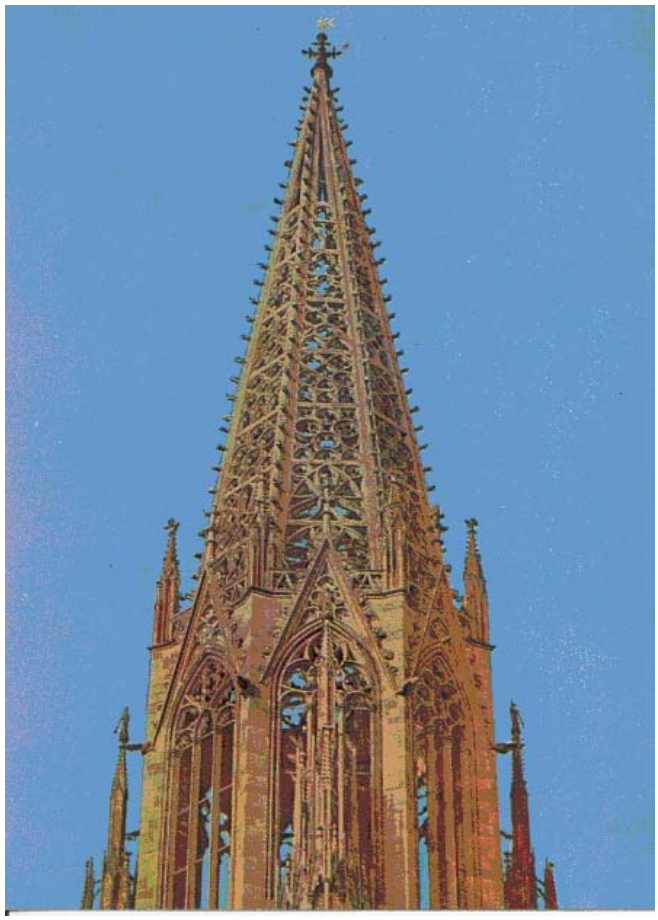
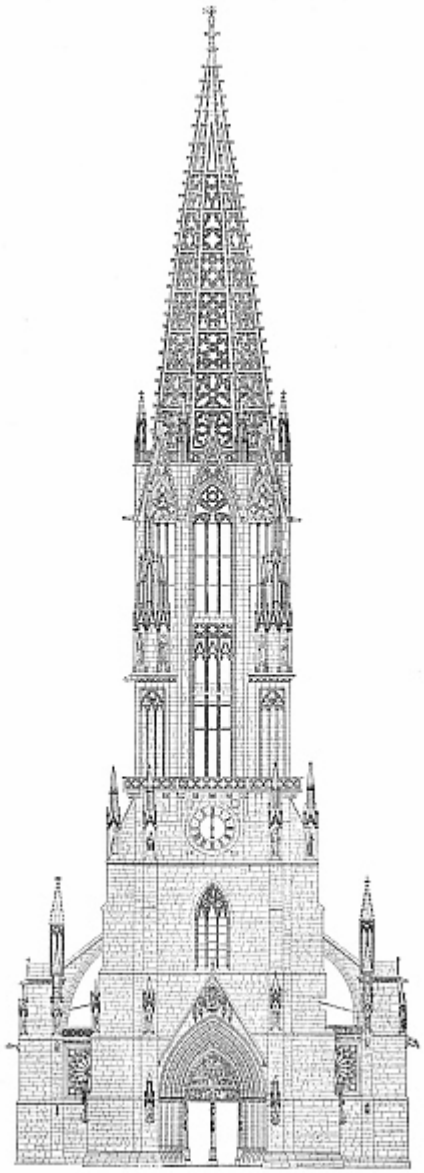
Der goldene Schnitt und die Formel von Binet



Das Freiburger Münster



Aufgabe 1

Bestimme Helmhöhe, Resthöhe und Gesamthöhe in der Abbildung des Freiburger Münsters.

Bestätige, dass näherungsweise gilt:

Resthöhe : Helmhöhe = Gesamthöhe : Resthöhe

Im Parthenontempel in Athen (erbaut etwa um 430 v.Chr.) verhält sich die Höhe bis zum Dach zur Höhe der Säulen wie der goldene Schnitt. Das führt zu der Vermutung, dass die Griechen den goldenen Schnitt bei der Konstruktion ihrer Bauten verwendet haben. Erst sehr viel später findet man den Goldenen Schnitt in der Literatur erwähnt.
Lucas Pacioli schrieb in „Divina proportione“ über den goldenen Schnitt:

Die Strecke AB wird vom Punkt T im Verhältnis τ des goldenen Schnitts geteilt, falls sich die größere Teilstrecke zur kleineren so verhält, wie die Gesamtstrecke zum größeren Teil, d.h.: $\frac{AT}{TB} = \frac{AB}{AT}$.

Lucas Pacioli (1445-1517)

Pacioli beeinflusste mit seiner Arbeit das Werk von Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer.

Leonardo da Vinci (1452-1519) Mona Lisa

Die Mona Lisa von Leonardo da Vinci ist auf einem gleichschenkligen Dreieck aufgebaut, dessen Schenkel sich zur Basis nach dem goldenen Schnitt verhalten.

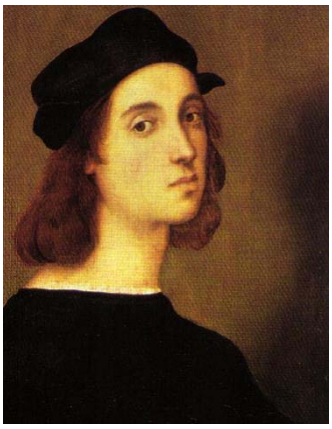
"Triumph der Galatea" von Raffael (um 1511):

Das Gemälde besteht aus zwei Teilen:

Der Himmel mit Amor und den anderen Engelchen, die Nymphe und die Fabelwesen auf dem Meer. Trennt man die „himmlische Welt“ von der „irdischen Welt“ auf Höhe der Stirnlocke der Galatea, so wird das Bild im goldenen Schnitt geteilt.

Aufgabe 2

Weise diese Eigenschaft durch Abmessen im Bild nach



Raffael (1483-1520), italienischer Maler und Baumeister, mit Michelangelo und Leonardo da Vinci einer der bekanntesten Repräsentanten der Hochrenaissance

Das Teilverhältnis τ des goldenen Schnitts bestimmt sich aus den genannten Bedingungen wie folgt:

$$\tau = \frac{m}{n} = \frac{m+n}{m} = 1 + \frac{n}{m} = 1 + \frac{1}{\tau};\ \tau = 1 + \frac{1}{\tau};\ \tau^2 - \tau - 1 = 0\ .$$

Aufgabe 3

Berechne die Lösungen dieser Gleichung.

Eine der Lösungen ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Diese Zahl wird meist mit Φ bezeichnet.

Aufgabe 4

Bilde die Folge ϕ^n der Potenzen der Zahl Φ . Was ist zu beobachten?

Aufgabe 5

Die Auflistung der Potenzen von Φ führt zu dem Verdacht, dass die Summe aufeinanderfolgender Potenzen die nächstfolgende Potenz ergeben, d.h., dass die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ die Eigenschaft $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ besitzt. Zeige dies durch Rechnung

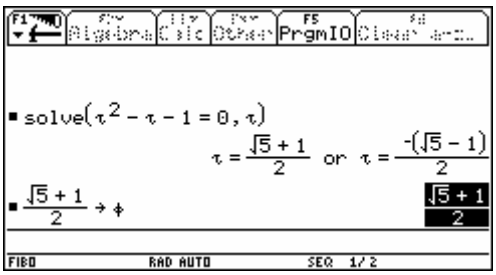
(Diese Eigenschaft ergibt sich natürlich auch direkt aus $\Phi^2 = \Phi + 1$ durch Multiplikation mit Φ^{n-2}.)

Aufgabe 6

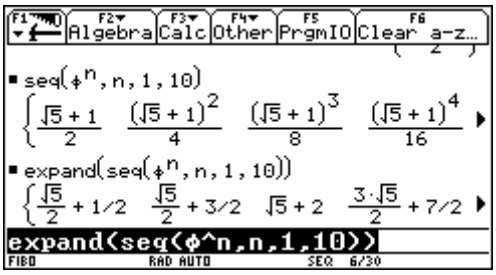
Berechne $\frac{1}{\Phi}$. Was fällt auf?

Lösungsvorschläge für die Aufgaben 3-6 mit dem TI-92

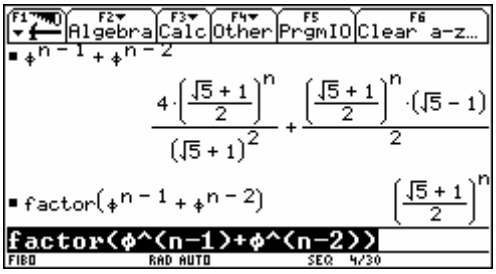
zu 3.



zu 4.



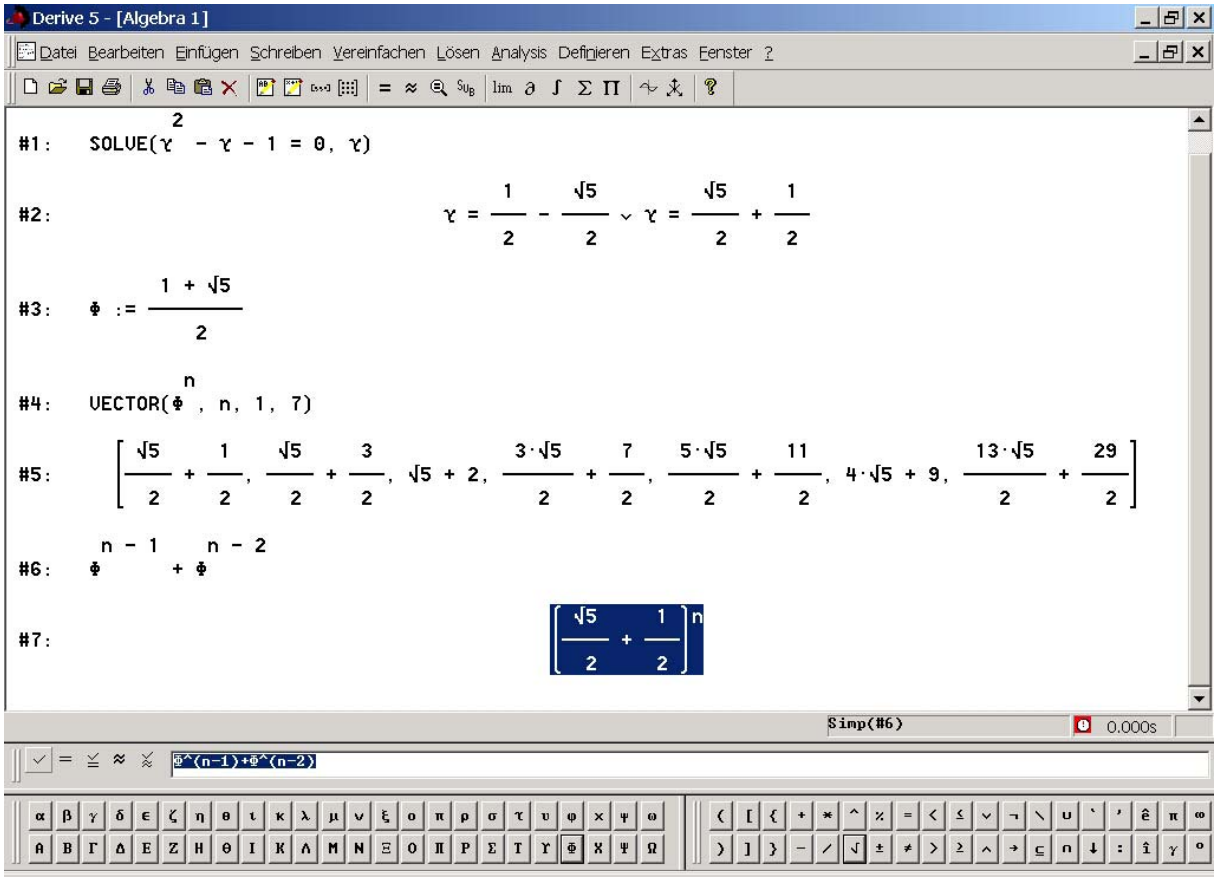
zu 5.



zu 6.

Es handelt sich um die zweite Lösung der Gleichung $\tau^2 - \tau - 1 = 0$.

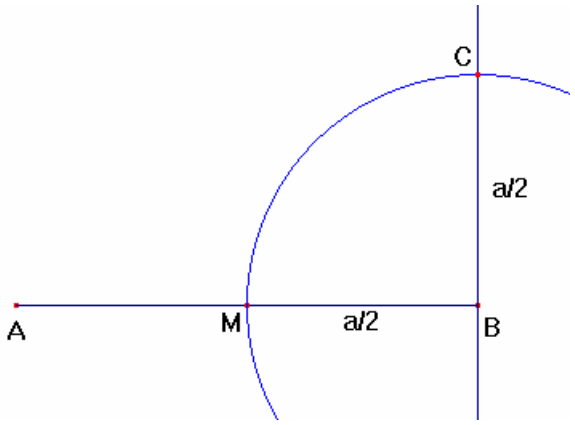
Lösung der Aufgaben 3-6 mit DERIVE:



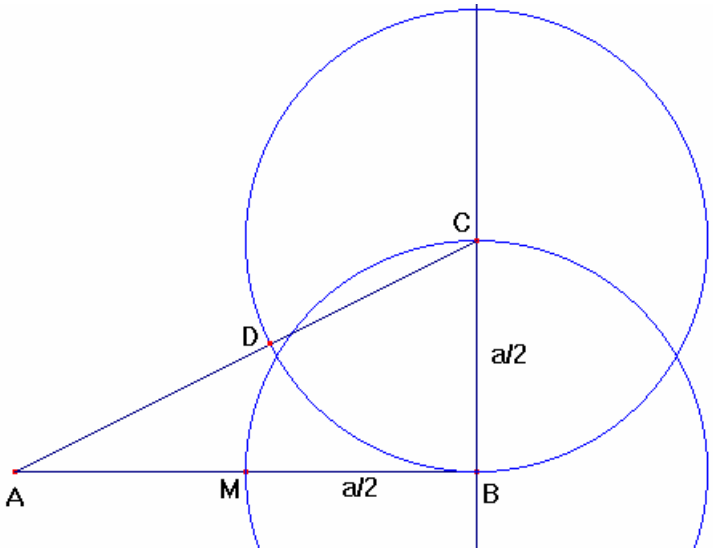
Konstruktionen zum goldenen Schnitt

1. Gesucht ist ein Punkt S, der die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt.
2. Gegeben ist die Strecke PQ=a. Konstruiere eine Strecke der Länge aΦ.

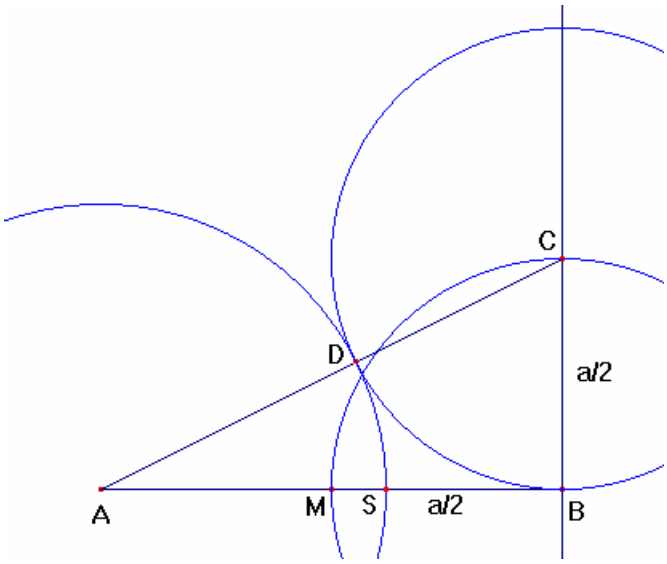
zu 1.
Mit M wird der Mittelpunkt von AB bezeichnet.
Schlage einen Kreis um B durch den Punkt M.
Errichte das Lot zu AB in B.
Der Schnittpunkt des Lotes mit dem Kreis ist C.



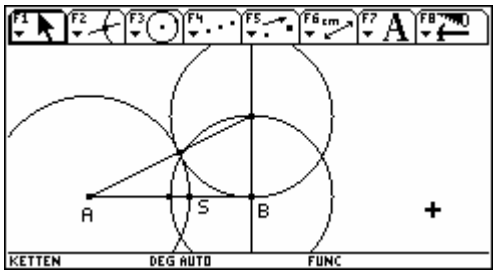
Zeichne die Strecke AC.
Schlage um C einen Kreis mit Radius MB.
Der Schnittpunkt der Strecke AC mit diesem Kreis ist D.



Schlage einen Kreis um A mit dem Radius AD.
Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Strecke AB ist S.



Konstruktion mit dem TI-92:



Beh: Der Punkt S teilt AB im goldenen Schnitt.

Bew:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$AC = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

$$AS = AD = AC - CD = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

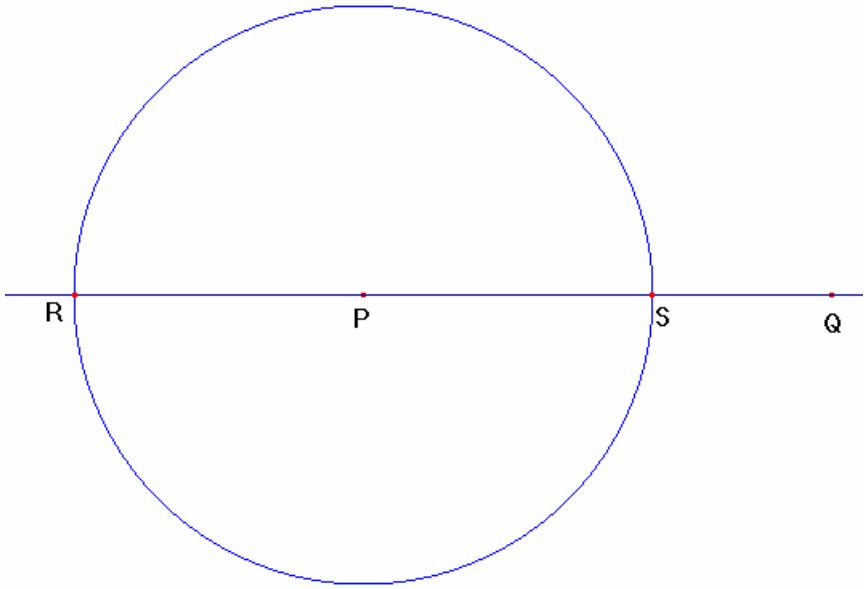
Nebenrechnung:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Also ist $AS = \frac{a}{\Phi}$, d.h. $\frac{AB}{AS} = \frac{a}{a/\Phi} = \Phi$, d.h. S teilt die Strecke AB im goldenen Schnitt.

zu 2.

Konstruiere (wie unter 1.) den Punkt S, der die Strecke PQ im goldenen Schnitt teilt. Der Kreis um P mit Radius PS schneidet die Gerade durch P und Q im Punkt R.



Beh.: $RQ = a\Phi$

Bew.:

$RP=PS=PQ/\Phi=a/\Phi$

$RQ = RP + PQ = a/\Phi + a = a(1/\Phi + 1) = a\Phi$

Nebenrechnung:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \Big| \bullet \frac{1}{\Phi}$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Das reguläre Fünfeck

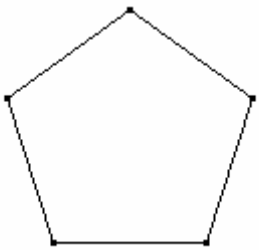
Ein n-Eck heißt regulär, wenn alle seine Seiten die gleiche Länge haben und alle Innenwinkel gleich groß sind. So sind z.B. die Quadrate die regulären Vierecke.
Interessante Eigenschaften besitzt das reguläre Fünfeck (Pentagon). Diesem begegnet man auch in nicht mathematischen Zusammenhängen:

Pentagon: Gebäude des amerikanischen Verteidigungsministeriums

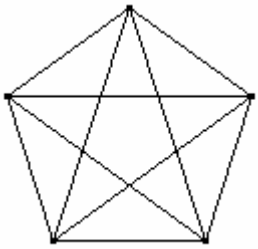
Felge mit regulärem Fünfeck

In M.C. Eschers Lithographie Reptilien (1943) klettern reptilienartige Tiere, die sich aus einem Mosaik lösen, über verschiedene Gegenstände auf einem Tisch, um schließlich wieder in das Mosaik zurückzukehren. "Höhepunkt" der Reptilientour ist die Besteigung eines Körpers, der sich aus lauter regulären Fünfecken, insgesamt 12 Stück, zusammensetzt, einem Dodekaeder.

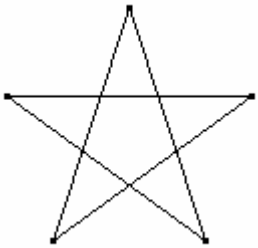
Zeichnet man in einem regulären Fünfeck (Pentagon) alle Diagonalen ein, so ergibt sich ein Pentagramm, auch Drudenfuß genannt. Das Pentagramm wurde als mystisches Zeichen verwendet. Die Pythagoräer benutzten es als Erkennungszeichen für die Mitglieder ihrer Bruderschaft. Im Mittelalter sollten Pentagramme Hexen von Viehställen, Türschwellen, Wiegen und Betten fernhalten. Auf diese Vorstellungen bezieht sich Goethe in seinem Faust. Mephisto kann das Studierzimmer nicht verlassen, da er durch das Pentagramm gebannt ist.



Pentagon



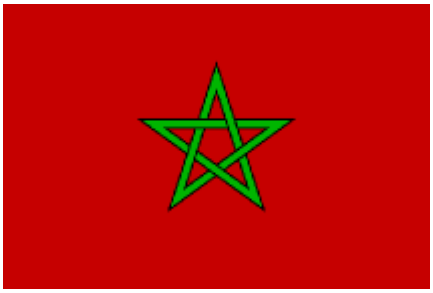
Pentagon mit Diagonalen



Pentagramm

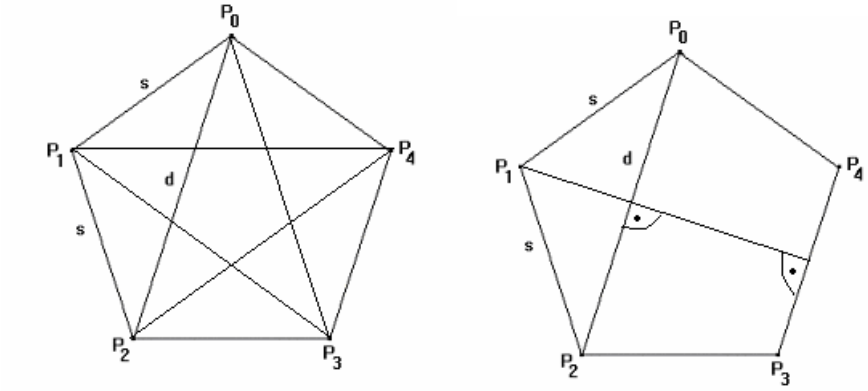
Mephistopheles
Wir wollen wirklich uns besinnen,
Die nächsten Male mehr davon!
Dürft' ich wohl diesmal mich entfernen?
Faust
Ich sehe nicht, warum du fragst, ...
Mephistopheles
Gesteh ich's nur! daß ich hinausspaziere.
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle -
Faust
Das Pentagramma macht dir Pein?

Auch heute ist das Pentagramm noch weit verbreitet.
Eine Reihe von Nationalflaggen (z.B. Marokko) enthält dieses Zeichen:



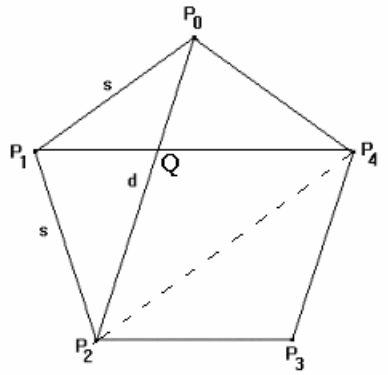
Auch die Biermarke Heineken schmückt sich mit einem Pentagramm:

Beh 1: Jede Seite ist parallel zur gegenüberliegenden Diagonalen



Bew: Das Lot von P_1 auf P_3P_4 ist eine Symmetrieachse des Fünfecks. Daher steht dieses Lot senkrecht auf P_3P_4 und auf P_0P_2 . Also sind P_3P_4 und P_0P_2 parallel.

Beh 2: Zwei Diagonalen teilen einander im goldenen Schnitt



Bew: Mit dem Strahlensatz folgt: $\dfrac{QP_2}{QP_0} = \dfrac{P_2P_4}{P_0P_1}$

Es ist $P_0P_1 = P_3P_4$ und $P_2P_4 = P_0P_2$

Damit: $\dfrac{QP_2}{QP_0} = \dfrac{P_0P_2}{P_3P_4}$

Da $QP_2P_3P_4$ ein Parallelogramm ist gilt: $P_3P_4 = QP_2$

Also: $\dfrac{QP_2}{QP_0} = \dfrac{P_0P_2}{QP_2}$, d.h. Q teilt die Diagonale P_0P_2 im goldenen Schnitt

Beh 3: Das Verhältnis Diagonale d zu Seite s ist Φ.

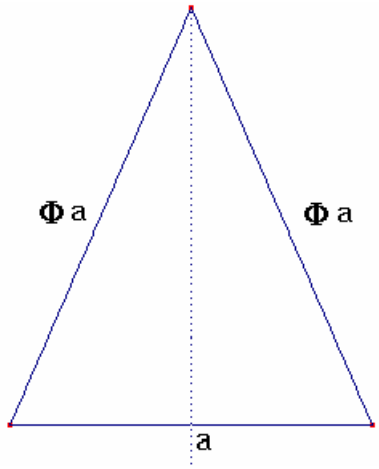
Bew: Es ist $\dfrac{P_0P_2}{QP_2} = \Phi$ (siehe 2.)

Wegen $QP_2 = P_3P_4$ folgt: $P_0P_2 = \Phi\, P_3P_4$

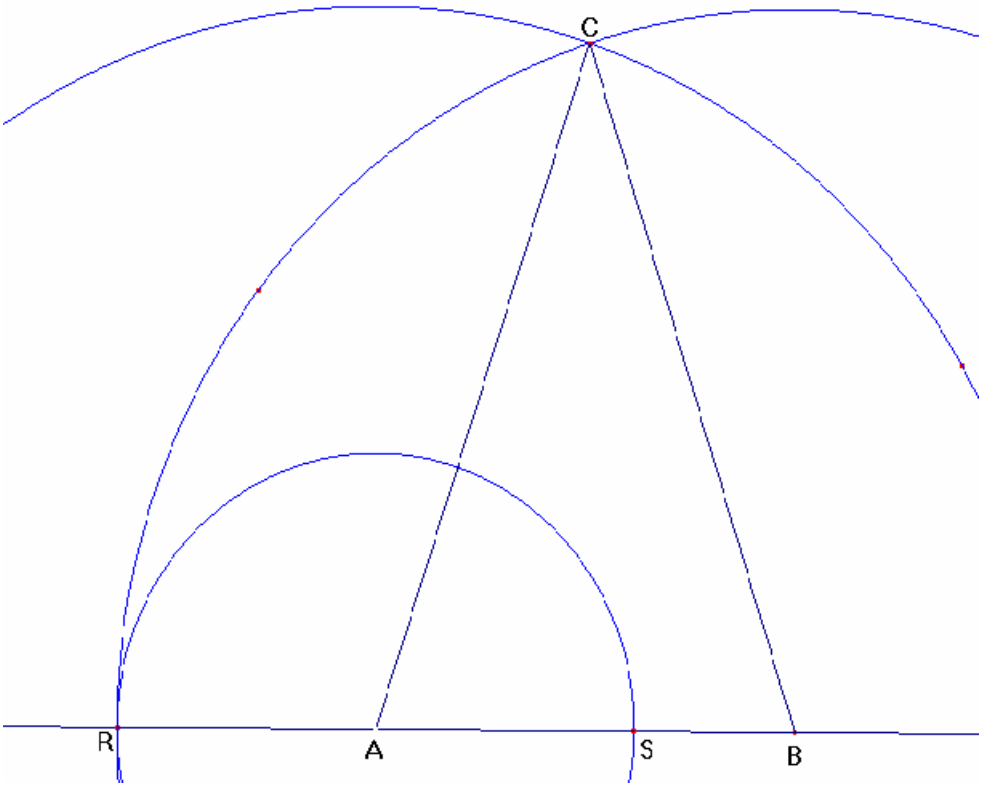
In einem regulären Fünfeck ist das Verhältnis der Diagonale d zur Seite s gleich dem goldenen Schnitt: $\dfrac{d}{s} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Konstruktion des regulären Fünfecks

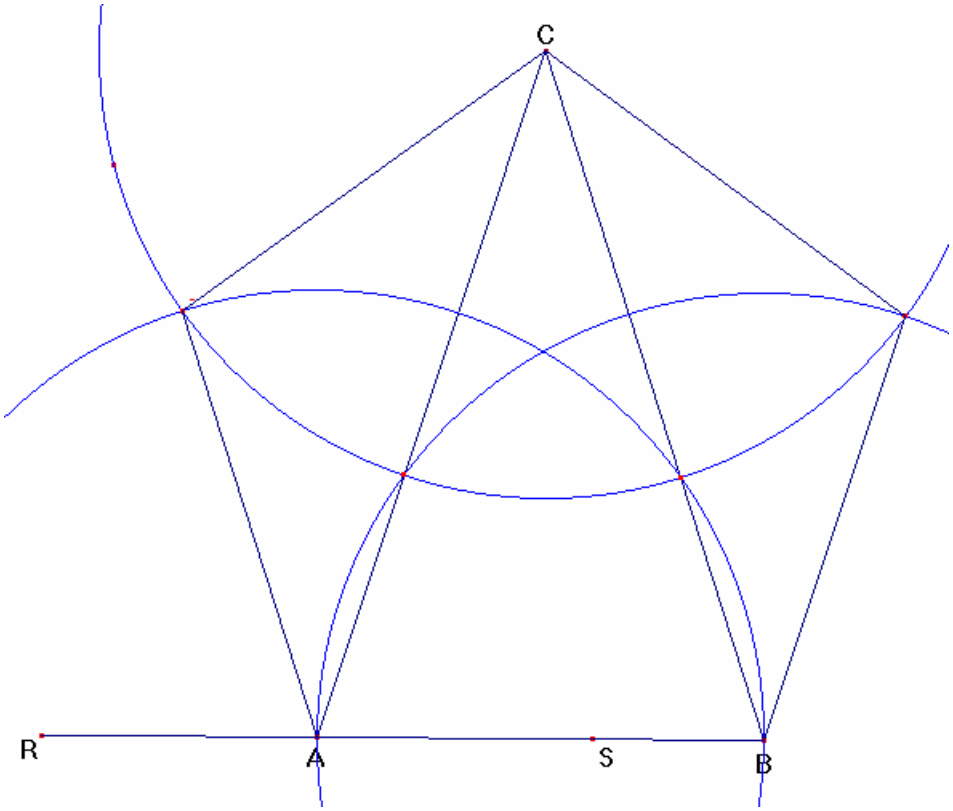
Ein Dreieck heißt golden, falls es gleichschenklig ist und sich die Länge eines Schenkels zur Grundseite wie Φ : 1 verhält.



Konstruktion eines goldenen Dreiecks:
Zeichne die Strecke AB.
Konstruiere den Punkt S, der AB im goldenen Schnitt teilt.
Schlage um A einen Kreis mit Radius AS. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden g(A,B) ist R.
Es ist RB = Φ AB.
Schlage um A und B je einen Kreis mit dem Radius RB. Der Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist die 3. Ecke C des goldenen Dreiecks.



Zur Konstruktion eines regulären Fünfecks mit der Seite AB = a:
Konstruiere das goldene Dreieck ABC. Schlage um A, B und C je einen Kreis mit Radius a.
Die Schnittpunkte der Kreise sind die gesuchten Eckpunkte.



Castel del Monte

Apulien liegt im Südosten des italienischen Stiefels. Zu den größten Anziehungspunkten der Region gehören die romanischen Kathedralen und Burgen aus der Zeit Friedrichs II.

Regionaler und nationaler Tourismus haben sich zu einem bedeutenden Wirtschaftsfaktor entwickelt. Der internationale Tourismus steckt allerdings noch in den Kinderschuhen.

Das Castel del Monte liegt in Apulien zwischen Bari und Foggia, bei der kleinen Stadt Andria südlich von Barletta. Es strahlt in seiner erhabenen abgeschiedenen Position neben seiner bemerkenswerten Schönheit auch eine große Mystik aus. Erbaut wurde es auf einem 540 m hohen Hügel etwa um 1240 n.Chr. von Kaiser Friedrich II, dem Staufer.

Castel del Monte

Blick vom Inneren des Kastells nach oben

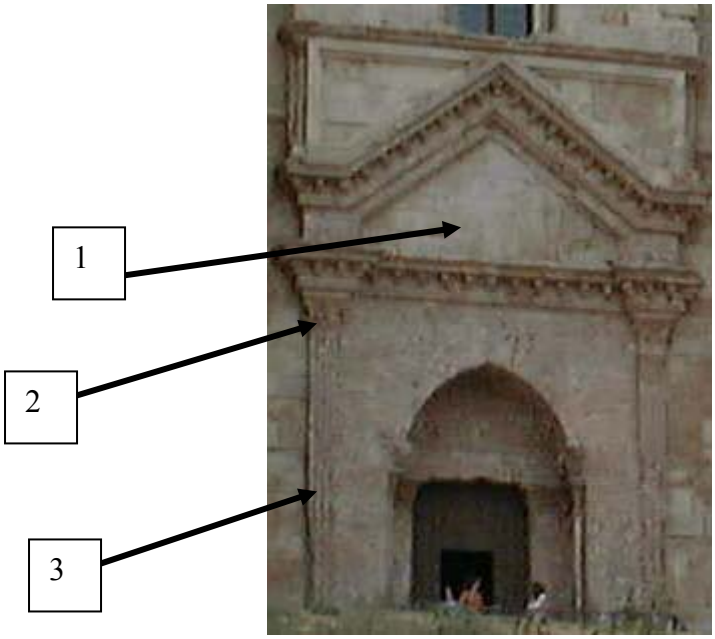
Zur Welt gekommen war Friedrich 1194 in Jesi in den Marken. Er war der Sohn Heinrichs VI. und der Konstanze, der Tochter Rogers II. von Sizilien. Friedrich war 1215 in Aachen zum deutschen König und 1220 in Rom zum Kaiser gekrönt worden.

Kaiser Friedrich II. (1194-1250), der Staufer, "stupor mundi" (das "Staunen der Welt")

Als der Kaiser 1250 verstarb, war das Urteil der Zeitgenossen über ihn gespalten: Die einen nannten ihn "stupor mundi" - das Staunen der Welt, die anderen sprachen vom "Hammer der Kirche" und sahen in ihm den Antichrist. Die Faszination, die von der Persönlichkeit des Stauferkaisers ausging, war damals schon zu spüren. Einerseits wurde bewundert, wie "modern" Friedrich sein Königreich Sizilien aufgebaut und verwaltet hatte, zum anderen bestachen seine umfassende Bildung und seine weiten Interessengebiete. Friedrich war selbst an den Naturwissenschaften, der Mathematik und Philosophie interessiert und gründete 1224 in Neapel die erste Universität Europas. Mit dem Schreiben des "Falkenbuchs" betätigte er sich als Forscher und Wissenschaftler. An seinem Hof versammelte er die bedeutenden Dichter und Gelehrten seiner Zeit (z.B. auch Leonardo Fibonacci). Von dem Anspruch und der Größe seiner Herrschaft künden heute vor allem die uns bekannten bzw. auf uns überkommenen Bauten Friedrichs wie das Brückentor in Capua - der Eingang in sein Südreich - oder das in seiner Zweckbestimmung rätselhafte Castel del Monte

Der Herrscher war ein Mensch mit vielseitigen Interessen und Begabungen. Um ihn versammelten sich die besten Wissenschaftler und Künstler jener Zeit. Man muss das Kastell, wohl als "steinernes Buch" lesen, welches voller Anspielungen auf astronomische, geometrische und mathematische Zusammenhänge steckt.

Das Portal

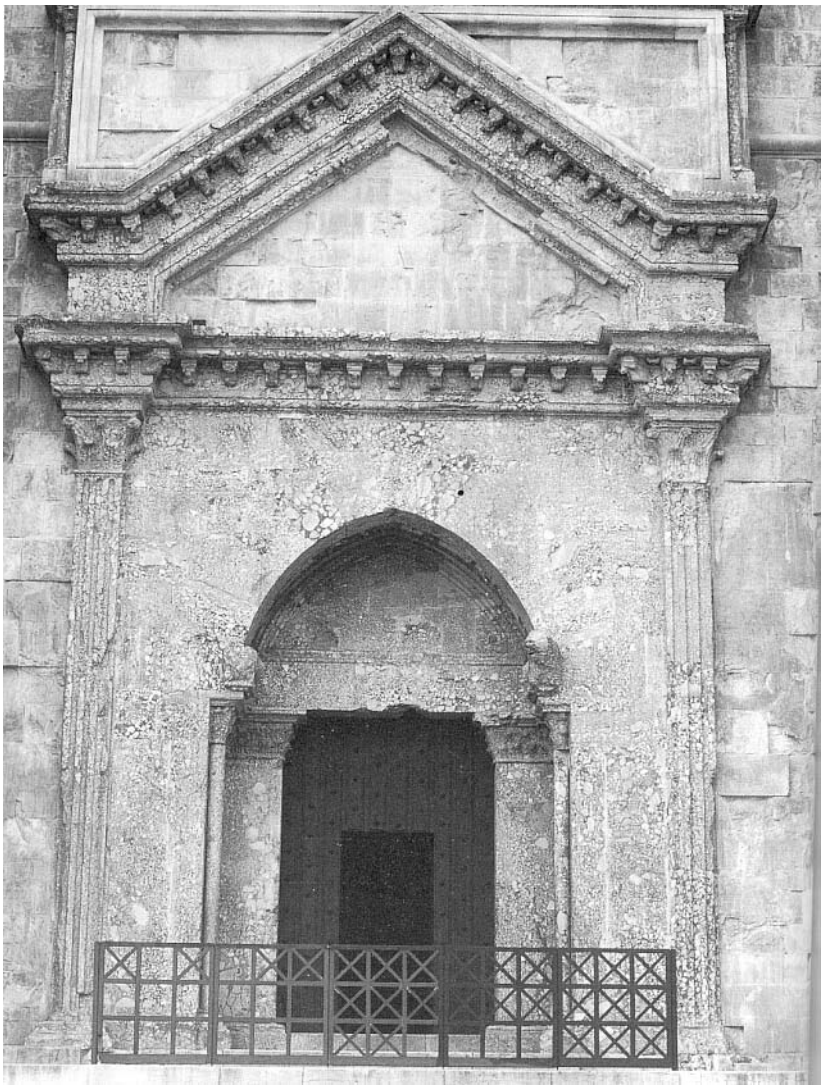


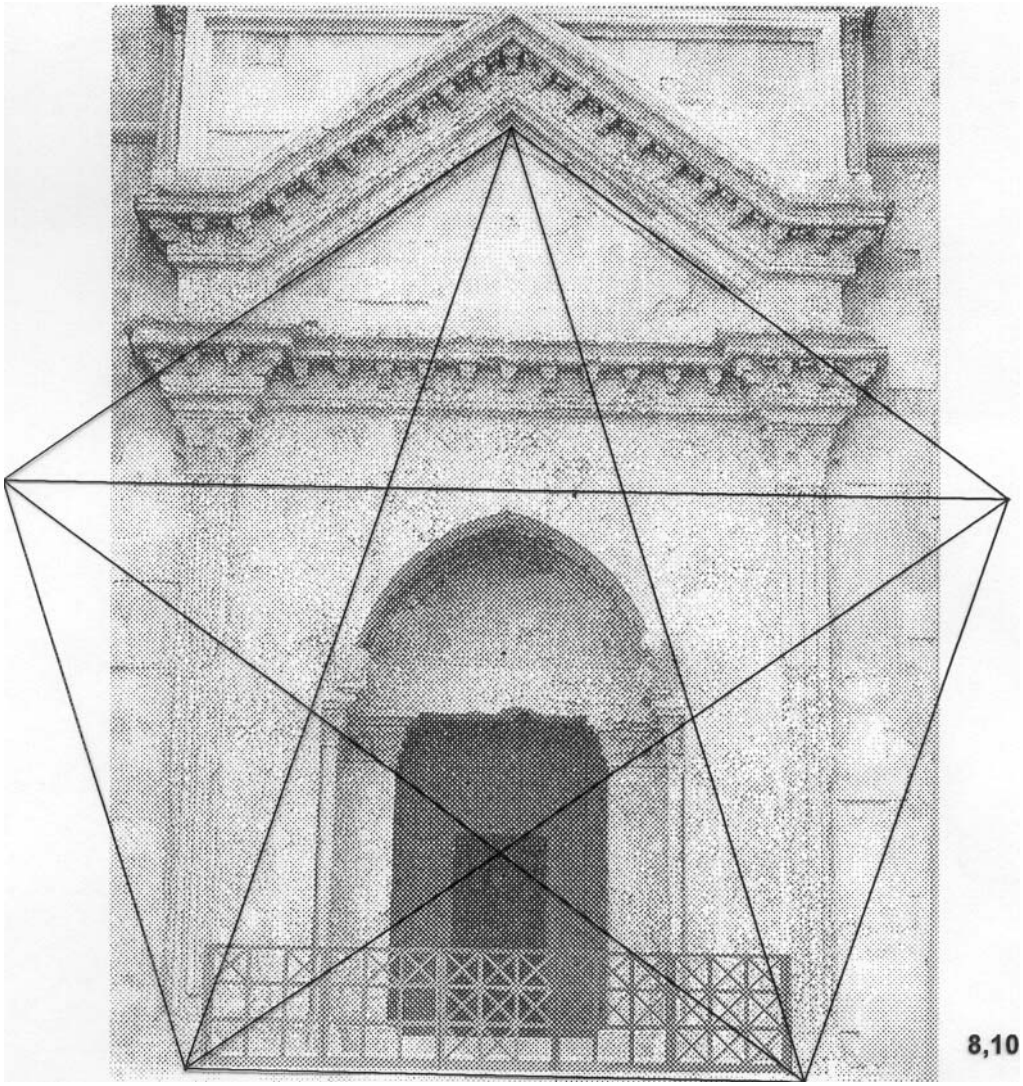
1. **Tympanon**: dreieckiges Giebelfeld

2. **Kapitell**: Verbindungsstück zwischen Säule und Gebälk.

3. **Lisenen**: Scheinsäulen

Konstruiere ein reguläres Fünfeck so, dass zwei Eckpunkte auf die Mitte der Sockel der Lisenen am Boden fallen. Zeichne dann die Diagonalen des Fünfecks ein. Was kann man beobachten?





Beobachtungen

Die oberste Ecke des Fünfecks fällt mit der Spitze des Tympanons zusammen.

Die Lisenen enden dort wo die waagrechte Diagonale des Fünfecks verläuft.

Es gibt eine Reihe weiterer Merkmale im Aufbau dieses Portals die jedoch recht spekulativ sind und hier nicht berücksichtigt werden.

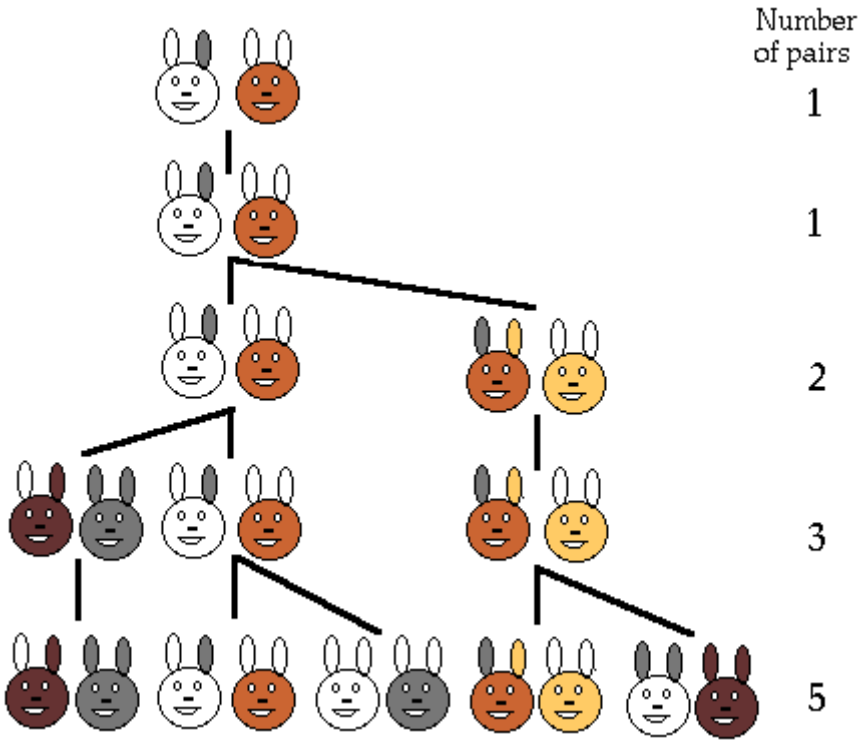
Fibonacci Folgen und die Formel von Binet

Eine Folge a_n mit dem Bildungsgesetz $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ nennt man eine Fibonacci-Folge.

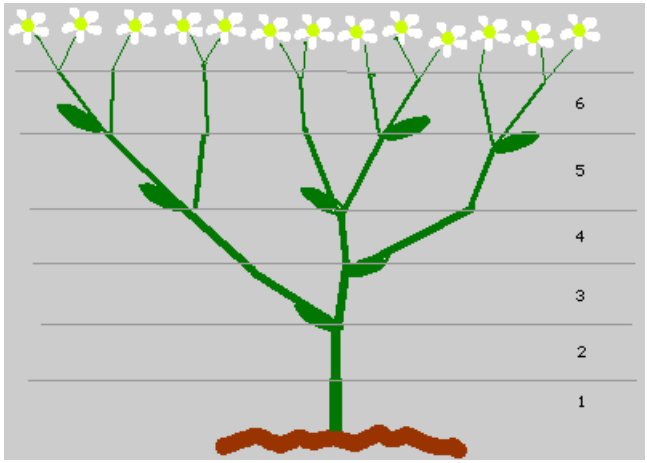
Leonardo Fibonacci 1170-1250

Von Leonardo von Pisa, Sohn des Bonacci (und deshalb als „Fibonacci“, filius Bonacci bekannt) stammt folgendes Problem:

Ein junges Kaninchenpaar wird in ein Gehege gebracht und bringt vom 2. Lebensmonat an jeden Monat ein Kaninchenpaar zur Welt. die neuen Kaninchen vermehren sich genauso (vgl. Abbildung). Wieviele Kaninchenpaare befinden sich zu Beginn des n-ten Monats im Gehege, vorausgesetzt, kein Kaninchen stirbt?



Monat n	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl a_n der Paare zu Beginn des Monats	1	1	2	3	5	6	13



Manche Pflanzen wachsen wie die hier abgebildete und zeigen in ihrem Erscheinungsbild die Fibonacci-Zahlen. Ein Beispiel dafür bildet die Sumpfschafgarbe (Achillea ptarmica)

Für die Folge a_n gilt die Rekursionformel $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für n>2.
Eine Folge mit diesem Bildungsgesetz heißt Fibonacci-Folge. Eine Fibonacci-Folgen ist durch die Angabe der ersten beiden Folgenglieder festgelegt. Schwierig ist die Angabe einer expliziten Formel für eine Fibonacci-Folge. Von Binet (1786-1856) stammt eine explizite Formel für die oben angegebene Folge a_n.

Jacques Philippe MarieBinet

Wegen der Eigenschaft $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$ der Zahl Φ ist die Folge $f_n = \Phi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ eine Fibonacci-Folge. (Damit ist f_n zugleich eine geometrische und eine Fibonacci-Folge.)

Die zweite Lösung der Gleichung $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ ist $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da auch diese Zahl die Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$ erfüllt, ist die Folge $g_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ebenfalls eine Fibonacci-Folge.

Aufgabe 7

Stelle für die Folgen f_n und g_n eine Wertetafel auf, in der die Klammernausdrücke $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ und $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ in Summen entwickelt sind.

Aufgabe 8

Sieht man die Darstellungen der Folgen f und g an, so erscheint es interessant, die Summen- bzw Differenzenfolge von f und g zu bilden. Führe dies durch.

Aufgabe 9

Aufgabe 8 lässt vermuten, dass f+g und f-g Fibonacci-Folgen sind wenn f und g dies sind.

9.1. Beweise: Die Summenfolge zweier Fibonaccifolgen ist eine Fibonaccifolge.

9.2. Multipliziert man alle Glieder einer Fibonaccifolge mit derselben Zahl, so erhält man wieder eine Fibonaccifolge.

Folgerung aus Aufgabe 9:

Die Folge f-g ist eine Fibonacci-Folge und stimmt bis auf die Faktoren $\sqrt{5}$ mit der Folge 1,1,2,3,5,8,... überein. Da eine Fibonacci-Folge durch die Angabe der ersten beiden Folgenglieder festgelegt ist gilt:

Die Folge $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ ist gleich der Folge 1,1,2,3,5,8,...

Aufgabe 10

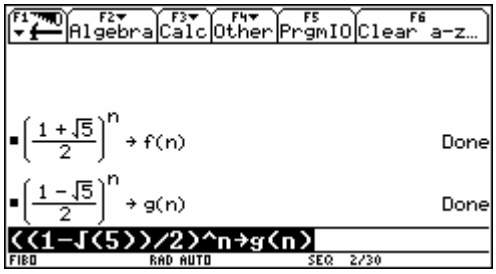
Berechne die ersten 10 Folgenglieder der Folge $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ und zeige, dass sich die Folge 1,1,2,3,5,8,...ergibt.

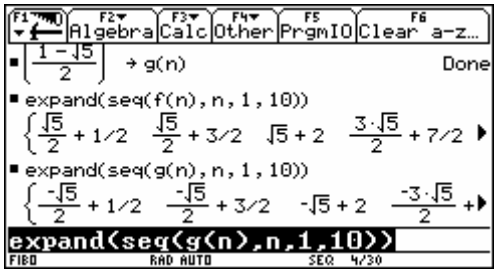
Aufgabe 11

Untersuche, wo im Pascalschen Dreieck die Fibonacci-Zahlen auftreten. Versuche eine Formel aufzustellen, die einen Zusammenhang zwischen Binomialkoeffizienten und Fibonacci-Zahlen herstellt. (Hinweis: Diagonalen betrachten)

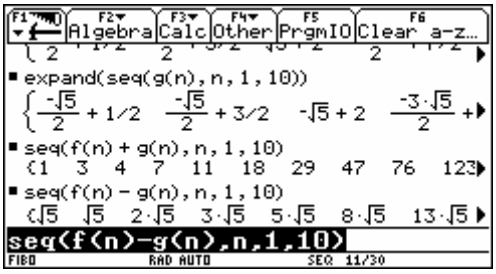
```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10  5  1
1  6 15 20 15  6 1
```

zu 7.





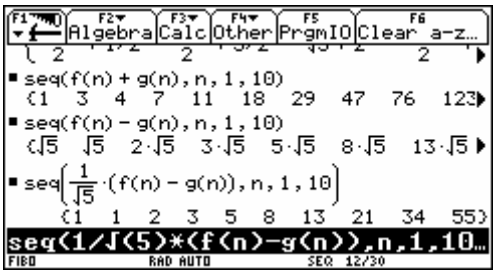
zu 8.



zu 9.1. $c_n = a_n + b_n = (a_{n-1} + a_{n-2}) + (b_{n-1} + b_{n-2}) = (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_{n-2} + b_{n-2}) =$
$= c_{n-1} + c_{n-2}$

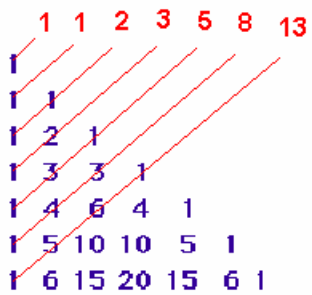
zu 9.2. $c_n = ka_n = k(a_{n-1} + a_{n-2}) = ka_{n-1} + ka_{n-2} = c_{n-1} + c_{n-2}$

zu 10.



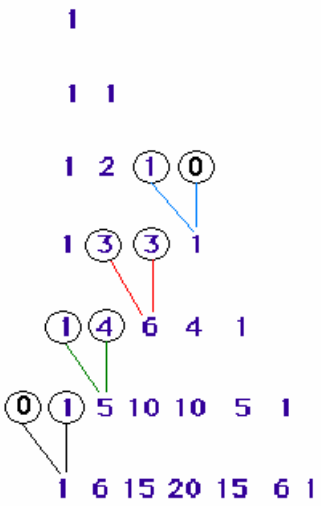
zu 11.

Summiert man längs der eingezeichneten Diagonalen auf, so ergeben sich die Fibonacci-Zahlen.



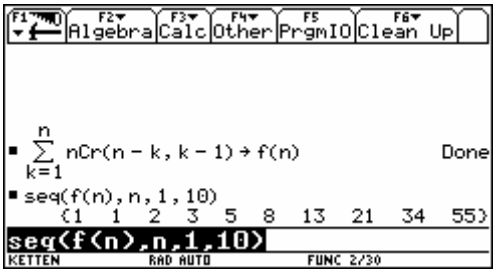
$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$$

Erklärung für diesen Sachverhalt:

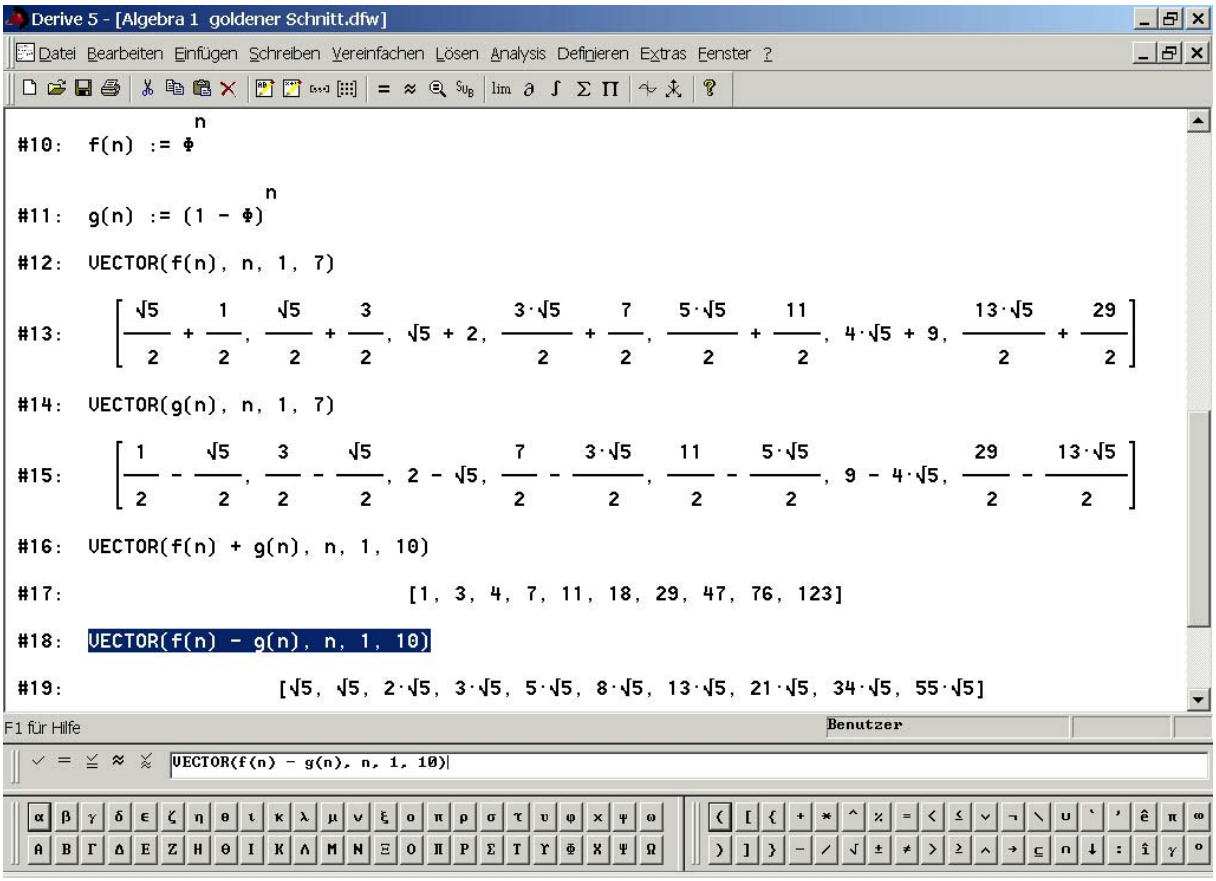


Die Abbildung zeigt, dass die Diagonale 1 5 6 1 sich als Summe der beiden darüberliegenden Diagonalen ergibt. Das ist aber genau die Eigenschaft welche die Fibonacci-Zahlen besitzen. Da die beiden ersten Diagonalensummen beide 1 sind ergibt sich daraus die Folge der Fibonacci-Zahlen.

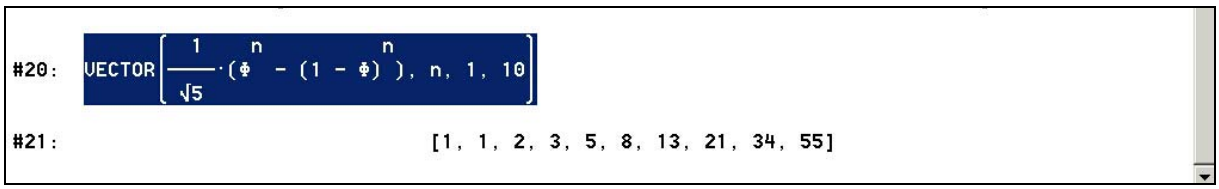
zu 11.



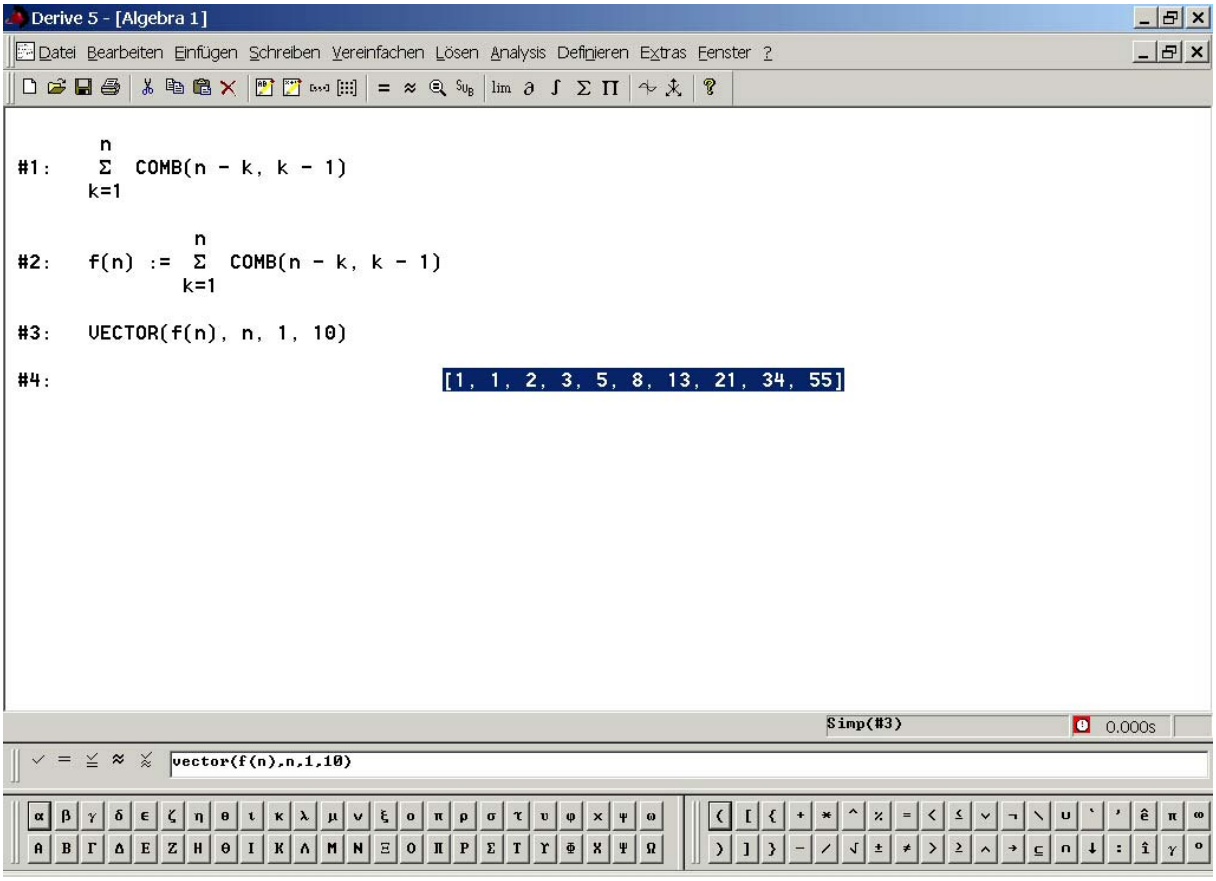
Bearbeitung mit DERIVE
zu 7-9.



zu 10.



zu 11.


Derive 5 - [Algebra 1]
Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?
#1: Σ(k=1 to n) COMB(n - k, k - 1)
#2: f(n) := Σ(k=1 to n) COMB(n - k, k - 1)
#3: VECTOR(f(n), n, 1, 10)
#4: [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]
Simp(#3)
0.000s
vector(f(n),n,1,10)

Kettenbrüche

Da Φ eine Lösung der Gleichung $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ bzw. $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ ist gilt:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Verwendet man diese Beziehung fortlaufend, so ergibt sich:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} \text{...usw.}$$

Ein Ausdruck dieser Form heißt Kettenbruch. Im vorliegenden Fall handelt es sich aufgrund des Konstruktionsprozesses um einen nichtabbrechenden Kettenbruch.
Jede reelle Zahl x kann nach dem unten dargestellten Verfahren in einen Kettenbruch der Form $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}}$ entwickelt werden. Für die Darstellung des Kettenbruchs ist auch die Schreibweise $x = [a_o , a_1 , a_2 ,...]$ üblich.

1. $a_0 = [x]$

2. $x - a_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{b_1}}$; $\quad \frac{1}{x - a_0} = a_1 + \frac{1}{b_1}$; $\quad a_1 = \left[\frac{1}{x - a_0}\right]$

3. $\frac{1}{x - a_0} - a_1 = \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{b_2}}$; $\quad \frac{1}{\frac{1}{x - a_0} - a_1} = a_2 + \frac{1}{b_2}$; $\quad a_2 = \left[\frac{1}{\frac{1}{x - a_0} - a_1}\right]$

usw.

Zusammenfassung:

1. $a_0 = [r_0] \text{ mit } r_0 = x$

2. $a_1 = \left[\frac{1}{r_0 - a_0}\right] = [r_1] \text{ mit } r_1 = \frac{1}{r_0 - a_0}$

3. $a_2 = \left[\frac{1}{r_1 - a_1}\right] = [r_2] \text{ mit } r_2 = \frac{1}{r_1 - a_1}$

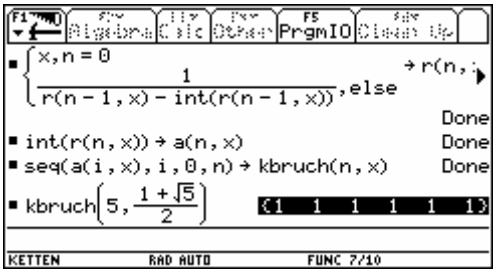
usw., d.h. es gilt die folgende Rekursionsformel für die Bestimmung der Zahlen a_n :

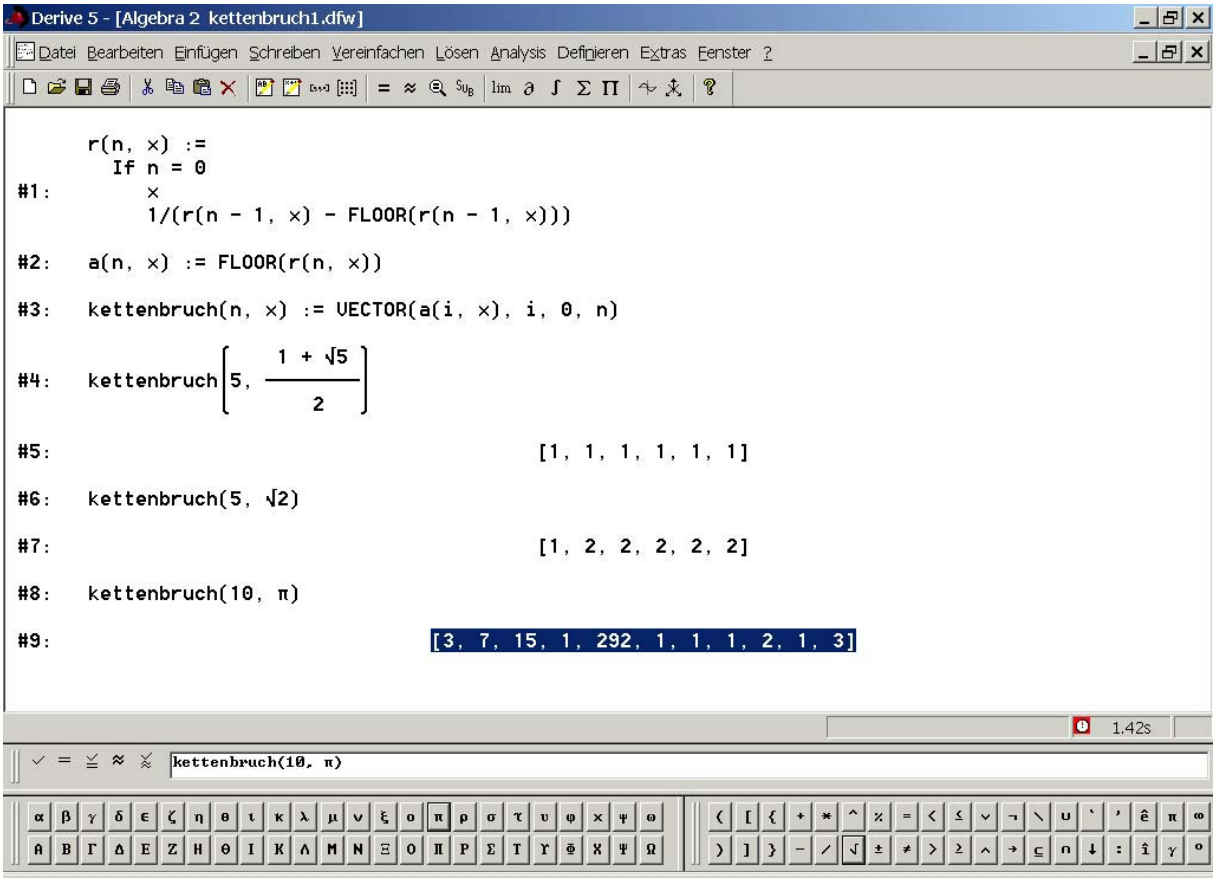
$$a_n = [r_n] \text{ mit } r_n = \begin{cases} x & \text{falls } n = 0 \\ \frac{1}{r_{n-1} - a_{n-1}} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 12

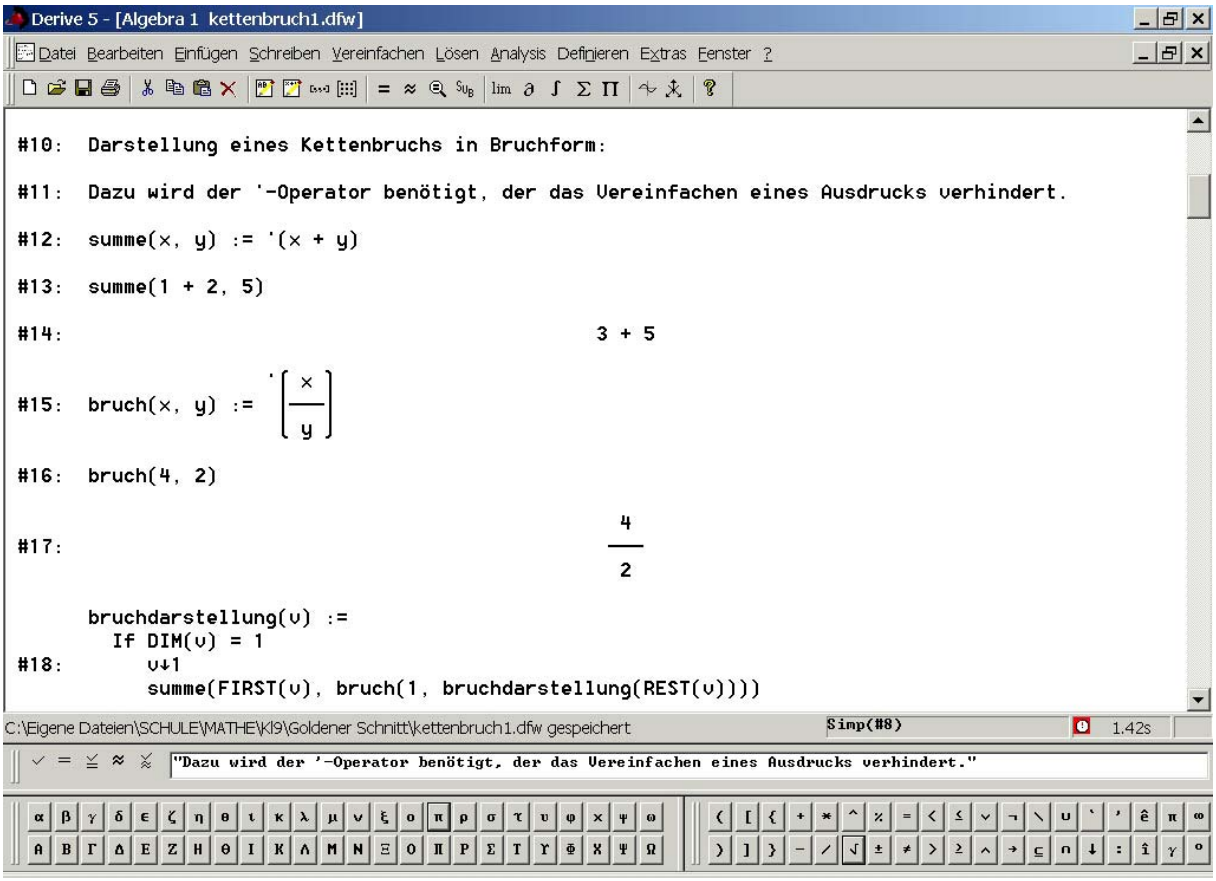
Schreibe Funktionen, mit denen in einem CAS Zahlen in Kettenbrüche entwickelt werden können.

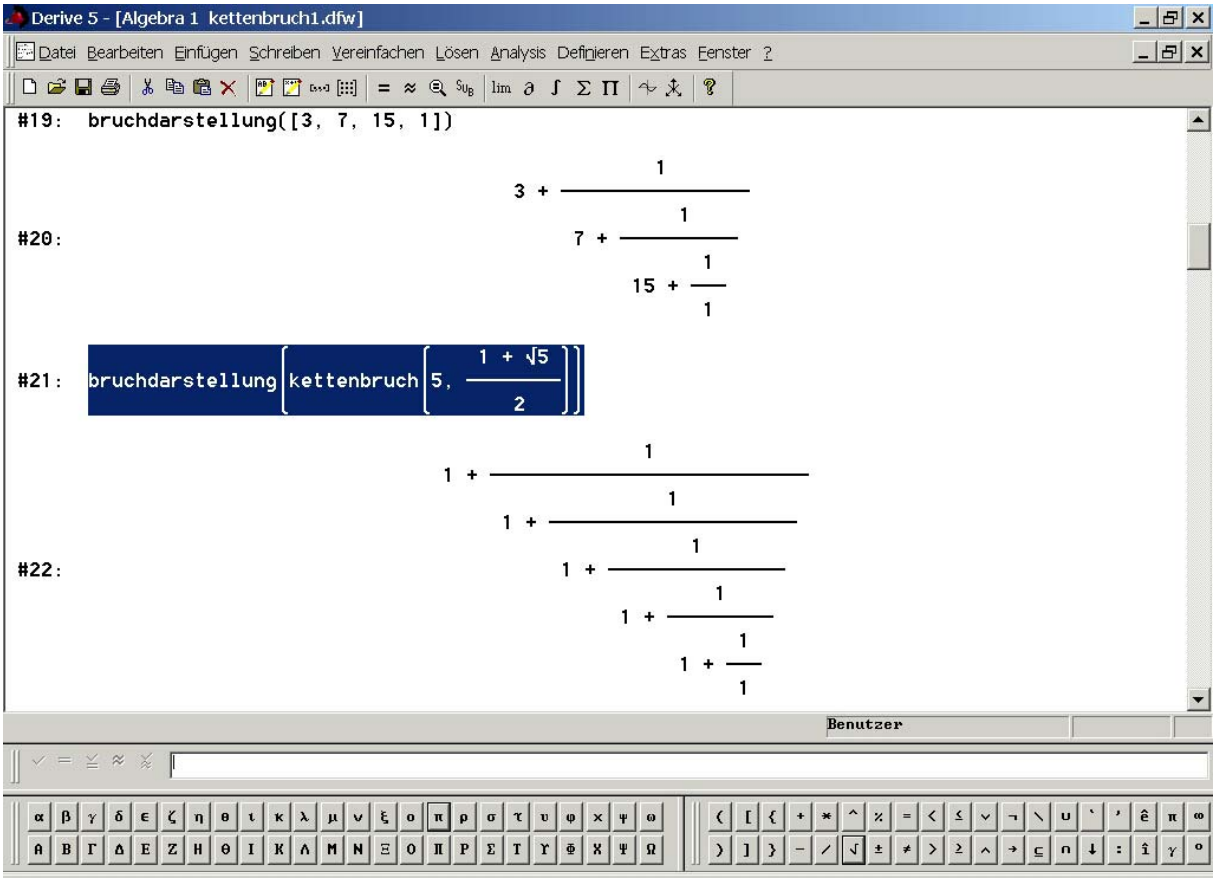
zu 12.





In DERIVE kann ein Kettenbruch auch in der üblichen Bruchdarstellung ausgegeben werden. Dazu ist es erforderlich die automatische Vereinfachung von arithmetischen Ausdrücken zu verhindern. Dies gelingt mit dem ’ - Operator:


Derive 5 - [Algebra 1 kettenbruch1.dfw]
Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?
#10: Darstellung eines Kettenbruchs in Bruchform:
#11: Dazu wird der '-Operator benötigt, der das Vereinfachen eines Ausdrucks verhindert.
#12: summe(x, y) := '(x + y)
#13: summe(1 + 2, 5)
#14: 3 + 5
#15: bruch(x, y) := '[x / y]
#16: bruch(4, 2)
#17: 4/2
#18: bruchdarstellung(υ) :=
If DIM(υ) = 1
υ↓1
summe(FIRST(υ), bruch(1, bruchdarstellung(REST(υ))))
C:\Eigene Dateien\SCHULE\MATHE\Kl9\Goldener Schnitt\kettenbruch1.dfw gespeichert
Simp(#8)
1.42s
"Dazu wird der '-Operator benötigt, der das Vereinfachen eines Ausdrucks verhindert."


Derive 5 - [Algebra 1 kettenbruch1.dfw]
Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?
#19: bruchdarstellung([3, 7, 15, 1])
#20: 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/1))
#21: bruchdarstellung(kettenbruch(5, (1 + √5)/2))
#22: 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1))))
Benutzer

Näherungsbrüche

Aus der Kettenbruchentwicklung $x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$ erhält man Näherungsbrüche

für die Zahl x durch:

$$x \approx a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}; \qquad x \approx a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}; \qquad x \approx a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{p_2}{q_2} \text{ usw.}$$

Aufgabe 13

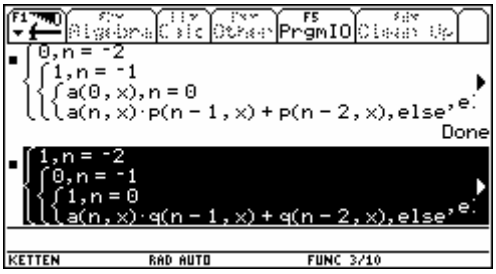
Zeige, dass sich Zähler und Nenner der Näherungsbrüche durch folgende Rekursionsformel finden lassen:

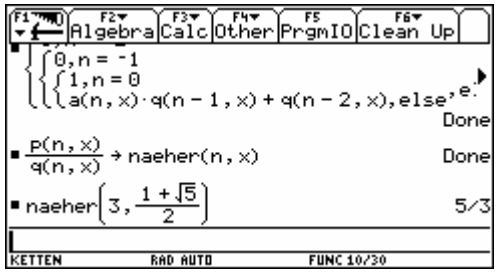
$$p_n = \begin{cases} 0 & n = -2 \\ 1 & n = -1 \\ a_0 & n = 0 \\ a_n p_{n-1} + p_{n-2} & n > 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad q_n = \begin{cases} 1 & n = -2 \\ 0 & n = -1 \\ 1 & n = 0 \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & n > 0 \end{cases}$$

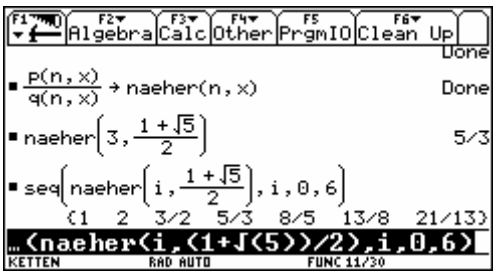
Aufgabe 14

Übertrage die Formel in ein Computeralgebra-System und ermittle die Näherungsbrüche für $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

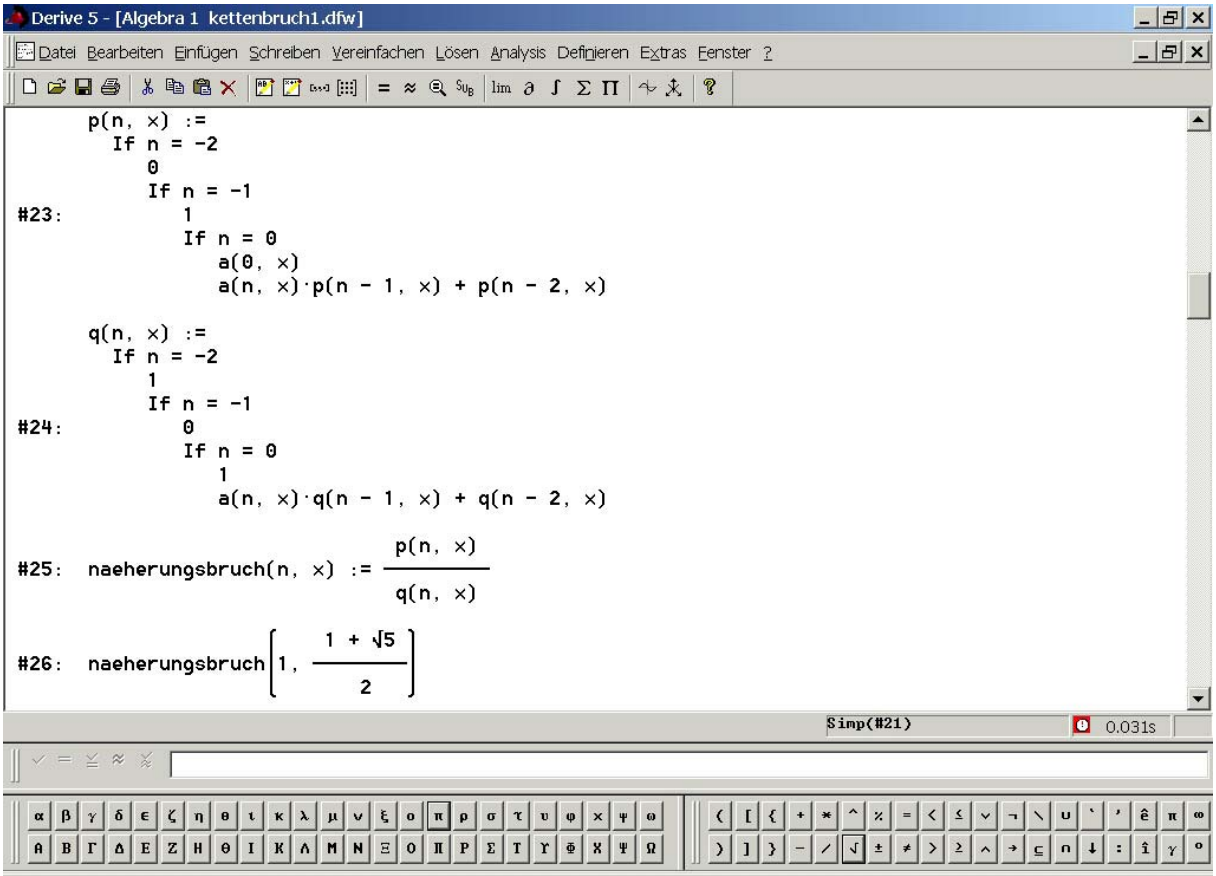
zu Aufgabe 14

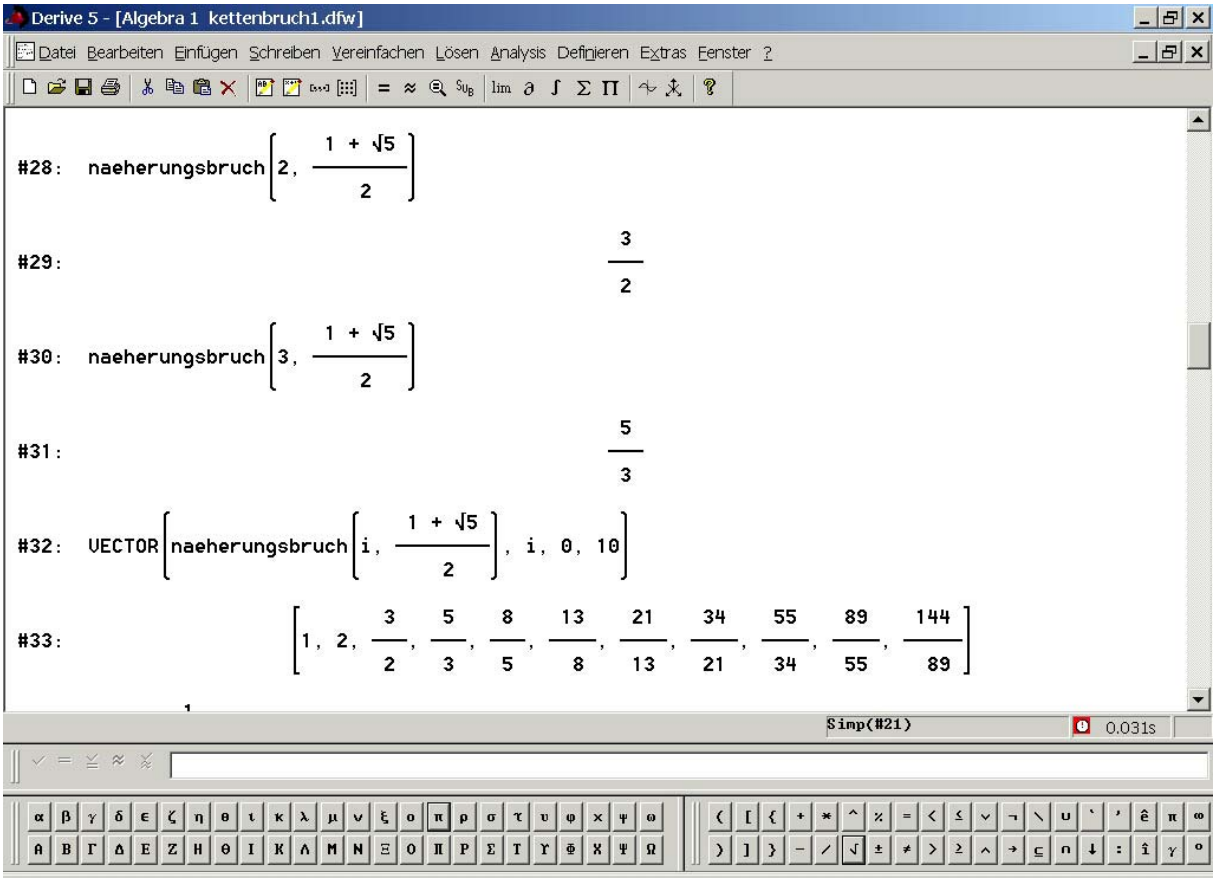






Bearbeitung von Aufgabe 14 mit DERIVE





Näherungsbrüche von Φ und die Fibonacci-Zahlen

Aufgabe 15

Die Bearbeitung der Aufgabe 14 läßt vermuten, dass die Näherungsbrüche von Φ gerade die Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen sind. Man beweise diese Vermutung.

Aufgabe 16

Stelle die Näherungsbrüche von Φ in der Form $\left(n, \frac{p_n}{q_n}\right)$ graphisch dar. Beachte, dass die Näherungsbrüche dem Grenzwert Φ zustreben. Welche Eigenschaft der Fibonacci-Zahlen ist damit nachgewiesen?

zu 15

Beh: $f_{n+1} / f_n = [1,1,1,...,1]$

Beweise durch Induktion

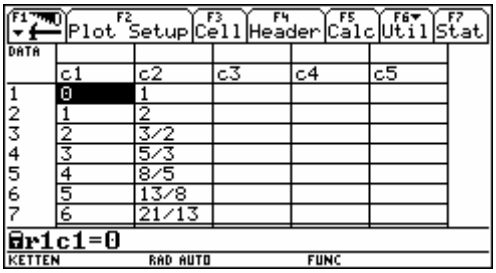
n=1

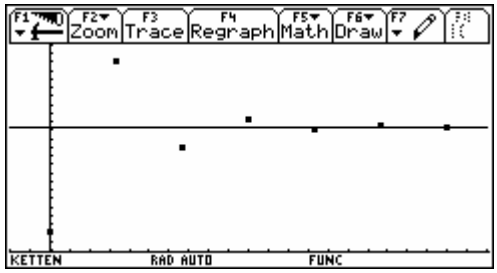
$[1] = 1 = 1/1 = f_2 / f_1$

Mit k_n wird der Kettenbruch aus n Einsen bezeichnet. Dann gilt:

$k_n = 1 + 1/k_{n-1} = 1 + 1/(f_n / f_{n-1}) = 1 + f_{n-1} / f_n = (f_n + f_{n-1}) / f_n = f_{n+1} / f_n$.

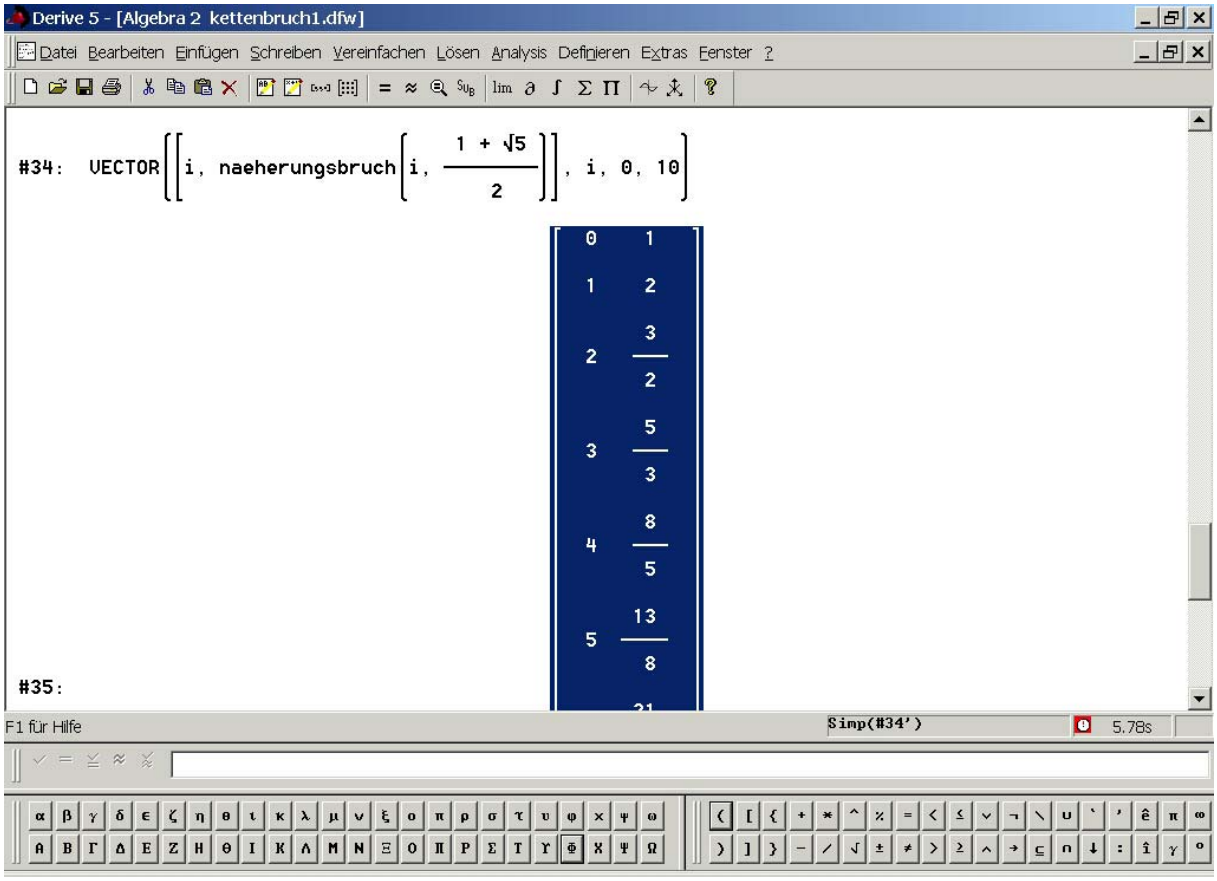
zu 16

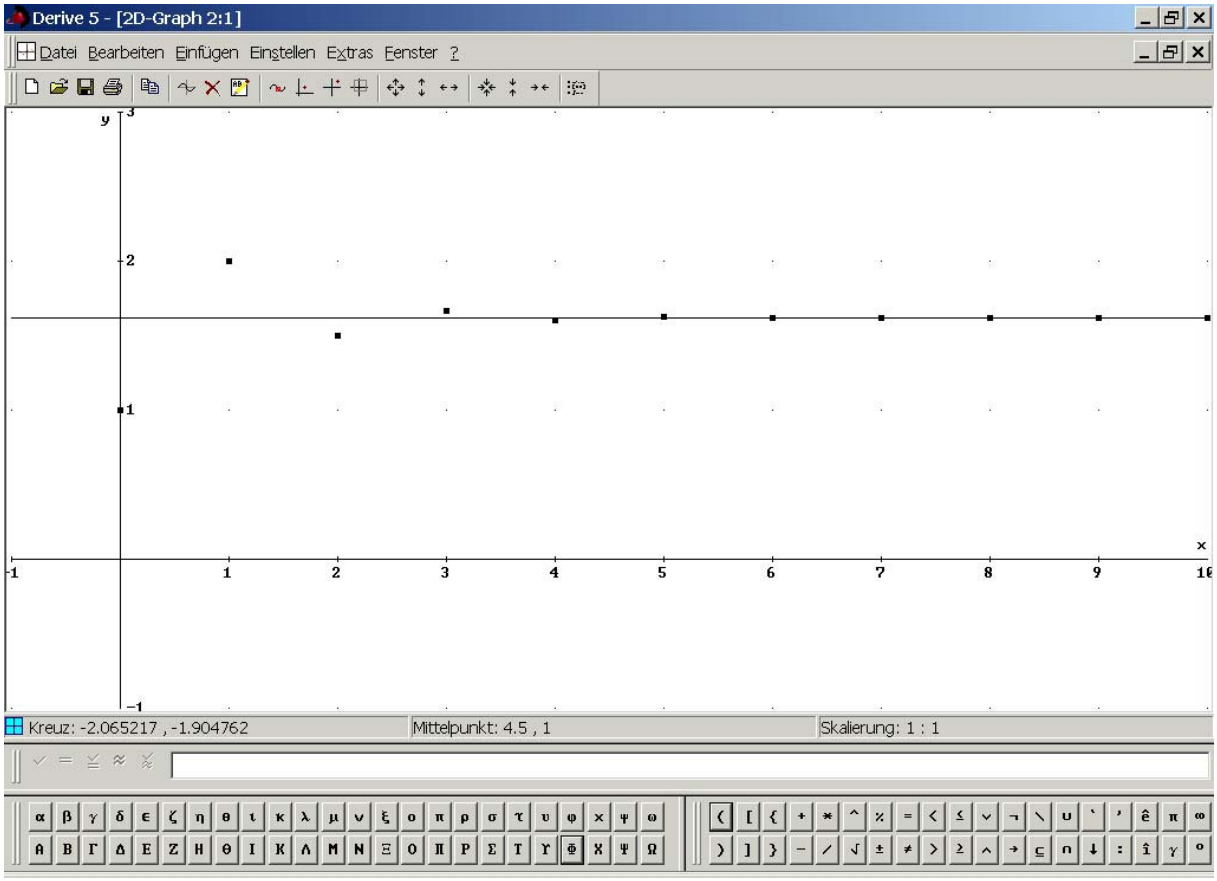




Folgerung: Der Quotient benachbarter Fibonacci-Zahlen strebt gegen Φ.

zu 16


Derive 5 - [Algebra 2 kettenbruch1.dfw]
Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?
#34: VECTOR([i, naeherungsbruch(i, (1 + √5)/2)], i, 0, 10)
0 1
1 2
2 3/2
3 5/3
4 8/5
5 13/8
#35:
F1 für Hilfe
Simp(#34')
5.78s


Derive 5 - [2D-Graph 2:1]
Datei Bearbeiten Einfügen Einstellen Extras Fenster ?
y
x
Kreuz: -2.065217 , -1.904762
Mittelpunkt: 4.5 , 1
Skalierung: 1 : 1