Abstandsberechnungen

von Günter Schmidt

Themenbereich	
Analytische Geometrie im R^3, Verbindungen zu reellen Funktionen/Analysis	
Inhalte	**Ziele**
• Parameter- und Normalengleichungen von Geraden und Ebenen im Raum • Entfernung von Punkten im R^3, Abstand Punkt Ebene, Abstand windschiefer Geraden • Lösen von Gleichungssystemen (Gauss-Algorithmus) • Extremwertbestimmung bei reellen Funktionen	• Problemlösen mit Hilfe mathematischer Modelle • Anwenden von Verfahren der Analytischen Geometrie und der Analysis • Training der Raumanschauung

Zwei Flugzeuge fliegen mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf geradem Kurs. Das erste befindet sich zur Zeit t=0 im Nullpunkt eines geeignet gewählten Koordinatensystems. Zur Zeit t=3 ist es in P(6|-3|9). Zu den entsprechenden Zeiten befindet sich das zweite in Q(2|28|-14) bzw. R(5|19|-2).
(Koordinatenangaben in 10^{-2} km, Zeiteinheiten in Sekunden)

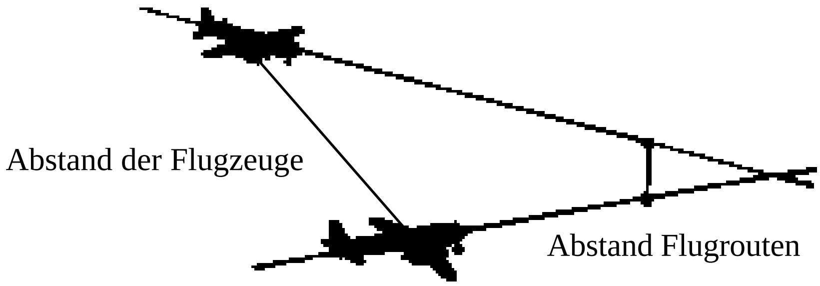
- Zu welcher Zeit sind sich die Flugzeuge am nächsten (wie nahe), und in welchen Positionen befinden sie sich dann gerade. Zu welcher Zeit im Intervall [0;60] ist der Abstand der Flugzeuge am größten?

- Wie groß ist der minimale Abstand der beiden Flugrouten?

- Mit welchen Geschwindigkeiten fliegen die beiden Flugzeuge? Mit welcher Geschwindigkeit müßte das zweite Flugzeug fliegen, so daß die geringste Entfernung der Flugzeuge mit der minimalen Entfernung der Flugrouten übereinstimmt?

Vorüberlegungen

Die Flugrouten liegen wahrscheinlich auf windschiefen Geraden (-> Nachweis).



Der minimale Abstand der Flugrouten entspricht dann dem Abstand der beiden windschiefen Geraden. Er stimmt i.a. nicht mit dem minimalen Abstand der beiden Flugzeuge überein, da deren Positionen durch die Geschwindigkeitsvektoren und den Zeitparameter t bestimmt sind.

Das weitere Vorgehen läßt sich der Aufgabenstellung entsprechend in drei Teilaufgaben gliedern:

Teil 1: Minimale Entfernung der Flugzeuge

1.1 Die Geradengleichungen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{b}(t) = \mathbf{q} + t\mathbf{v_2}$ für die Flugrouten der beiden Flugzeuge A und B müssen bestimmt werden. **p** und **q** beschreiben die jeweiligen Positionen zum Zeitpunkt t=0. Die Geschwindigkeitsvektoren (Richtungsvektoren $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ der Geraden) werden so gewählt, daß mit dem Parameter t jeweils die Position des Flugzeuges zum Zeitpunkt t (in Sekunden) bestimmt ist. Wichtig: in beiden Geradengleichungen ist dann der Parameter t der gleiche.
1.2 Die Entfernung *entf(t)* läßt sich nun als Entfernung der jeweiligen Positionen zum Zeitpunkt t bestimmen.
1.3 Anschließend wird das Minimum von *entf(t)* gesucht, ebenso das Maximum im angegebenen Zeitintervall.

Teil 2: Abstand der Flugrouten

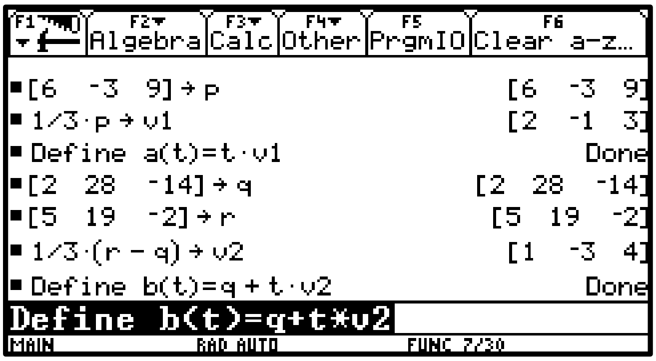
Es geht um die Bestimmung des Abstandes windschiefer Geraden. Hierfür ist als einfaches Verfahren bekannt: Parallele Ebenen durch beide Geraden legen, dann den Abstand dieser Ebenen bestimmen.

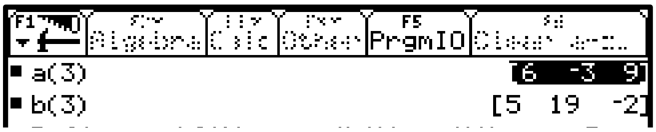
Teil 3: Änderung der Geschwindigkeit

3.1 Es müssen die Punkte auf den Flugrouten bestimmt werden, die die Positionen des minimalen Abstands der Flugrouten angeben, Diese entsprechen den Fußpunkten F_a und F_b des gemeinsamen Lotes der windschiefen Geraden.
3.2 Dann wird der Zeitpunkt t_0 bestimmt, zu dem sich Flugzeug A in Position F_a befindet.
3.3 Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors des Flugzeugs B muß nun so verändert werden, daß sich das Flugzeug B zum Zeitpunkt t_0 gerade in Position F_b befindet.

Lösungsskizze zu Teil 1

Die Vektoren p, q und r werden unter den entsprechenden Namen gespeichert (Taste STO>).
Mit Hilfe der üblichen Vektoroperationen (S-Multiplikation, Addition und Subtraktion) können wir die Geradengleichungen
a(t) für Flugzeug A und
b(t) für Flugzeug B so definieren, daß die jeweilige Position zum Zeitpunkt t angegeben wird. Define im Menü F4
Probe: durch Eingabe von a(3) und b(3) erhalten wir die Positionen p und q.





An dieser Stelle überprüfen wir nun auch, ob die beiden Geraden windschief sind. Dies ist der Fall, wenn die beiden Richtungsvektoren und die Differenz der beiden Ortsvektoren linear unabhängig sind, d.h. die Gleichung

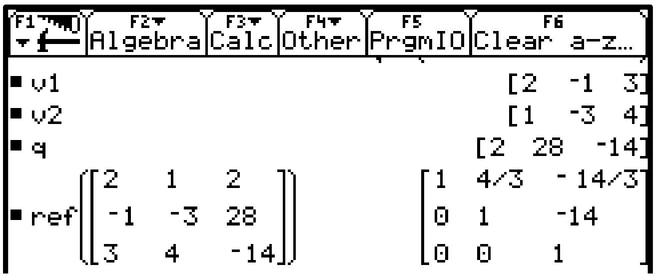
$$r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3=0$$

hat nur die triviale Lösung $(r_1/r_2/r_3)=(0/0/0)$.

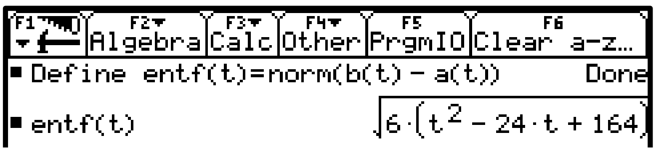
Wir überführen die Matrix des 3-3-Gleichungssystems mit

ref(im Menü math/Matrix

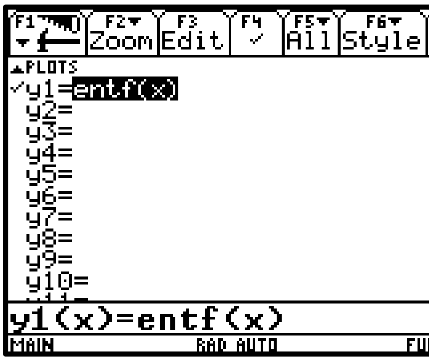
in die Dreiecksform und erkennen daraus die lineare Unabhängigkeit der drei Vektoren.

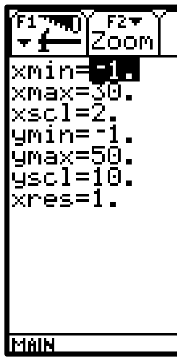


Die Formel für die gesuchte Entfernung zwischen den Flugzeugen zum Zeitpunkt t können wir nun direkt mit Hilfe des Befehls
norm(
im Menü MATH/MATRIX/NORMS
bestimmen.

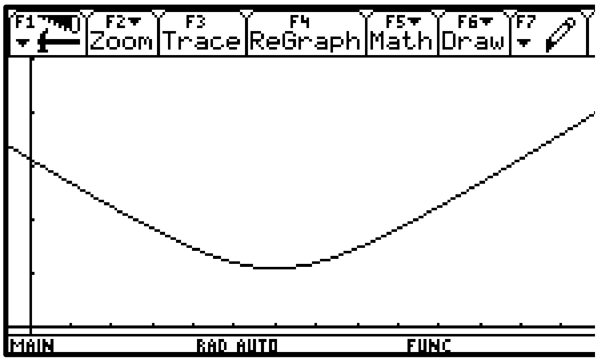


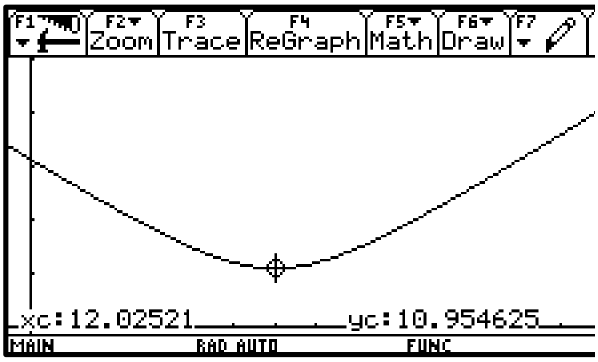
Wir erkennen, daß die Entfernung eine reelle Funktion der Zeit ist, hier speziell die Verkettung einer Wurzelfunktion mit einer quadratischen Funktion.
Wir definieren diese Funktion im Funktioneneditor ◊Y=, bestimmen über ◊WINDOW einen passenden Bereich und schauen uns mit ◊GRAPH den Graph der Funktion an .





Die Funktion hat offensichtlich ein Minimum, dies liegt ungefähr bei t=12. Mit Hilfe der TRACE-Funktion F3 können wir dies präzisieren, gleichzeitig erkennen wir, daß der minimale Abstand ungefähr 110 m beträgt.

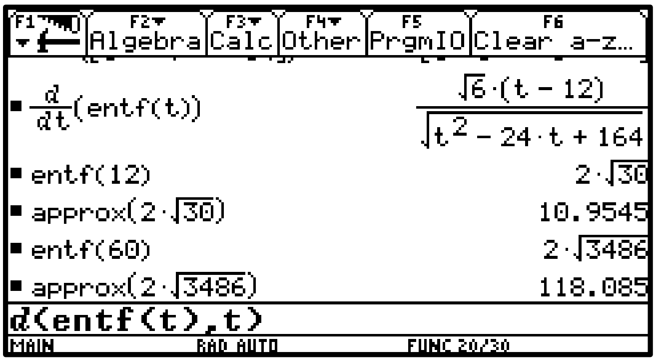




Unsere Kenntnisse aus der Analysis erlauben uns auch die rechnerische Bestimmung des Minimums über die Nullstelle der 1. Ableitung.

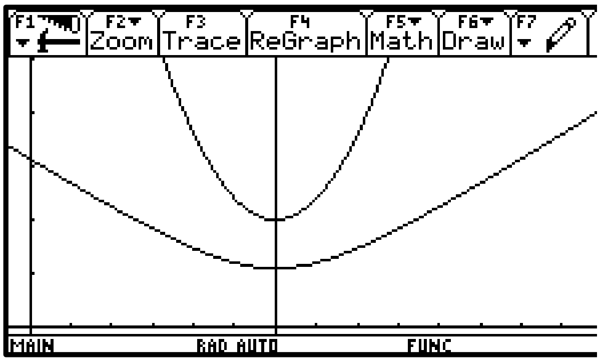
Mit dem Befehl
d(differentiate im Menü Calc
können wir unsere Funktion entf(t) nach t ableiten.

Die Nullstelle der Ableitungsfunktion liegt offensichtlich bei t=12, die Entfernung beträgt zu diesem Zeitpunkt 10.9545 (etwa 110 m).



Aus dem Verlauf der Funktion erkennen wir außerdem, daß das Maximum der Entfernung mit etwa 1180 m am rechten Rand des vorgegebenen Intervalls liegt.

Wir können uns an dieser Stelle noch einen anderen Zusammenhang anschaulich bestätigen. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion wissen wir, daß wir nur die Minimumstelle der Funktion $y2(x)=x^2-24x+164$ suchen müssen, diese stimmt dann mit der für die verkettete Funktion überein. Wir geben die Funktion im Funktions- Editor ein und finden die graphische Veranschaulichung des Zusammenhangs.
(Die Vertikale bei x=12 wurde unter dem Menü F7 mit der Option 6:Vertical gezeichnet).



Lösungsskizze zu Teil 2

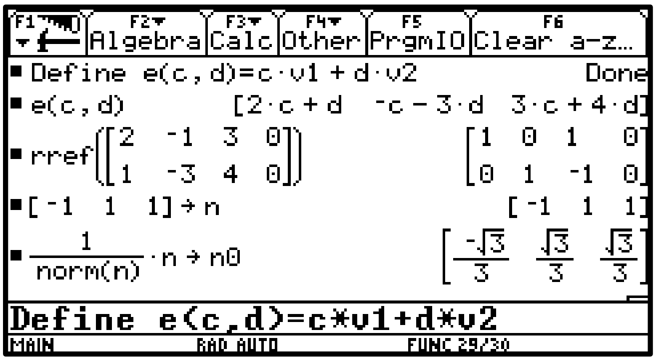
Wir definieren die Ebene E, die die Gerade a enthält und zu der die Gerade b parallel ist. Den Abstand des Punktes **q** von E bestimmen wir mit Hilfe der Hesseschen Normalform von E, dies ist dann der Abstand der beiden windschiefen Geraden.

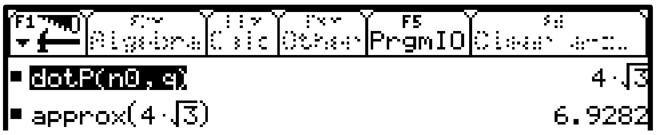
Den Normalenvektor **n** bestimmen wir über das Gleichungssystem

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v_1}=0 \text{ und } \mathbf{n}\cdot\mathbf{v_2}=0.$$

Hierzu formen wir die Matrix des Systems in die Diagonalform um.
rref(im Menü math/Matrix .

Aus der Diagonalform können wir **n** bestimmen, dieser wird dann zu $\mathbf{n_0}$ normiert.
Das Skalarprodukt $\mathbf{n_0}\cdot\mathbf{q}$ liefert dann den gesuchten Abstand .   dotP(
im Menü math/Matrix/norms



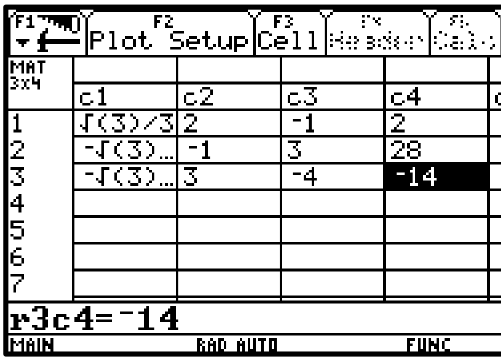


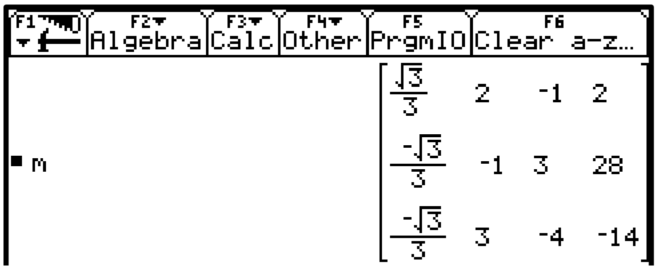
Lösungsskizze zu Teil 3

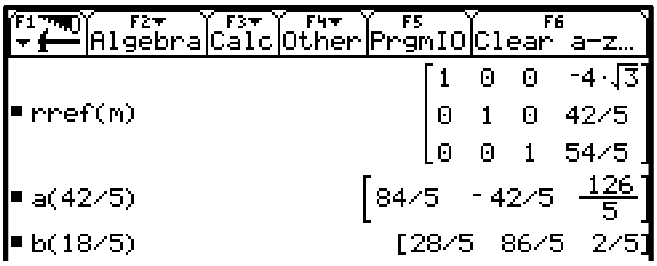
Zur Bestimmung der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes der windschiefen Geraden lösen wir das Gleichungssystem

$$d\cdot\mathbf{n_0}=t_1\cdot\mathbf{v_1}-(\mathbf{q}+t_2\cdot\mathbf{v_2})$$

Die Matrix dieses Systems geben wir über den Matrix-Editor ein
Taste APPS und Wahl Data/Matrix Editor
und speichern sie unter dem Namen m.

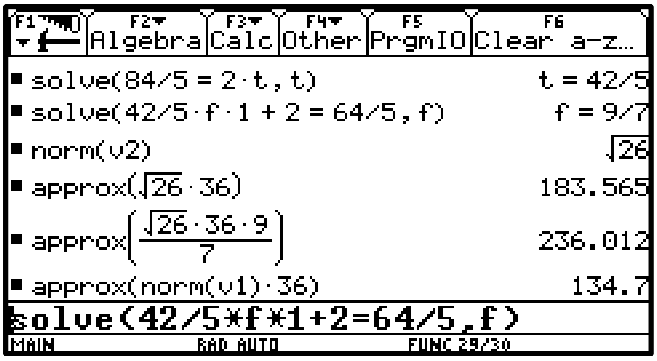






Nach Umwandlung in die Diagonalform können wir die Parameter t_1 und t_2 für die jeweiligen Fußpunkte ablesen und durch Einsetzen in die Geradengleichungen die Fußpunkte berechnen. Dann ermitteln wir den Zeitpunkt t_0, zu dem Flugzeug A den Fußpunkt F_a erreicht. Die Geschwindigkeit für Flugzeug B muß nun so verändert werden, daß Flugzeug B zum gleichen Zeitpunkt t_0 den Fußpunkt F_b erreicht.

Zur Demonstration lösen wir die beiden einfachen linearen Gleichungen mit dem Befehl solve aus dem Menü F2



Wir erkennen, daß die Geschwindigkeit von Flugzeug B von 184 km/h auf 236 km/h erhöht werden muß, was bei dem dann eintretenden geringen Abstand allerdings nicht zu empfehlen ist.

Zusatzaufgaben und Erweiterungen

Ein Sportflugzeug und ein Transportflugzeug befinden sich jeweils auf geradlinigem Kurs. Im Koordinatensystem (Koordinatenangaben in km) des Flughafens werden die Positionen zu einem bestimmten Zeitpunkt 0 und dann 6 Minuten später wieder festgehalten.

	Ort zum Zeitpunkt 0	Ort nach 6 Minuten
Sportflugzeug	A(0;4;2)	A*(20/-6/2)
Transportflugzeug	B(3;0;3)	B*(3/50/-7)

(a) Bestimmen Sie jeweils die Richtung und den Betrag der Geschwindigkeit der Flugzeuge.
(b) Bestimmen Sie die kleinste Entfernung der Flugzeuge. Zu welchem Zeitpunkt t ist diese erreicht und in welchen Positionen befinden sich dann die Flugzeuge?
(c) Der minimale Abstand der Flugrouten beträgt ungefähr 0.49 und ist geringer als der in (a) berechnete Abstand. Begründen Sie dies.

Literatur

[1.1] Berg/Bungartz/Löcherbach, Lineare Algebra/Geometrie - Kursheft für Grund- und Leistungskurse (Entwurf), Seite 92/93, Bonn 1984

[1.2] Griesel/Postel (Hrsg.), Mathematik heute - Leistungskurs Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Seite 128-135, Hannover 1986

[1.3] Herfort/Reinhardt/Schuster, Geometrie und lineare Algebra - MG3 - Analytische Geometrie, MATHEMATIK Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II, Seite 65-70, Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, Tübingen 1984

[1.4] Trinkaus, Probleme? Höhere Mathematik - Eine Aufgabensammlung zur Analysis, Vektor- und Matrizenrechnung, Seite 112-120, Heidelberg 1988

Kurzkommentar zur Literatur

In den gängigen Lehrbüchern zur Analytischen Geometrie in der SII findet man nur vereinzelt Anwendungsaufgaben, die über den engen Kontext des gerade behandelten Inhalts hinausgehen. In [1.1] wird dies in größerem Umfang versucht, hieraus stammt auch die Anregung für die einführende Aufgabe in diesem Beispiel. Leider liegt das Kursheft nur in einer Entwurfsfassung vor. Das Lehrbuch [1.2] steht stellvertretend für die vielen anderen Lehrbücher, in denen man einzelne Aufgaben finden kann, die sich zu einer komplexeren Problemstellung ausbauen lassen, etwa wie in der Zusatzaufgabe. Weitere schöne Aufgaben findet man in dem Studienbrief [1.3] und der Problemsammlung [1.4]. Beide Werke sind für die Hand des Studenten oder des Lehrers geschrieben, können aber ohne Probleme auch von Schülerinnen und Schülern der SII im Rahmen von Referaten oder kleiner Projekte benutzt werden.