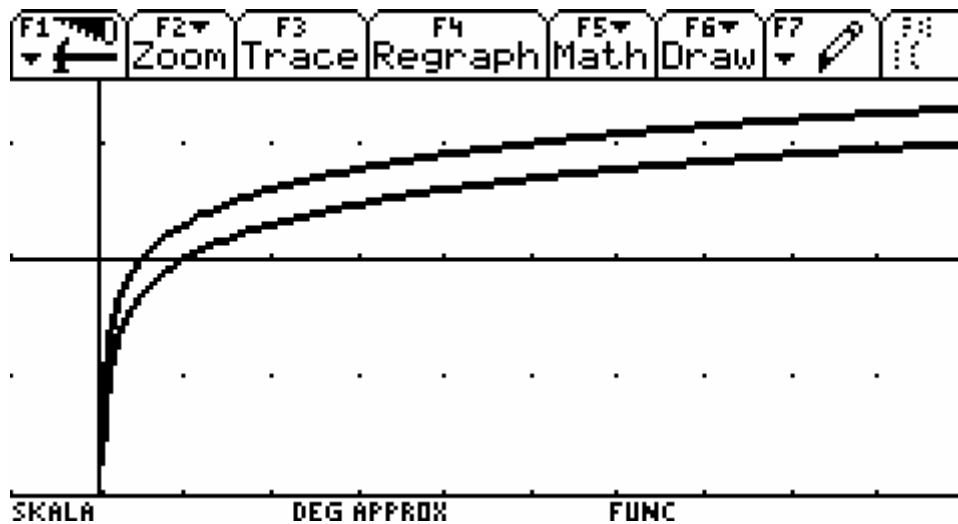
d.h. die Graphen der Funktionen $\log(2 \cdot x)$ und $\log(x)$ gehen durch eine Verschiebung ineinander über.

Veranschauliche dies in einer Graphik.

Zeige an einem anderen Beispiel, dass diese Eigenschaft für andere Funktionen nicht gilt.

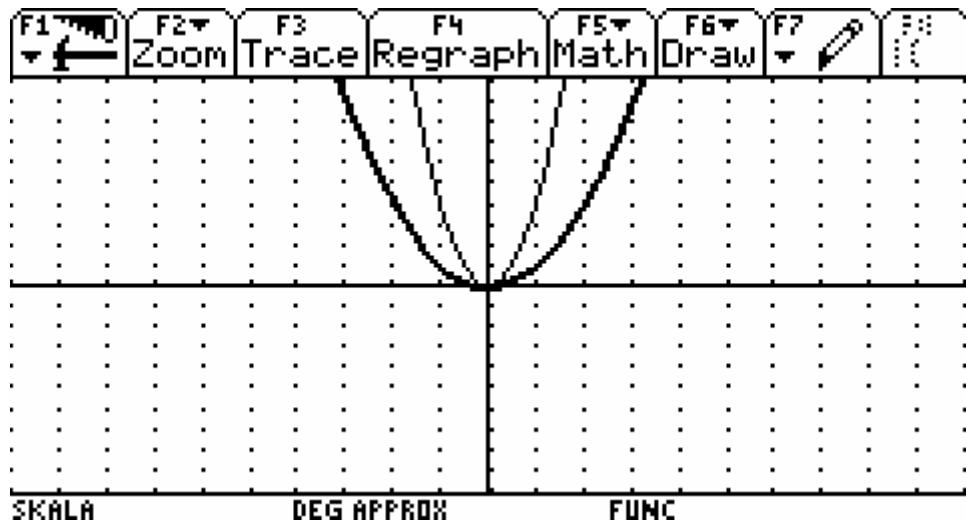


F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	
Zoom	Edit	✓	All	Style	↕		
↓ PLOTS y17=g(x) y18=log(x) y19=log(3·x) y20= ✓y21=log(x) ✓y22=log(2·x) ✓y23=log(x)+.301 y24= y25= y26=					✓1:Line 2:Dot 3:Square 4:Thick 5:Animate 6:Path 7:Above 8:Below		
y23(x)=log(x)+.301							
SKALA		DEG APPROX			FUNC		



Gegenbeispiel

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	
Zoom	Edit	✓	All	Style	↕		
↓ PLOTS y17= y18= y19= y20= ✓y21=x ² ✓y22=(2·x) ² y23=■ y24= y25=							
y23(x)=							
SKALA		DEG APPROX			FUNC		



Beweis der Logarithmengesetze über die Potenzrechenregeln.

Mögliche Weiterführungen des Themas

[Die Reise zu den Liliputanern](#)

[3. Keplersches Gesetz](#)

[Champion](#)