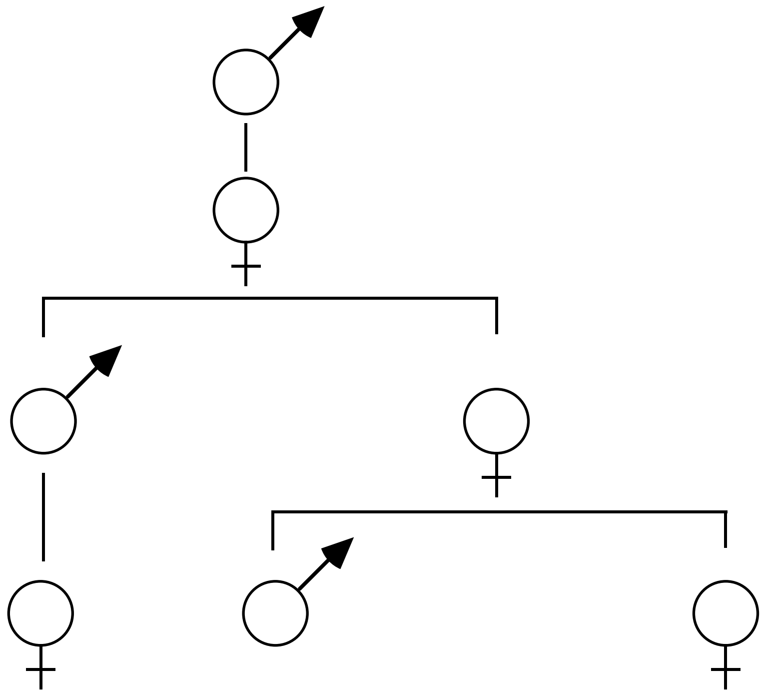
Fibonaccis Kaninchen

Entdeckende Mathematik mit *Derive*

von Gregor Noll



Die Fibonacci-Zahlen (1)

In seinem Werk *Liber abaci* aus dem Jahre 1202 stellte *Leonardo von Pisa*, genannt *Fibonacci*, eine bis heute berühmt gebliebene Aufgabe:

Leonardo von Pisa

Ein Kaninchenpaar wirft vom zweiten Monat an in jedem Monat genau ein junges Kaninchenpaar. Dieses und alle Nachkommen verhalten sich ebenso. Wieviele Kaninchenpaare sind nach einem Jahr vorhanden, wenn kein Kaninchen stirbt oder aus dem Stall entflieht?

1. *Zeigen Sie, daß die Anzahl der Kaninchenpaare in Leonardos Aufgabe die gleiche Zahlenfolge bildet, die wir in den vorherigen Arbeitsblättern entwickelt haben und deren Folgeglieder sich mit der DERIVE - Funktion* F(n) := ELEMENT($\mathbf{s}\cdot\mathbf{M}^{n-1}$,1) *berechnen lassen.*
   Begründen Sie insbesondere den Zusammenhang $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ für $n > 2$.

Erst im 19.Jahrhundert entstand für die Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... der heute übliche Name *Fibonacci-Folge*. Seit dieser Zeit ist eine nahezu unüberschaubare Anzahl von Zusammenhängen zwischen den Folgegliedern entdeckt und untersucht worden. Es gibt sogar eine eigene mathematische Fachzeitschrift, die sich auf Publikationen über Fibonaccizahlen spezialisiert hat.

2. *Welche Glieder der Fibonacci-Folge sind ungerade, welche gerade? Begründen Sie die Antwort!*
   Versuchen Sie weitere Zusammenhänge zu entdecken!

Interessante Fragestellungen und Ergebnisse lassen sich auch aus einer graphischen Darstellungen der Fibonacci-Zahlen gewinnen. Wir setzen dazu DERIVE ein. Es kann jede zweielementige Liste von Zahlen, wie etwa [3, 2] als kartesisches Koordinatenpaar interpretieren und unmittelbar als Graphikpunkt in einem Graphikfenster darstellen
Mehrere Punkte können in einem Schritt gezeichnet werden, wenn sie zu einer Liste zusammengefaßt werden. Beispielsweise ergibt die Liste [[3,2], [4,3], [5,5]] drei Punkte im Graphikfenster.

3. *Bilden Sie mit* VECTOR([n,F(n)],n,1,15) *eine Liste der ersten 15 Koordinatenpaare [n, F(n)]. Lassen Sie diese von DERIVE als Punkte in einem Graphikfenster neben dem Algebrafenster darstellen. Was vermuten Sie bei der Betrachtung dieser „Fibonacci-Punkte"? Wie könnten Sie Ihre Vermutung untersuchen?*
   (*DERIVE* - TIP: Eine geeignete Darstellung erhalten Sie mit SCALE x:5 y:150 MOVE x:10 y:300 CENTER)

Die Fibonacci-Zahlen (2)

Die graphische Darstellung der Fibonacci-Zahlen führt zu der Vermutung, daß die zugehörigen Punkte auf dem Graph einer Exponentialfunktion liegen. Demnach machen wir den Ansatz F(n)≈E(n) mit $E(n)=k \cdot b^n$

4. *Aus unserem Ansatz folgt, daß die zu den Logarithmen der Fibonacci-Zahlen gehörenden Punkte [n,log(F(n)] nahezu auf einer Gerade liegen müßten. Begründen Sie diese Schlußfolgerung durch geeignete Umformung des Ansatzes.*

Wir wollen unsere Vermutung und Schlußfolgerung mit *DERIVE* graphisch untersuchen. Dazu sollte das *DERIVE* - Arbeitsblatt ein Algebrafenster und daneben ein Graphikfenster mit den Fibonacci-Punkten aus Aufgabe 3 enthalten. Die Nummer des aktiven Fensters wird in der linken oberen Ecke optisch hervorgehoben. Es läßt sich mit der Taste F1 anwählen. Wir aktivieren das Graphikfenster und öffnen mit WINDOWS-OPEN-2D-plot ein neues Fenster für die halblogarithmische Darstellung der Fibonacci-Punkte. Das vorhandene Graphikfenster geht dabei nicht verloren. Es tritt nur in den Hintergrund und kann mit der Taste F2 wieder angezeigt werden.

5. *Erstellen Sie mit DERIVE die Liste der Koordinatenpaare [n, log(F(n))] für $1 \leq n \leq 15$. Prüfen Sie mit einer graphischen Darstellung dieser Punkte unsere Vermutung.*
   (*DERIVE* - TIP: Eine geeignete Darstellung erhalten Sie mit SCALE x:5 y:5 MOVE x:10 y:10 CENTER)

In *DERIVE* können wir mit der Anweisung FIT([x,ax+c],L) für eine Liste L von Punkten die Ausgleichsgerade berechnen lassen, für die die Summe der Quadrate der Abweichungen zu den Punkten minimal ist.

6. *Bestimmen Sie mit FIT den Funktionsterm der Ausgleichsgerade. Zeichnen Sie zur Kontrolle die Gerade in das Schaubild mit den Punkten ein.*

7. *Ermitteln Sie aus der Ausgleichsgeraden den Term $k \cdot b^n$ der Exponentialfunktion E.*

8. *Wechseln Sie im Graphikfenster mit der Taste F2 von der halblogarithmischen zur „normalen" Darstellung der Fibonacci-Punkte und lassen Sie zur Kontrolle den Graph der Exponentialfunktion zeichnen.*

9. *Berechnen Sie verschiedene Fibonacci-Zahlen exakt und näherungsweise. Untersuchen Sie, wie sich die Exponentialfunktion und die Näherungswerte ändern, wenn Sie weitere Fibonacci-Zahlen zur Bestimmung der Ausgleichsgerade hinzunehmen. Was ändert sich, wenn Sie dabei auf kleine Fibonacci-Zahlen verzichten?*

Die Fibonacci-Zahlen (3)

Die der graphischen Untersuchung zugrundeliegende Vermutung, daß sich die Zahlen der Fibonacci-Folge annähernd mit einer Exponentialfunktion der Form $E(n)=k\cdot b^n$ berechnen lassen, bestätigte sich. Allerdings wird die Qualität der Näherungswerte von den Konstanten k und b bestimmt, die bei unserem Vorgehen wiederum von zur Bestimmung der Ausgleichgeraden herangezogenen Fibonacci-Zahlen abhängt.

Der Zusammenhang $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ bringt uns hier einen Schritt weiter.

10. *Ermitteln Sie über $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$ mit dem Ansatz $E(n)=k\cdot b^n$ eine Bestimmungsgleichung für b. Lösen Sie diese! Wie lautet jetzt die exponentielle Näherung E(n) für F(n)?*

11. *Wie kann man bei Kenntnis von b den Wert der Konstanten k bestimmen?Führen Sie Berechnungen von k für verschiedene Fibonacci-Zahlen aus. Was fällt ihnen auf?*

12. *Bei der Lösung zur Aufgabe 10 ergeben sich zwei Werte für b. Damit erfüllen zwei Arten von Exponentialfunktionen nämlich $E_1(n)=k_1\cdot b_1{}^n$ und $E_2(n)=k_2b_2{}^n$ die grundlegende Gleichung $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$. Zeigen Sie, daß dann auch die Linearkombination $E_1(n) + E_2(n)$ für beliebige k_1 und k_2 (nicht beide 0) diese Gleichung erfüllt.*

13. *Aus der Linearkombination und den Anfangswerten $F(1)=1$ und $F(2)=1$ folgt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Werte k_1 und k_2. Stellen Sie das System auf und lösen Sie es mit DERIVE.*

Aus dem Ergebnis der letzten Aufgabe leitet sich unmittelbar die berühmte explizite Formel zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen ab. Sie wurde zum erstenmal von dem französischen Mathematiker Abraham de MOIVRE angegeben (*Miscellanea Analytica*, London 1730). Sie trägt heute jedoch den Namen des Mathematikers J. P. M. BINET.

14. *Geben Sie die Binet'sche Formel für F(n) an. Es ist die Linearkombination $E_1 + E_2$ mit den Werten k_1 und k_2 aus Aufgabe 13.*

15. *Überprüfen Sie die Binet'schen Formel für einige Fibonacci-Zahlen.*

Aus den vielen Zusammenhängen, die zwischen den Folgegliedern der Fibonacci-Zahlen bestehen, hier ein kleine Auswahl:

16. *Lassen Sie sich von DERIVE die Summe der ersten k Fibonacci-Zahlen für $1 \leq k \leq 10$ ausgeben. Entdecken Sie die Regelmäßigkeit in der Zahlenfolge? Können Sie diese beweisen?*

17. *Betrachten Sie die Folge der Produkte $F(n-1)F(n+1)$ für $2 \leq n \leq 10$. Fällt Ihnen etwas auf? Verifizieren Sie mit DERIVE die Beziehung $F(n-1)F(n+1)-F(n)^2 = (-1)^n$ für $2 \leq k \leq 10$!*

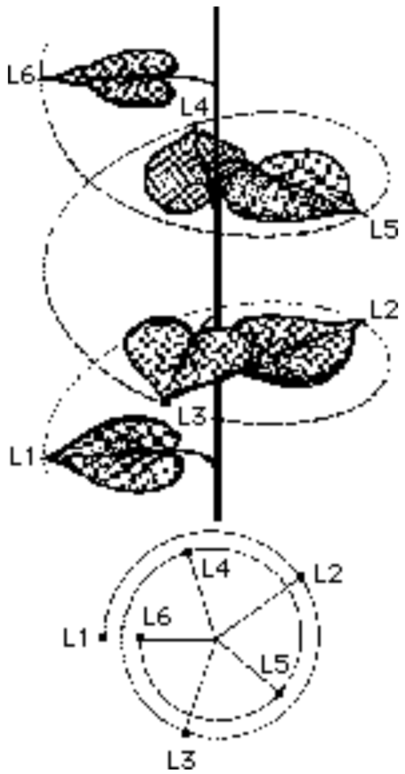
Der Goldene Schnitt

Der in Aufgabe 10 bestimmte Term $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist eine berühmte Zahl, die schon die Griechen in verschiedenen geometrischen Zusammenhängen gefunden hatten. So unter anderem bei dem Problem, die Strecke AB durch einen inneren Punkt P so zu teilen, daß für die Streckenlängen das Verhältnis $|AP| : |PB| = |AB| : |AP|$ gilt, wenn AP die größere der beiden Teilstrecke ist.

1. *Zeigen Sie, daß das Teilverhältnis $|AP| : |PB|$ gleich dem angegebenen Term ist!*

Von vielen Menschen sollen Streckenverhältnisse mit dem Wert $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als besonders angenehm und ästhetisch schön empfunden werden. Architekten und Künstler waren jedenfalls von dieser angeblichen Wirkung zu allen Zeiten in besonderer Weise fasziniert. Zu Beginn des 16. Jahrhundert tauchte für Verhältnis der Namen *divina proportio*, d. h. *Göttliches Verhältnis* auf. Im 19. Jahrhundert entstand schließlich die heute übliche Bezeichnung *Goldener Schnitt*.

Interessanterweise finden sich die Fibonacci-Zahlen und damit die Verhältnisse des Goldenen Schnittes auch in der Natur.



Betrachten wir die abgebildete schraubenförmige Anordnung der Blätter an einem Stengel, so kann man z. B. bei Rosen oder Kirschen feststellen, daß sich die gleiche Anordnung mit fünf Blättern nach je zwei Windungen wiederholt.

Führt man die Zahlen b für die Anzahl der Blätter und u für die Anzahl der Umläufe pro Wiederholung ein, so zeigen Zählungen bei vielen Pflanzen, daß sowohl b als auch u meist Werte der Fibonacci-Folge annehmen.

Bei Weiden, Rosen und Steinobst treffen wir auf u=2 und b=5, bei Kohl und Astern dagegen auf u=3 und b=8. Auf einem Tannenzapfen gilt für die Schuppen u=8 und b=21.

(aus bzw. nach: Eduard Batschelet, *Einführung in die Mathematik für Biologen*, Springer, 1980)