

Das Ziegenproblem

Dr. Christina Bauer, IGS Kurt Schumacher Ingelheim



Auf einen Blick

| | |
|----------------------|--|
| Klassenstufe: | 9 oder Oberstufe LK/GK |
| Kompetenzen: | K1 Argumentieren, K4 Mathematische Darstellungen verwenden, K6 Kommunizieren |
| Thema: | Baumdiagramme, Bedingte Wahrscheinlichkeiten |
| Material: | 3 Spielkarten, Arbeitsblatt |
| Medien: | App mit Simulation |

Die Mathe-Challenge

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

hast Du Lust, etwas in Mathematik selbst zu erforschen? Dann mach mit bei der Mathe-Challenge! Hier gibt es Aufgaben zum Experimentieren, Basteln, Spielen, Präsentieren und Erklären. Du kannst mathematische Zusammenhänge erforschen und erstaunliche Entdeckungen machen. Vielleicht machen deine Familienmitglieder ja auch mit?

Du kannst alleine oder in einer Gruppe arbeiten. Schicke die Ergebnisse Deiner Mathe-Challenge nach einer Woche an Deine Mathelehrerin oder Deinen Mathelehrer.

Viel Spaß beim Ausprobieren und viel Erfolg!



Mathe-Challenge Variante 1

Das Drei-Türen-Problem

Stell dir vor, du bist Moderator einer Show. Der Gewinn, ein Luxusauto, ist hinter einer von drei Türen versteckt. Hinter den anderen beiden befindet sich jeweils eine Ziege als Zeichen für eine Niete.

Dein Kandidat darf sich für eine Tür entscheiden, z.B. für Tür 1. Anschließend öffnest du ihm eine der beiden anderen Türen, in der sich nicht das Auto befindet, und zeigst deinem Kandidaten eine der beiden Ziegen. Der Kandidat darf nun seine Entscheidung nochmals überdenken: er kann entweder bei seiner gewählten Tür bleiben oder wechseln.

Um das drei Türen-Problem nachzuspielen, kannst du die drei Bilder auf die Vorderseite von drei Karten aus einem Kartenspiel aufkleben.

Alternativ kannst du auch ein kleines Spielzeugauto und zwei weitere Gegenstände, die für eine Niete stehen, unter drei Dosen verstecken.



Simulation des Ziegenproblems

Spielregeln: Du legst die Karten verdeckt auf den Tisch (wobei du weißt, wo das Auto ist). Ein Familienmitglied wählt eine Karte. Du drehst eine der beiden anderen Karten, unter der nicht das Auto ist, um. Der Kandidat entscheidet, ob er bei seiner Wahl bleibt oder wechselt.

Aufgabe 1: Spielt zunächst 10 Runden, in denen der Kandidat auf seiner ersten Wahl beharrt. Anschließend spielt Ihr 10 Runden, bei denen er seine Wahl ändert.

Notiert das Ergebnis jeder Runde: Kandidat gewinnt (+) und Kandidat verliert (-).

| Runde | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Anzahl Gewinne | Relative Häufigkeit |
|---------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----------------|---------------------|
| Strategie „Bleiben“ | | | | | | | | | | | | |
| Strategie „Wechsel“ | | | | | | | | | | | | |

Aufgabe 2: Schau dir anschließend eine Simulation des Problems an unter:

<https://www.geogebra.org/m/f4QfxksF>

Aufgabe 3: Welche Strategie würdest du wählen, wenn du Kandidat dieser Show wärst? Begründe deine Antwort z.B. in einem kurzen selbsterstellten Erklärvideo.

Hinweis: Ein gute Erklärung findest du unter: <https://www.youtube.com/watch?v=FX2nrCM9xAw>

Mathe-Challenge Variante 2

Das Drei-Türen-Problem

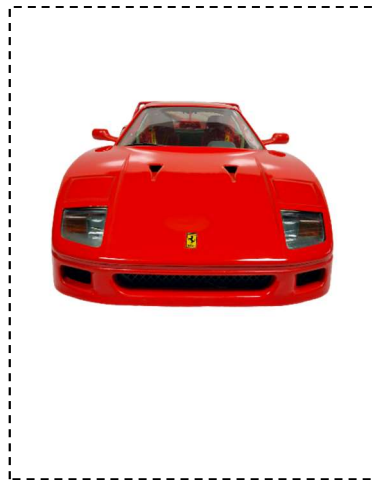
Stell dir vor, du bist Moderator einer Show. Der Gewinn, ein Luxusauto, ist hinter einer von drei Türen versteckt. Hinter den anderen beiden befindet sich jeweils eine Ziege als Zeichen für eine Niete.

Dein Kandidat darf sich für eine Tür entscheiden, z.B. für Tür 1. Anschließend öffnest du ihm eine der beiden anderen Türen, in der sich nicht das Auto befindet, und zeigst deinem Kandidaten eine der beiden Ziegen. Der Kandidat darf nun seine Entscheidung nochmals überdenken: er kann entweder bei seiner gewählten Tür bleiben oder wechseln.

Tür 1



Tür 2



Tür 3



Veranschauliche und simuliere das Drei-Türen-Problem. Die dargestellten Bilder kannst du dazu gerne nutzen. Vielleicht kannst du deine Familienmitglieder als Kandidaten deiner Show gewinnen?

Informiere dich über das Drei-Türen-Problem im Internet. Dort findest du auch schöne Simulationen.

Erstelle ein Erklärvideo als Ergebnis deiner Mathe-Challenge!

Fachliche und didaktisch-methodische Hinweise

Das Ziegenproblem (auch: Drei-Türen-Problem, Monty-Hall-Problem) ist in verschiedenen Varianten schon seit einigen Jahrhunderten aus Mathematikbüchern bekannt. Besondere Aufmerksamkeit erfuhr das Ziegenproblem mit der amerikanischen Fernsehshow „Let's make a deal“ unter dem Moderator Monty Hall.

Der Gewinn, ein Luxusauto, ist hinter einer von drei Türen versteckt. Hinter den anderen beiden befindet sich jeweils eine Ziege als Zeichen für eine Niete. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt ein Drittel (Gewinnchance 1:2). Der Kandidat der Show darf sich für ein Tor entscheiden, z.B. für Tür 1. Anschließend öffnet der Moderator eines der beiden anderen Tore, in dem sich nicht das Auto befindet, und zeigt dem Kandidaten eine der beiden Ziegen. Der Kandidat darf nun seine Entscheidung nochmals überdenken: er kann entweder bei seinem gewählten Tür bleiben oder wechseln.

Die zentrale Frage bei diesem Problem ist: *Verbessert der Kandidat seine Gewinnchance, wenn er die erste Wahl zurücknimmt (also wechselt) oder soll er bei seiner ersten Entscheidung bleiben?*

Die Lösung des Problems besteht darin, die beiden Strategien „Wechseln“ und „Bleiben“ näher zu analysieren.

In drei Schritten können sich die Schüler somit der Lösung des Problems nähern.

1. Schritt: Spielen des Ziegenproblems

Die Schüler basteln sich hierzu drei von hinten gleich aussehende Spielkarten (vgl. Abbildung 1). Tipp: Hierzu eignet sich Karten aus einem Kartenspiel, das nicht mehr benötigt wird. Alternativ können sie zwei Gegenstände nehmen, die für die zwei Ziegen stehen und ein Spielzeugauto und diese unter Dosen verstecken. Anschließend lassen sie ein (oder mehrere) Familienmitglieder entscheiden, für welche (verdeckte) Karte bzw. Dose sie sich entscheiden. Die Schüler als Moderator der Show zeigen dem Kandidaten immer die weitere Ziege. Sie dokumentieren die Ergebnisse im Arbeitsblatt für die Strategie „Wechseln“ und für die Strategie „Bleiben“.

2. Schritt: Nutzung einer Simulation

<https://www.geogebra.org/m/f4QfxksF>

Ziel von Schritt 1 und 2: Die Schüler erfahren, dass man bei der Strategie „Wechseln“ häufiger gewinnt.

3. Schritt: Mathematische Erklärung mit Kenntnissen in Klassestufe 9

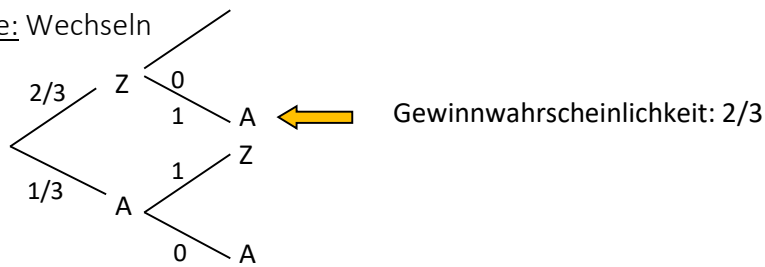
Eine gute visuelle Erklärung (ohne Baumdiagramme und bedingte Wahrscheinlichkeiten) bietet folgendes Video:

<https://www.youtube.com/watch?v=FX2nrCM9xAw>

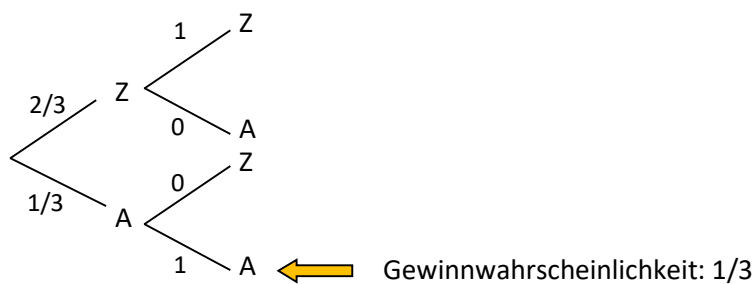
Auch eine Analyse mittels *Baumdiagrammen* führt zur Lösung des Problems. Mithilfe eines Baumdiagramms werden Möglichkeiten (und deren Wahrscheinlichkeiten) auf verschiedenen Stufen visualisiert. Die Ergebnisse eines Zufallsversuchs stellen die Pfade im Baumdiagramm dar. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (hier: Gewinn eines Autos) erhält man durch

Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten eines Ergebnisses, das zu dem Ereignis führt und anschließender Addition der Wahrscheinlichkeiten (Pfadmultiplications- und Pfadadditionsregel).

Strategie: Wechseln



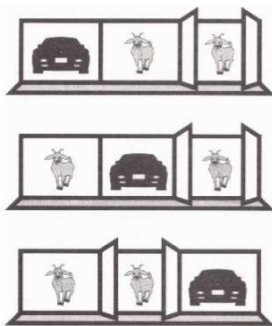
Strategie: Bleiben



Z: Ziege und A: Auto

Die beiden obigen Baumdiagramme zeigen, dass die Strategie Wechseln besser ist, da man dabei das Auto mit einer Wahrscheinlichkeit von $2/3$ gewinnt. D.h. man verdoppelt damit die ursprüngliche Gewinnwahrscheinlichkeit von $1/3$ auf $2/3$.

Durch *Visualisierung* aller Möglichkeiten kann man sich die Lösung des Ziegenproblems weiter veranschaulichen.



Quelle: Krämer, W. (2008): Denkste! Trugschlüsse aus der Welt der Zahlen und des Zufalls. München: Piper, S. 93

Die dargestellten Varianten sind gleich wahrscheinlich, da sich das Auto in Tür 1, 2 oder 3 befinden kann. Wenn man zuerst das linke Tür wählt und *nicht wechselt*, gewinnt man das Auto mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$.

Bei der Strategie Wechseln beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit für das Auto $2/3$. Begründung: Da der Moderator immer ein Tür mit einer Ziege öffnet, gibt es drei Möglichkeiten (vgl. offene Türen in der Abbildung): Bei der ersten verliert man das Auto, das man zunächst gewonnen hätte, bei den anderen beiden Möglichkeiten gewinnt man das Auto.