

Low Floor High Ceiling (LFHC) – Aufgaben

LFHC-Aufgaben haben ein niedriges Einstiegsniveau („low floor“) und können somit von praktisch allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden, bieten aber leistungsstarken Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, reichhaltige mathematische Entdeckungen zu machen („high ceiling“ = hohe Decke). Da alle Schülerinnen und Schüler an der gleichen Grundaufgabe arbeiten, können sie sich gegenseitig ihre Entdeckungen vorstellen, auch wenn sie in verschiedenen Niveaus gearbeitet haben.

Kriterien für eine LFHC-Aufgabe sind

- Die Problemstellung ist kurz und einfach.
- Der Lösungsweg ist wichtiger als die Lösung.
- Alle Schülerinnen und Schüler finden einen Einstieg. Jeder hat die Möglichkeit, auf seinem Niveau zu einer Lösung zu kommen.
- Im Lauf der Bearbeitung entstehen neue Fragestellungen, die zu eigenständigen Entdeckungen führen. So werden reichhaltige mathematische Diskussionen ermöglicht.

Wie kann/muss ich eine LFHC-Aufgabe vorbereiten?

- Zunächst sollte die Lehrkraft die Aufgabe unbedingt selbst durchführen, um die Möglichkeiten der Öffnung nach oben wahrzunehmen.
- Ggf. sollten Hilfsmaterialien (insbesondere für schwächere SuS) zusammengestellt werden.
- Keinesfalls muss man alle möglichen Entdeckungen selber machen, es ist viel spannender, wenn Schülerinnen und Schüler eigene Muster entdecken, die man selber nicht gesehen hat.

Welchen Vorteil haben LFHC-Aufgaben, insbesondere auch im inklusiven Unterricht?

- *Teilhabe und Partizipation:* Da alle Schülerinnen und Schüler die gleiche Aufgabenstellung bearbeiten, können sie in verschiedenen Konstellationen miteinander arbeiten. Dass hier auch das Lernen am gemeinsamen Gegenstand erfolgt, ist evident.
- *Kommunikation:* Leistungsstärkere SuS können anspruchsvolle Forschungen betreiben (ggf. auch mit mehr Zeit, etwa als Wochenaufgabe) und danach den anderen vorstellen. Da die Entdeckungen schwierig herauszufinden, in der Regel aber nicht schwierig nachzuvollziehen sind (da ja alle SuS die gleichen Aktivitäten machen und damit der Kontext vertraut ist), können so beide Seiten das mathematische Kommunizieren lernen: entweder Lösungswege verständlich darzustellen oder selbst nachzuvollziehen.
- *Erfolgserlebnisse für alle:* Die LFHC-Aufgaben zeigen den Schülerinnen und Schülern, was sie können (eigene Entdeckungen!), und nicht, was sie nicht können. Alle Schülerinnen und Schüler machen die Erfahrung: „Ich kann etwas.“ Jeder kann anderen seine Entdeckungen vorstellen und erfährt damit: „Ich bin etwas wert.“
- *Individuelle Herausforderung auf dem jeweils eigenen Lernniveau:* Sie bieten durch innere Differenzierung allen Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, in ihrem eigenen Niveau zu arbeiten. Damit kann jeder in seiner „Zone der nächsten Entwicklung“ arbeiten.
- *„Mathe macht Spaß“:* Das häufig – besonders bei den schwächeren Schülerinnen und Schülern – negative Mathematikbild kann sich durch die Erfolgserlebnisse verbessern. Durch die positiven Erfahrungen können sich auch das Klassenklima und das Schüler-Lehrer-Verhältnis verbessern.
- *Mathematikbild:* Schülerinnen und Schüler erfahren, dass der Weg wichtiger als das Ziel ist. Sie können damit nach und nach von einem statischen Mathematikbild (Mathematik als Regelwerk; die Lösung steht im Fokus) zu einem dynamischen Mathematikbild (Mathematik selbst entdecken, Muster finden, Lösungswege diskutieren und reflektieren) wechseln.

CalcuDoku

Bei CalcuDoku wird der flexible Umgang mit Grundrechenarten geübt. Jedes Rätsel besteht aus einem Gitter mit Blöcken, die mit fetten Linien umrandet sind. Ziel ist es, die Blöcke so mit Zahlen zwischen 1 und n (n = die Zahl der Reihen oder Spalten) zu füllen, dass jede Zahl in einer Reihe oder Spalte nur einmal vorkommt. Dabei soll in jedem Block die oben links angegebene Zahl das Ergebnis der angegebenen Operation sein.

Beispiel: Ist in einem Block aus zwei Feldern „6 +“ angezeigt, können die Zahlen 1 und 5 oder die Zahlen 2 und 4 eingetragen werden. In einem Block mit 3 Feldern würden die Zahlen 1, 2 und 3 eingetragen werden. „40 x“ in einem Block mit 3 Feldern bedeutet, dass 3 Zahlen eingetragen werden müssen, die das Produkt 40 ergeben; möglich wären also 1, 5 und 8 (bei einem Rätsel der Größe von mindestens 8x8) oder 2, 4 und 5. In einem Block darf die gleiche Zahl auch mehrfach vorkommen (allerdings nicht in der gleichen Zeile oder Spalte); das Produkt 12 aus 3 Zahlen könnte also $1 * 2 * 6$ oder $1 * 3 * 4$ oder $2 * 2 * 3$ sein. Wenn ein Block nur aus einem Kästchen besteht, ist oben links nur eine Zahl (ohne Operationszeichen) eingetragen; in diesem Fall besteht der Block nur aus dieser Zahl.

Im Folgenden ist beschrieben, wie im unteren Beispiel vorgegangen werden kann. Tragen Sie sukzessive die Zahlen wie angegeben ein.

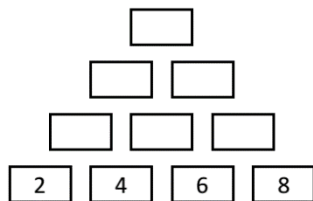
Im unteren Beispiel ist es günstig, mit dem Produkt 5 anzufangen, weil die Zerlegung eindeutig ist: nur $1 * 1 * 5$ ist möglich. Da die beiden Einsen nicht in der gleichen Reihe oder Spalte stehen dürfen, muss die 5 im Eck stehen. In das „3 :“ in der oberen Reihe können nur 1 und 3 eingetragen werden; da in der untersten Reihe schon die 1 eingetragen ist, muss die 3 links und die 1 rechts eingetragen werden. Jetzt kann man die übrigen Einsen platzieren: sie müssen in die beiden äußeren Spalten und in die 2./3. Reihe eingetragen werden. In der linken Spalte ist nur die dritte Reihe möglich, weil die 1 in der Zerlegung von 40 nicht vorkommt. Also muss die verbliebene 1 in die 2. Zeile der rechten Spalte eingetragen werden, und damit steht die Zerlegung der 6 in $5+1$ fest. Da dann die 5 in der obersten Reihe steht, muss die 5 von der 40 in die 2. Reihe eingetragen werden ...

+ - × ÷					+ - × ÷							
40x		3÷		6+	40x	4	2	3÷	3	1	6+	5
	10+	1-			5	5	10+	4	1-	2	3	1
		15+			1	3	15+	4	5	2		
	5x			24x	2	5x	1	5	4	24x	3	
2-					2-	3	5	1	2	4		

(Bildquelle: <http://www.conceptispuzzles.com/de/index.aspx?uri=puzzle/calculudoku/rules>)

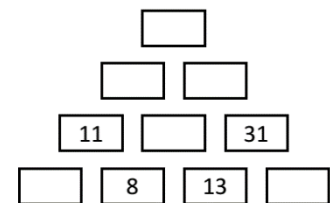
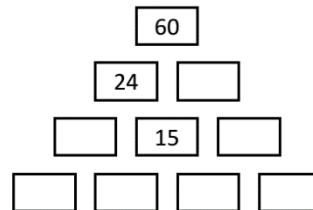
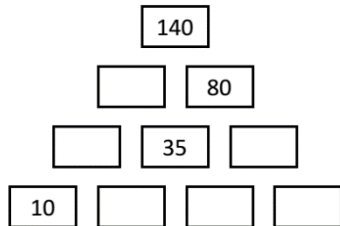
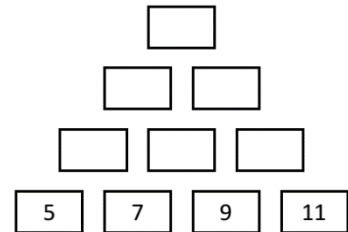
Auf calculatedoku.org können jeden Tag CalcuDokus verschiedener Größen und Schwierigkeitsgrade heruntergeladen werden (bis hin zu 12 x 12). Es empfiehlt sich, die Aufgaben auszudrucken, da man mit Stift und Papier besser mehrere Lösungsmöglichkeiten festhalten kann.

LFHC: Zahlenmauern mit System

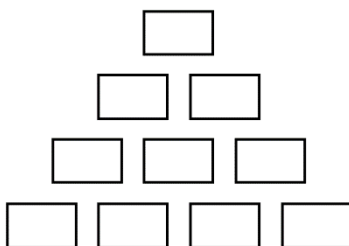


Zahlenmauern mit System

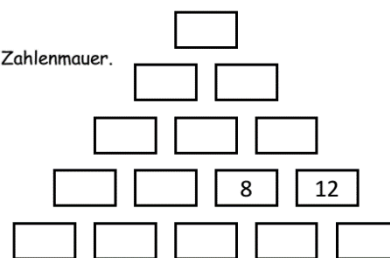
1. Füllen Sie die ersten fünf Zahlenmauern komplett aus.
2. Notieren Sie Ihre Beobachtungen. Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der untersten Zeile und dem obersten Stein.
3. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise und begründen Sie den gefundenen Zusammenhang.



4. Überlegen Sie selbst eine Zahlenmauer, die das gleiche Muster aufweist wie die ersten fünf.

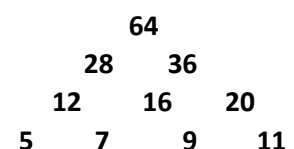
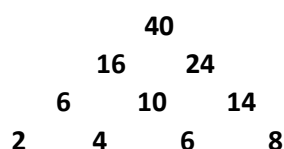
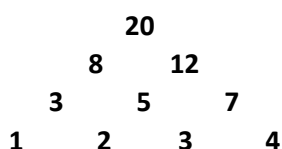


5. Vervollständigen Sie die Zahlenmauer.



Quelle: PIK AS (DZLM)

LFHC: Zahlenmauern mit System: Umsetzung und Erweiterungsmöglichkeiten



Es können vielfältige Beobachtungen gemacht und beschrieben werden, z. B.

Die beiden Zahlen in der dritten Reihe sind immer mal 4 der unteren.

Die mittlere Zahl in der 2. Reihe mal 4 ist die oberste Zahl.

Ich rechne alle 4 Zahlen zusammen. Dann rechne ich mal 2. Das ergibt die oberste Zahl.

Die 2. Zahl mal 10 ergibt die oberste Zahl.

Die oberen Zahlen sind immer gerade.

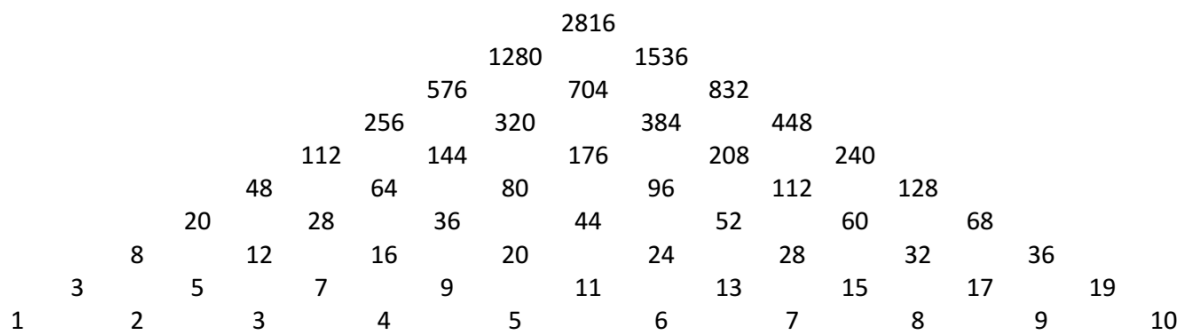
Die Zahlen ab der dritten Reihe sind immer gerade.

Alle Zahlen im Dreieck mit 2, 4, 6, 8, sind doppelt so groß wie die im ersten.

Die Entdeckungen können nach verschiedenen Kriterien diskutiert werden, z. B. „Mit welcher Regel findet man die oberste Zahl am einfachsten?“ (d. h. mit so wenig Rechnen wie möglich). Hier wäre von den vorgestellten Beispielen sicher der 4. Vorschlag (*Die 2. Zahl mal 10 ergibt die oberste Zahl.*) Gewinner, aber trifft er auch immer zu? Wenn nein, für welche Dreiecksmuster ist er richtig? Dies kann gezielte weitere Forschungen motivieren.

Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können untersuchen und ggf. begründen, ob (und wenn ja, warum) das immer so ist. Oder sie erweitern ihre Forschungen auf größere Zahlenmauern oder auf allgemeinere Bauprinzipien. Sie können z. B. untersuchen, ob die gefundenen Prinzipien auch auf eine Zahlenmauer mit den Startzahlen 3 7 8 12 zutreffen (d. h. die beiden äußeren Zahlen ergeben dieselbe Summe wie die beiden inneren Zahlen). Ihre Ergebnisse können sie dann der Klasse vorstellen. Da die Schwierigkeit im Entdecken (und Begründen) der Zusammenhänge liegt, weniger aber im Nachvollziehen der vorgestellten Ergebnisse, können die Präsentationen vor der ganzen Klasse erfolgen.

Das unten angefügte Beispiel, das auf den natürlichen Zahlen in der ersten Reihe beruht, kann als Vorlage für weitere Entdeckungen genutzt werden.



LFHC Geometrie: Schneiden und Falten

Arbeitsanleitungen	So wird es immer schwieriger:
<p>Vorübung Nimm ein quadratisches Papier. Falte es ein oder zweimal. Schneide in die Seiten oder Ecken ein beliebiges Muster hinein. Falte auf und schau dir das Muster genau an. Falte das Papier noch einmal zurück und wieder auf. Kannst du verstehen, wie das Muster am Ende zustande kommt? Kannst du jemand anderem erklären, wie es zustande kommt?</p>	Falle dreimal, schneide mehrere oder kompliziertere Figuren aus.

Differenzierungsmatrix

1 mal falten	2 mal falten	3 mal falten
Muster vorgeben, welche sind möglich/unmöglich?	Muster vorgeben, welche sind möglich/unmöglich?	Muster vorgeben, welche sind möglich/unmöglich?
Muster vorgeben, wie muss ich schneiden/falten?	Muster vorgeben, wie muss ich schneiden/falten?	Muster vorgeben, wie muss ich schneiden/falten?
Frei zeichnen, wie es am Ende aussehen soll, dann schneiden und prüfen	Frei zeichnen, wie es am Ende aussehen soll, dann schneiden und prüfen	Frei zeichnen, wie es am Ende aussehen soll, dann schneiden und prüfen
Ohne Ausschneiden ankreuzen	Ohne Ausschneiden ankreuzen	Ohne Ausschneiden ankreuzen
Ausschneiden und Endmuster aus Auswahl ankreuzen	Ausschneiden und Endmuster aus Auswahl ankreuzen	Ausschneiden und Endmuster aus Auswahl ankreuzen
Sauber schneiden und Bildkarte gestalten (mit Labbé-Vorlagen oder mit einem freien Quadrat)		
Vorerfahrung: Schneiden – Auffalten – Anschauen - Zurückfalten		

Arbeitsanleitungen	So wird es immer schwieriger:
<p>Die folgenden Aufgaben sind für den gemeinsamen Unterricht konzipiert. Beim Fernunterricht können nicht Papiere gegenseitig ausgetauscht werden. Alternativ können die Faltmuster fotografiert und gegenseitig zugeschickt werden.</p>	
<p>1 Partnertausch Nimm ein buntes Papier und eine Schere. Falte das Papier einmal zusammen und schneide an einer Seite ein Muster aus. Falte das Papier wieder auf und schau dir das Muster an. Tausche mit deinem Freund oder deiner Freundin das ausgeschnittene Papier aus. Nimm jetzt ein neues Papier und versuche, es so zu falten und einzuschneiden, dass dasselbe Muster herauskommt. Wenn ihr das gut könnt, könnt ihr das Papier auch an zwei oder drei Seiten ausschneiden. Oder auch in einer Ecke. Oder ihr schneidet ein schwierigeres Muster hinein. Ein „L“ ist schwieriger als ein Dreieck, ein „Haus“ schwieriger als ein Halbkreis.</p>	<p>Falte das Papier 2mal. Schneide in eine Seite (oder in 2 oder 3 oder 4 Seiten) oder in eine oder mehrere der 4 Ecken.</p> <p>Richtig schwer wird es, wenn du 3mal faltest. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten.</p>

<p>2 Helseher</p> <p>Nimm ein buntes Papier und eine Schere. Falte das Papier einmal. Schneide an einer Seite ein Muster heraus. Falte das Papier jetzt nicht wieder auf! Überlege zuerst, wie es wohl aussieht, wenn du es wieder auffaltest. Vielleicht hilft es dir, es in Gedanken aufzufalten. Stelle dir dabei vor, dass du die obere Hälfte nimmst und langsam nach rechts führst, bis das Blatt ganz aufgefaltet auf dem Tisch liegt.</p> <p>Zeichne dann das Muster, das das Blatt am Ende hat, auf ein Blatt. Falte dann auf und überprüfe, ob du es richtig „vorhergesehen“ hast.</p> <p>Wenn du das gut kannst, dann kannst du mit jemand anderem die gefalteten Blätter austauschen. Es ist schwieriger, wenn du in Gedanken etwas auffalten sollst, was du nicht selbst hergestellt hast.</p>	<p>Falte 2- oder später sogar 3-mal.</p> <p>Schneide zunächst an wenigen, später an immer mehr Kanten und/oder Ecken etwas weg.</p> <p>Und je komplizierter die Muster sind, die du weggeschnitten hast, um so schwieriger ist die Aufgabe.</p>
<p>3 Vorstellungsübung</p> <p>Voraussetzung: „quer“ oder „längs“ oder „diagonal“ falten ist bekannt und vorher gemacht worden <i>(ohne den kursiv gedruckten Satz ist es einfacher)</i></p> <p>„Setze dich ganz bequem hin und schließe die Augen. Vor dir auf dem Tisch liegen ein rotes Papierquadrat und eine Schere. Du nimmst das Papier und faltest es so, so dass die untere Hälfte auf der oberen liegt. (*) Jetzt siehst du ein rotes Rechteck vor dir. Ist es breiter als hoch? Oder höher als breit? Wo liegt die Faltkante?</p> <p>Nimm jetzt das Papier in Gedanken in die Hand und schneide in die Mitte der Faltkante ein Dreieck. <i>Dann schneidest du am rechten Rand der Faltkante noch ein Quadrat aus.</i></p> <p>Lege das Papier wieder so hin, dass es genauso liegt wie vorher, bevor du geschnitten hast. Liegt die Faltkante wieder an der gleichen Stelle?</p> <p>Falte jetzt das Papier in Gedanken auf, indem du die obere Hälfte nach unten aufklappst. (**) Wie sieht das Blatt jetzt aus?</p> <p>Zeichne das Blatt, so wie du es dir am Ende vorgestellt hast auf. Öffne dann die Augen.“</p> <p>Vergleiche mit deinem Nachbarn. Habt ihr das gleiche gesehen?</p> <p>Nehmt euch dann ein Papier und bastelt es so nach, wie es beschrieben wurde. Ist euer Muster richtig?</p> <p><i>An der Stelle (*) springt die Vorstellungsübung in der schwierigen Variante in die rechte Spalte, und setzt an der Stelle (**) wieder mit diesem Text fort.</i></p>	<p>(*) Falte dann noch einmal, so dass die linke Hälfte auf die rechte Hälfte gefaltet wird. Vor dir liegt jetzt ein Quadrat. Die Seiten sehen unterschiedlich aus. Wo liegt die Faltkante, die du zuletzt gefaltet hast – oben, unten, rechts oder links? Wie sieht die untere Kante aus – liegen da 4 einzelne Blätter oder gibt es 2 Faltkanten? Gehe in Gedanken alle anderen Seiten durch.</p> <p>Jetzt nimmst du in Gedanken die Schere in die Hand. Du schneidest in die untere Kante ein Dreieck, in die linke Kante einen Halbkreis und in die obere Kante ein Quadrat – jeweils in die Mitten der Seiten.</p> <p>Falte jetzt in Gedanken das Papier wieder auf: zunächst die obere Hälfte nach links. Jetzt siehst du ein Rechteck. Wie sieht das Muster aus? Stelle es dir gut vor und zeichne es in Gedanken auf ein Blatt. Falte dann die obere Hälfte nach unten auf. (**)</p>

Literatur: Reinhold Haug: Scherenschnitte kopieren; in: mathematik 5 bis 10, Heft 39 (2017), S. 10 f.; Klaus-Peter Eichler: Kopfgeometrie; in: mathematik 5 bis 10, Heft 39 (2017), S. 43; Friedrich-Verlag.