

Facharbeit zur Mathematik

Kegelschnittzirkel

Herstellung und Analyse von historischen Instrumenten
zur Konstruktion der Kegelschnittkurven

Rhein-Gymnasium Sinzig

Fachlehrer : StD Gregor Noll

SIL Veranstaltung 14 442

Anschaulicher und Lebendiger Mathematikunterricht in der MSS

Speyer 1997

Die Untersuchung von Kegelschnitten, früher ausführlich und nahezu exzessiv im Mathematikunterricht der Oberstufe betrieben, ist heute ein eher selten anzutreffender Unterrichtsgegenstand. Allerdings finden sich gerade in letzter Zeit einige interessante didaktisch-methodische Vorschläge, die ihre unterrichtliche Behandlung unter Einsatz neuerer Geometriesoftware anregen. ([3],[4])

Für Facharbeiten wurden klassische Fragestellungen dieses Gebietes stets gerne verwendet. Das hier vorgestellte Facharbeitsthema *Kegelschnittzirkel - Herstellung und Analyse von historischen Instrumenten zur Konstruktion der Kegelschnittkurven* liegt aber eher außerhalb der üblichen Themenstellungen einer mathematische Facharbeit. Es entstand vor allem, weil sich der betreffende Schüler eine Problemstellung gewünscht hatte, die neben der mathematischen auch eine „handwerkliche“ Komponente haben sollte.

Die Aufgabenstellung der Facharbeit war dementsprechend zweigeteilt und bezog sich einerseits auf die Anfertigung der in der Literatur dargestellten Kegelschnittzirkel und andererseits auf die mathematische Begründung ihrer Funktionsweise. Darüberhinaus konnten vom Schüler offensichtliche Beschränkungen in der Anwendbarkeit der Zirkel aber auch einfache Erweiterungen diskutiert werden.

Aufhänger und zentraler Text für die Arbeit war der Artikel *Seventeenth century instruments for drawing conic sections* von *van Maanen* aus der Zeitschrift *The Mathematical Gazette* [1]. Die mathematischen Grundlagen wurden dem Schüler mit einem Kapitel über die Kegelschnitte im Band 2 der *Analysis* von *Kroll/Vaupel* [2] an die Hand gegeben.

Das Ergebnis der Facharbeit war zwiespältig und im Vergleich zu den (auch vom Schüler beim Lehrer erzeugten) Erwartungen eher enttäuschend.

Die angefertigten Modelle wurden zwar sauber entworfen und dargestellt, waren aber mechanisch teilweise instabil und damit schwer zu handhaben.

Die mathematische Behandlung war mehr als dürftig und gelang nur im Falle des Parabelzirkels, aber selbst dort nicht ganz vollständig. Die korrekte Funktion des Ellipsen- und Hyperbelzirkels konnte der Schüler nicht nachweisen.

Beschränkungen der Geräte und Erweiterungsmöglichkeiten wurden teilweise erkannt und durch Modifikation der Zirkel realisiert.

Nachfragen ergaben, daß der Schüler seine handwerklichen Fähigkeiten und Möglichkeiten zu hoch eingeschätzt und die mathematischen Aufgaben unterschätzt und deshalb viel zu spät nach der Themenstellung mit Arbeit begonnen hatte.

Geometrische Eigenschaften der Zirkel

Die Nachweise der Zirkeleigenschaften sind unterschiedlich schwierig. Es wird dabei einerseits auf die Definitionen der Kegelschnitte als *geometrische Örter* und andererseits auf ihre Mittelpunktsgleichung zurückgegriffen.

Parabel

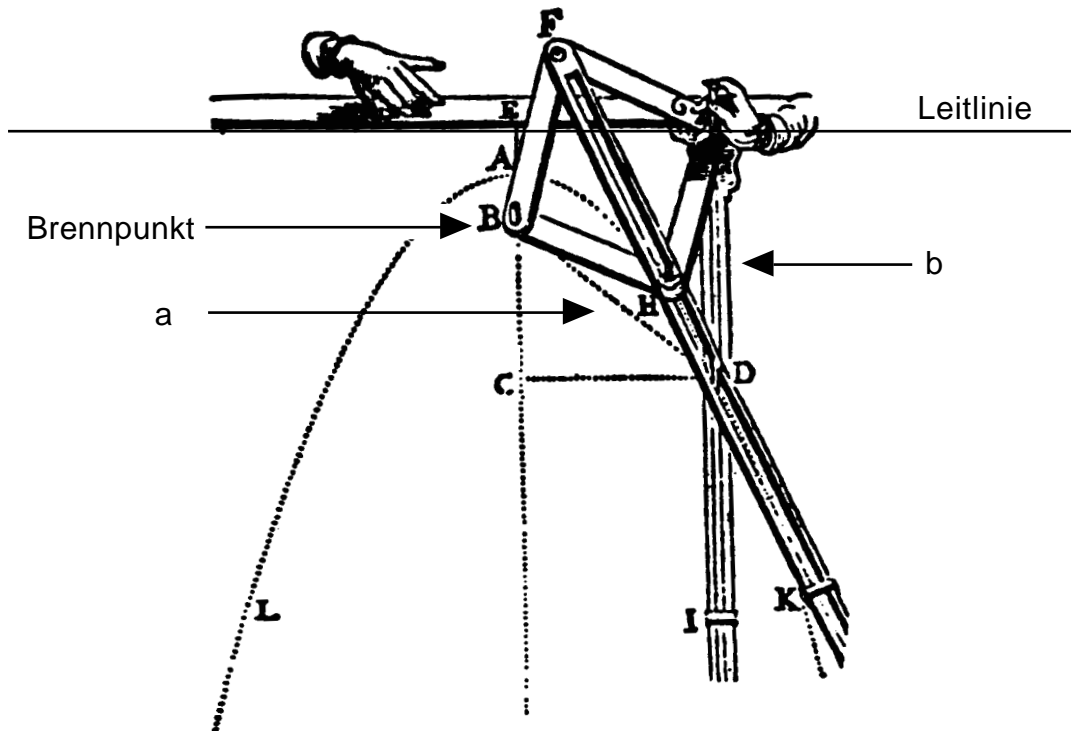


FIGURE 5. *Tractatus* p. 74.

Der Zirkel beruht auf unmittelbarer Umsetzung der Parabeldefinition. Eine Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte P, deren Abstände zu einem festen Punkt B, dem Brennpunkt der Parabel und einer festen Gerade, der Leitlinie jeweils gleich sind.

Durch die Konstruktion des Vierecks FBHG als Rhombus mit der Diagonalen FH, auf deren Verlängerung D liegt, bildet sich das Viereck FBDG stets als ein gleichschenkeliges Drachenviereck aus. Damit gilt $a=b$ für alle Punkte D, wobei b orthogonal zur Leitlinie steht.

Ellipse

Figur 8 zeigt die bekannte „Gärtnerkonstruktion“. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der beiden Entfernungen zu den zwei festen Brennpunkten konstant bleibt.

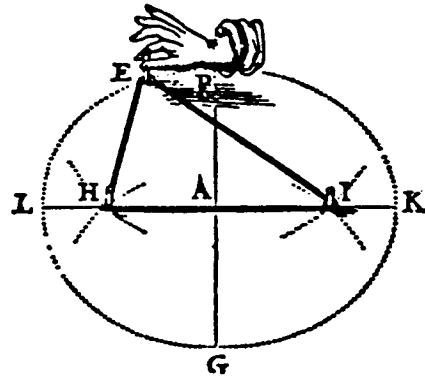


FIGURE 8.

Der Ellipsenzirkel in Figur 6 ist schon schwieriger zu verstehen.

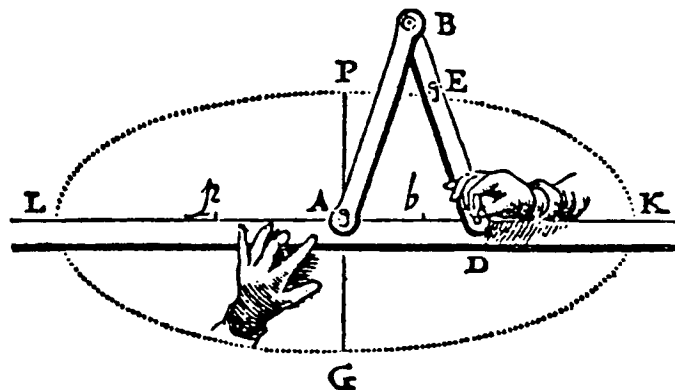
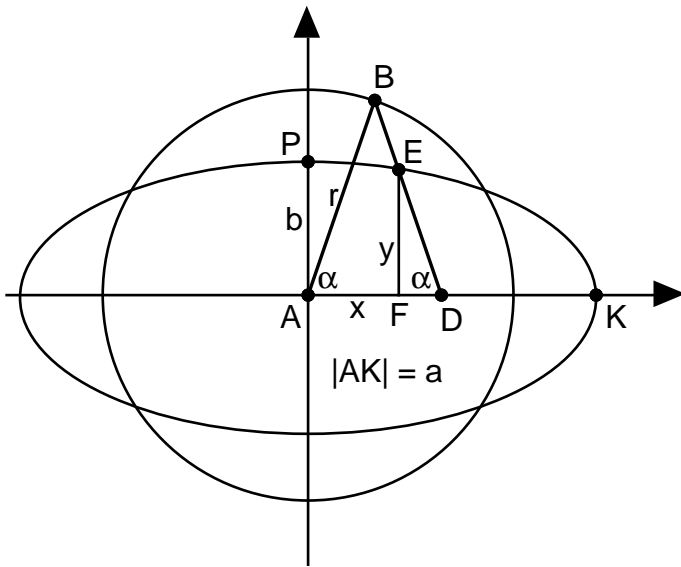


FIGURE 6. *Tractatus* p. 26.

Die Brennpunkte kommen hier nicht vor, dagegen spielen offensichtlich der Mittelpunkt A und die beiden Achsen LK bzw. GP eine wichtige Rolle. Der entscheidende Zusammenhang ist jetzt durch die sog. Mittelpunkts Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben.

x und y sind dabei die Koordinaten des Punktes E, wenn wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Mittelpunkt A und den Achsen LK und PG annehmen. a ist die Länge der Strecke AK und b die Länge der Strecke AP.

Es wird nun gezeigt, daß diese Gleichung für jede Position des Zirkels erfüllt ist. Meine Herleitung erscheint mir relativ umständlich, vielleicht finden Sie einen eleganten Nachweis dafür, daß der Zirkel tatsächlich Ellipsen zeichnet.



Zunächst bewegt sich B auf einem Kreis um A mit Radius r . Außerdem ist die Länge von BD ebenfalls gleich r und damit bildet ADB ein gleichschenkliges Dreieck. Dieses entartet zu einer Strecke, wenn E auf P bzw. auf K fällt. Diesen Sonderpositionen zeigen :

$$b = r - |BE| \quad \text{und} \quad a = r + |BE|$$

woraus

$$r = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad |BE| = \frac{a-b}{2}$$

folgt.

Damit E mit P zusammenfällt, muß außerdem $|ED| = b$ sein !

Jetzt folgt im rechtwinkligen Dreieck FDE : $y = b \sin \alpha$ (Gl. 1)

Für die x -Koordinate von E ergibt sich aus der Zeichnung $x = |AD| - b \cos \alpha$

Beachten wir jetzt $\frac{|AD|}{2} = r \cos \alpha = \frac{a+b}{2} \cos \alpha$, so ist $|AD| = (a+b) \cos \alpha$

Damit folgt für x die Gleichung: $x = a \cos \alpha$ (Gl. 2)

Gl. 1 und Gl. 2 ergeben $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \cos \alpha + \sin \alpha$ und schließlich $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ qed

Der Zirkel von Figur 9 zeichnet ebenfalls eine Ellipse. Der Nachweis wird als Übungsaufgabe empfohlen!

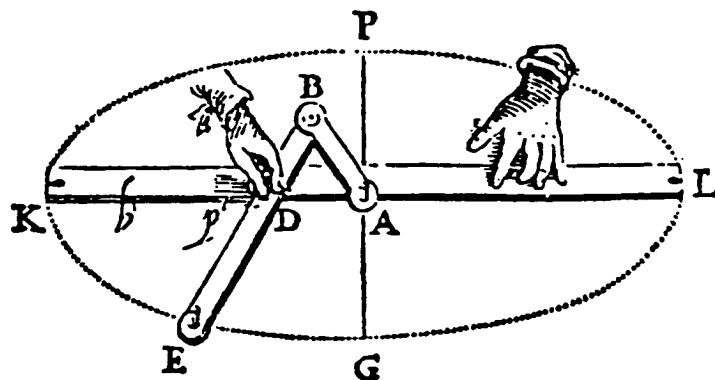


FIGURE 9.

Hyperbel

Die Hyperbel ist als geometrischer Ort derjenigen Punkte definiert, für die die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist und mit dem Abstand der Scheitelpunkte der beiden Hyperbeläste übereinstimmt. Diese konstante Differenz wird üblicherweise mit $2a$ bezeichnet.

Der in Figur 7 dargestellte Hyperbelzirkel beruht auf dieser Definition. In die Figur eingetragen wurden u. a. Beziehungen, die durch die Zirkelbauweise gegeben sind.

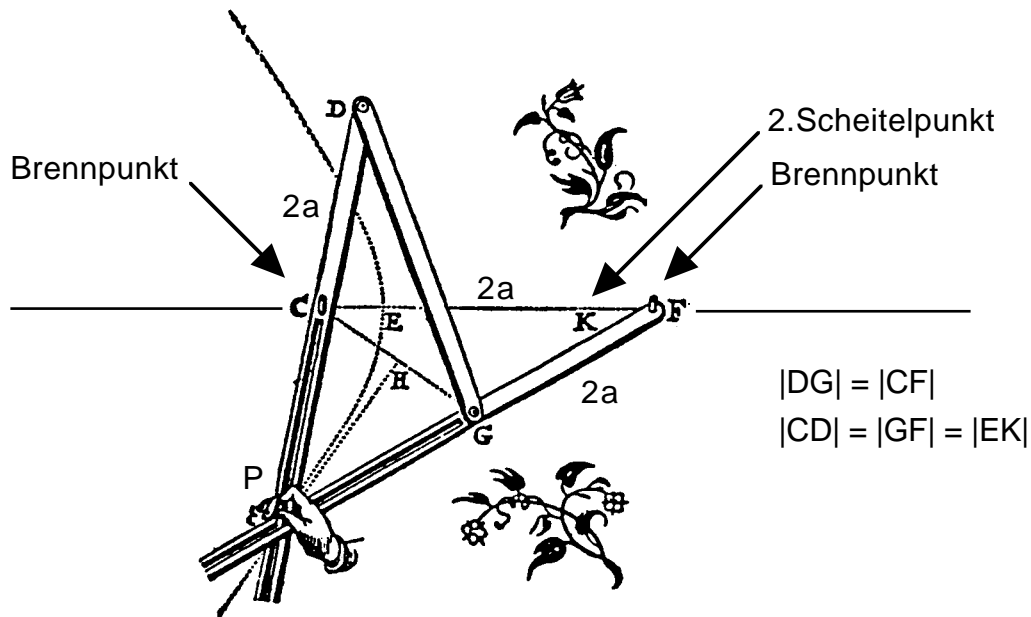


FIGURE 7. *Tractatus* p. 57.

Wegen den bauartbedingt übereinstimmenden Streckenlängen sind die Dreiecke CGD und CGF kongruent (sss). Auch die beiden Dreiecke PCF und PGD sind deckungsgleich (sww), woraus $|PC| = |PG|$ folgt.

Damit ergibt sich für die Längendifferenz der Strecken von den Brennpunkten zum Hyperbelpunkt P die zu beweisende Beziehung $|FP| - |PC| = |FP| - |PG| = 2a$

Konstruktionen der Kegelschnitzzirkel mit dem TI-92

Durch Nachkonstruktion der Zirkel mit dem Geometriemodul des TI-92 lassen sich in eindrucksvoller Weise ihre Bewegungsabläufe nachvollziehen. Dabei können mit Hilfe der Trace-Funktion oder des Locus-Tools auch die Kegelschnittekurven sichtbar gemacht werden. Insbesondere zeigen sich hierbei die Beschränkungen in der praktischen Verwendbarkeit der Zirkel.

Die Konstruktionen sind auch mit einer PC-Geometriesoftware, die den sogenannten *Zugmodus* unterstützt, leicht nachvollziehbar (z. B. mit Cabri, Euklid, Thales).

Parabel

Wir gehen folgendermaßen vor (vergl. Figur 5 und die Ti-92-Abbildungen):

- Konstruktion der Strecke XY (*Lineal E*)
- Punkt G auf XY
- Orthogonale durch G zu XY (*Lineal I*)

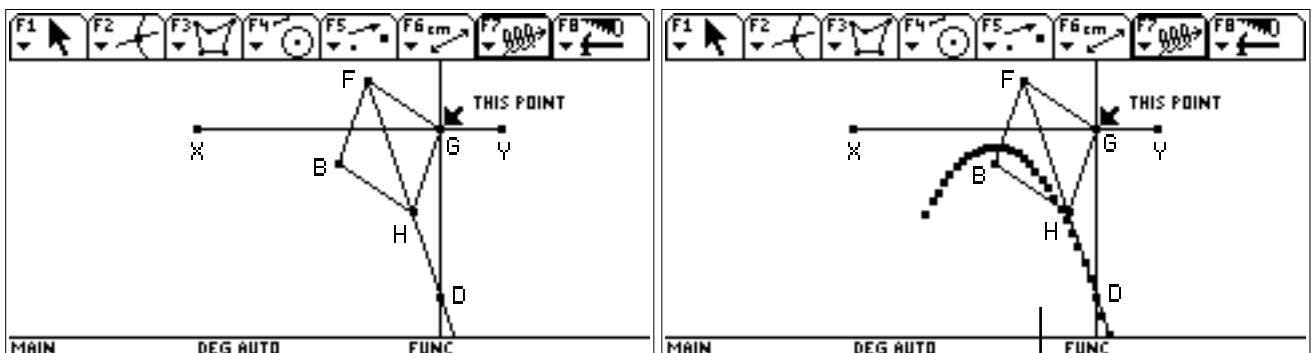
Mit der Taste  können wir G zwischen X und Y „von Hand“ bewegen. Die Begrenzung der Bewegung ist für eine spätere automatische Animation von G notwendig.

Zur Erzeugung des Vierecks BHGF und des Lineals K benötigen wir

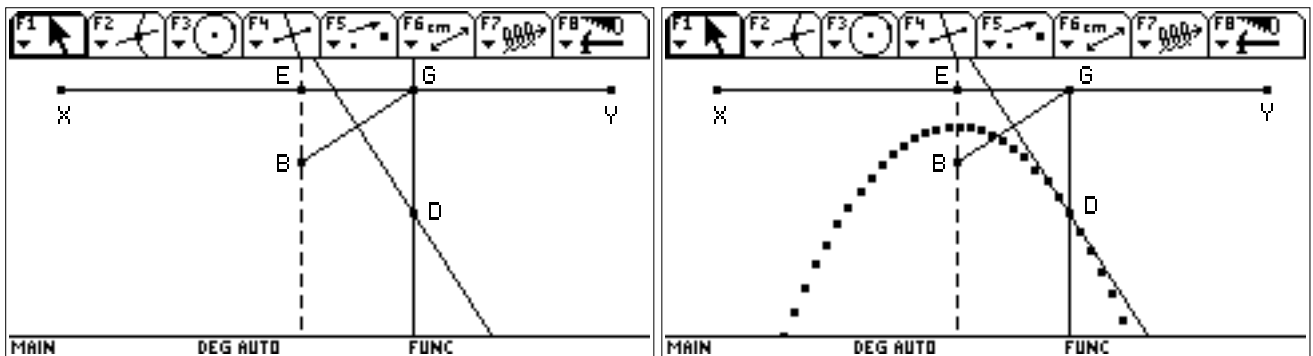
- einen *Brennpunkt B*
- einen Kreis um B und den Kreis mit dem gleichen Radius um G, die sich in den Punkten F und H schneiden,
(der Kreis um G wird mit dem Befehl COMPASS aus dem Menü F4 erzeugt: zwei Punkte anwählen, deren Abstand gleich dem Radius des Kreises um B ist, dann den Mittelpunkt G anwählen),
- das Polygon mit den vier Punkten BHGF (Doppeldruck beim dritten Punkt schließt das Viereck)
- den Strahl von F durch H (*Lineal K*) schneidet Lineal I im Punkt D

Jetzt benutzen wir das Menü F7 um eine Animation mit Trace zu erhalten

- Verstecken der Hilfslinien
- Trace für Punkt D wählen
- Animation für Punkt G wählen und mit Doppeldruck auf Taste  einschalten

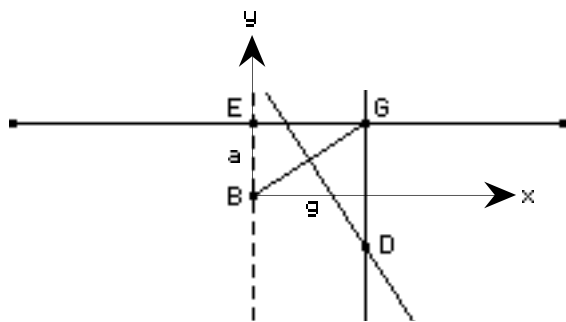


Die Konstruktion der Parabel läßt sich einfacher gestalten, wenn man erkennt, daß FD stets die Mittelsenkrechte der Strecke BG ist. Die Punkte D der Parabel haben also von der *Leitgeraden* durch X und Y den gleichen Abstand wie vom *Brennpunkt* B.



Das zweite Bild läßt die Vermutung aufkommen, daß die Mittelsenkrechte Tangente an die Parabel im Punkt D ist.

Der algebraische Nachweis ist nicht schwer:



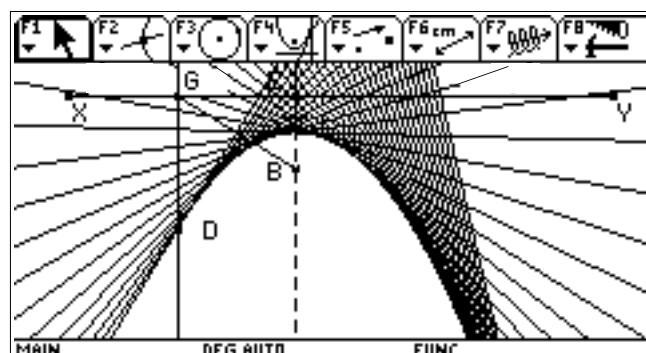
Wir führen das abgebildete Koordinatensystem ein. Damit hat die Mittelsenkrechte durch D die Steigung $-\frac{g}{a}$. Der Mittelpunkt der Strecke BG hat die Koordinaten $\left(\frac{g}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

Aus dem Ansatz $t(x) = -\frac{g}{a}x + b$ ergibt sich damit $b = \frac{a}{2} + \frac{g^2}{2a}$ was zu der Geradengleichung $t(x) = -\frac{g}{a}x + \frac{a^2 + g^2}{2a}$ führt. Aus ihr

berechnen sich die Koordinaten von $D(g; t(g))$ zu $\left(g; \frac{a^2 - g^2}{2a}\right)$. Das Ergebnis zeigt uns,

daß alle Punkte D auf der Parabel $p(x) = \frac{a}{2} - \frac{x^2}{2a}$ liegen. Deren Steigung ist $p'(x) = -\frac{x}{a}$ und stimmt am Punkt D mit der Steigung der Mittelsenkrechten überein.

Eine schöne Veranschaulichung des Ergebnisses ist die folgende Animation, bei der nicht ein Trace des Punktes D, sondern der Mittelsenkrechten erfolgte:

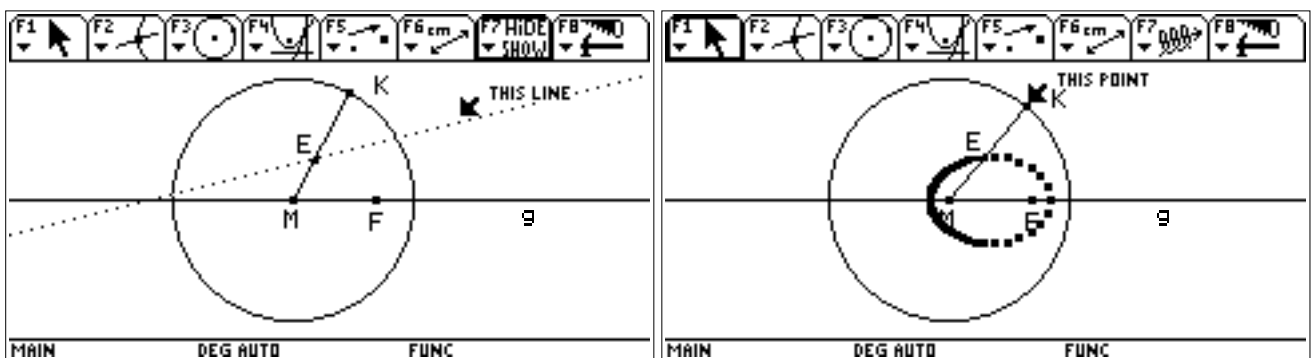


Ellipse

Zur Konstruktion einer Ellipse mit dem TI92 benutzen wir zunächst die Eigenschaft, daß alle Ellipsenpunkte von einem Kreis (*Leitkreis*) und einem festen Punkt innerhalb des Kreises die gleiche Entfernung haben.

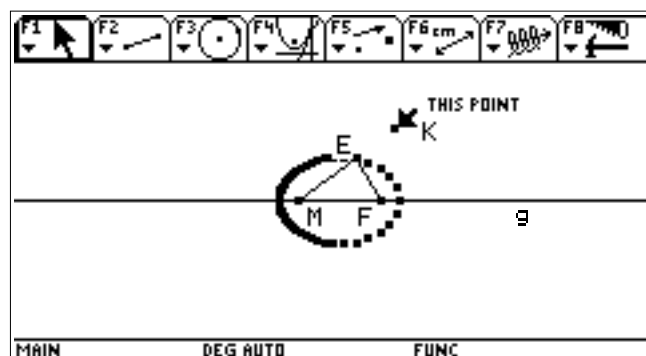
Wir konstruieren:

- Gerade g mit Mittelpunkt M des Leitkreises
- Leitkreis mit beliebigem Radius
- Brennpunkt F auf g innerhalb des Leitkreises
- Punkt K auf dem Leitkreis
- Strecke MK
- Mittelsenkrechte zur FK - Schnittpunkt E mit MK festlegen
- Mittelsenkrechte verstecken
- Trace für E - Animation von K



Zeichnen wir noch die Strecke EF ein, so entdeckt man die bekannte *Gärtnerkonstruktion*. Es ergibt sich aus der Konstanz von $|MK|$ unmittelbar die Konstanz der Streckensumme $|ME| + |EF|$, weil die Mittelsenkrechte von FK die Gleichheit der Streckenlängen $|EK|$ und $|EF|$ gewährleistet.

Eine schöne Veranschaulichung dieser Konstruktion ergibt sich jetzt, wenn wir zusätzlich die Strecke ME eintragen und die Strecken MK sowie den Kreis verstecken.



Die Konstruktion des Ellipsenzirkels (Figur 6; Figur 9) gelingt folgendermaßen:

- Strecke XY (Lineal)
- Mittelpunkt A der Strecke XY

Um die „Schanierfunktion“ des Zirkels bei B nachzubilden, muß man erkennen, daß sich B auf einem Kreis mit festem Radius um A bewegt und bei gestrecktem Zirkel auf XY liegt, wobei $|AB| = |BD|$ gilt. Dabei lassen wir D mit Y zusammenfallen und konstruieren

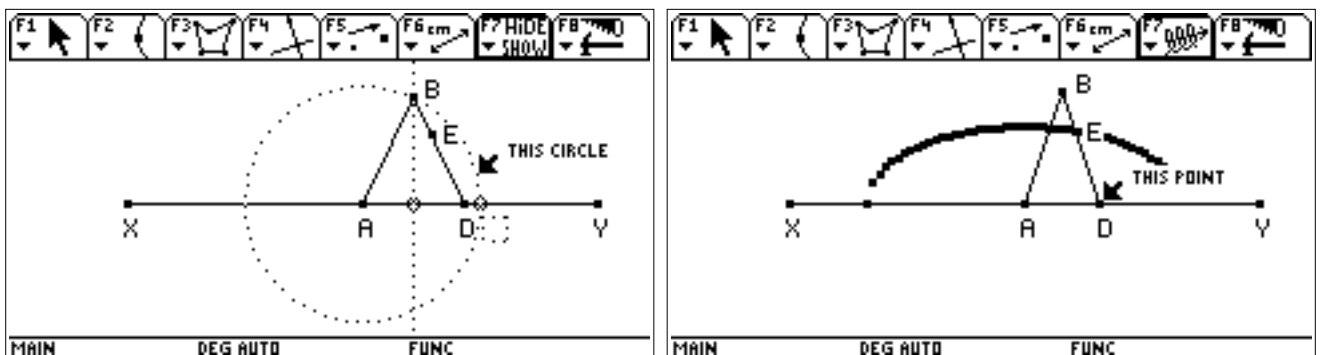
- den Mittelpunkt M der Strecke AY
- den Kreis um A mit Radius $|AM|$

Jetzt fehlen noch D und B :

- beliebiger Punkt D zwischen M und Y
- Mittelpunkt der Strecke AD und Orthogonale durch diesen Punkt
(Wenn Sie die Mittelsenkrechte von AD nehmen, erleben Sie eine Überraschung!)
- Punkt B als Schnittpunkte der Orthogonalen mit dem Kreis oberhalb von XY

Verbinden wir A mit B und B mit D und verstecken alle Hilfslinien und Punkte, so erhalten wir durch Animation von D die Bewegung des Zirkels.

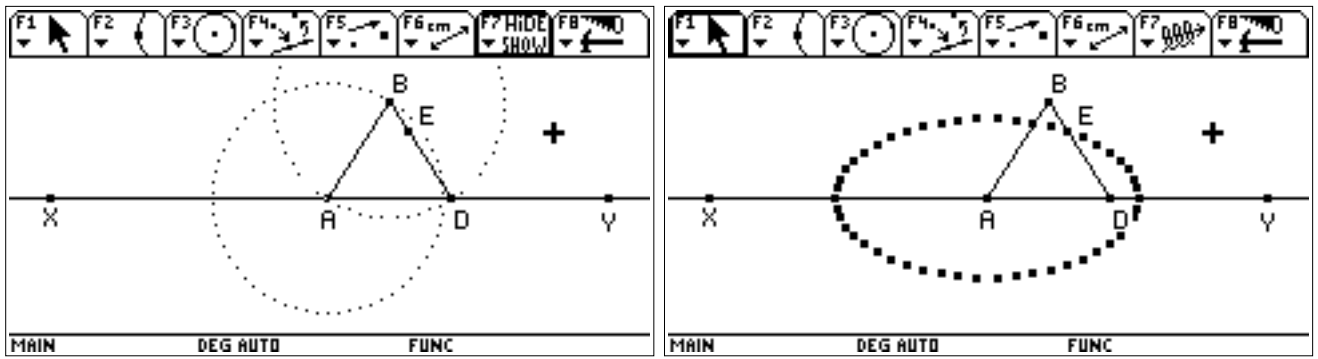
Die Ellipse entsteht, wenn wir zwischen B und D einen Punkt E eintragen und dessen Spur bei der Animation von D zeichnen lassen.



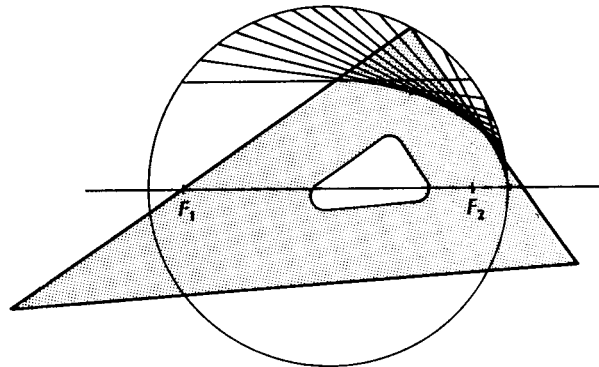
Der Zirkel von Figur 9 unterscheidet sich hiervon nur durch die Lage des Punktes E.

Eine Variante dieses Zirkels erhält man, wenn man nicht den Punkt D bewegt sondern den Punkt B auf einem Kreis um A herumführt. Dabei muß der D natürlich an das Lineal XY „gebunden“ bleiben.

Nach Festlegung eines Punktes B auf einem Kreis um A zeichnen wir um B den Kreis mit Radius $|AB|$, der XY in F schneidet. Wir tragen die Strecken AB und BD sowie einen Punkt E auf BD ein. Wenn alle Hilfslinien versteckt sind, lassen wir B auf der Kreislinie wandern und uns die Spur des Punktes E ausgeben. Es ergibt sich eine komplette Ellipse.



Eine für den Unterricht sehr praktikable Ellipsenkonstruktion zeigt die nachstehende Abbildung (aus [5]):

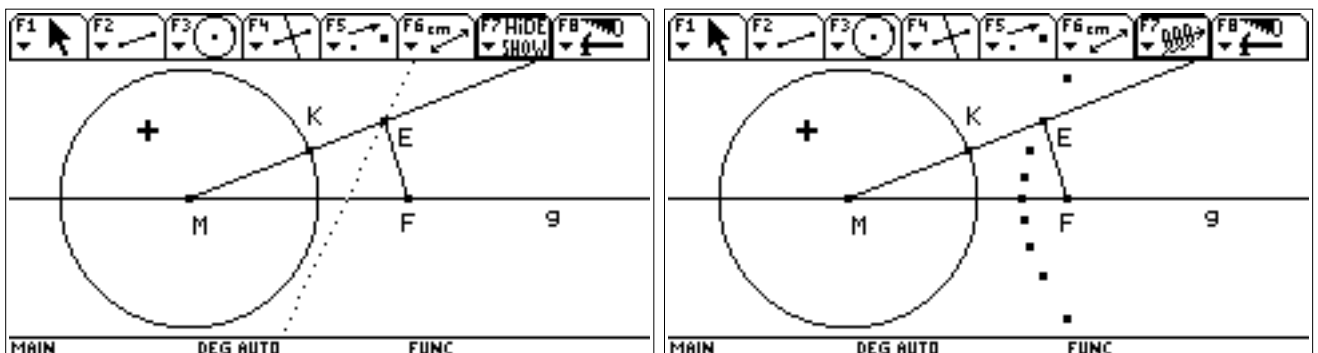


Auch sie läßt sich leicht auf dem TI92 durch Animation „zum Leben erwecken“.

Hyperbel

Zunächst konstruieren wir die Hyperbel als Ortslinie aller Punkte, die von einem gegebenen Kreis und einem Punkt außerhalb des Kreises die gleiche Entfernung haben. Dies geschieht durch eine kleine Modifikation der Gärtnerkonstruktion (Figur 8) einer Ellipse. Der Brennpunkt F muß nur außerhalb des Kreises um M liegen.



- Leitkreis mit Mittelpunkt M auf einer Geraden g
- Brennpunkt F auf g außerhalb des Leitkreises
- Punkt K auf dem Leitkreis - Strahl g von M durch K
- Mittelsenkrechte zur FK - Schnittpunkt E mit Strahl MK festlegen
- Mittelsenkrechte verstecken - Trace für E - Animation von K

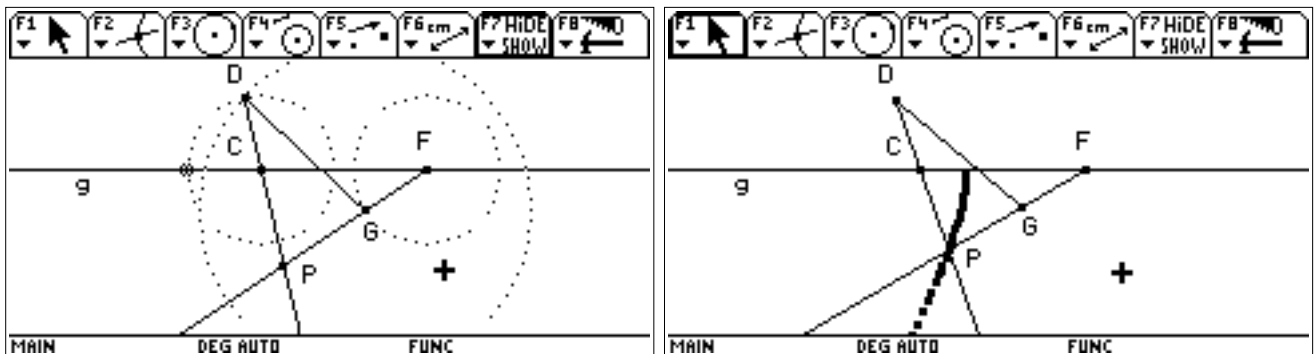


Der Punkt E hat nach Konstruktion zum Kreispunkt K und zum Punkt F stets die gleiche Entfernung, d. h. $|EK| = |EF|$. Andererseits ist $|MK|$ konstant. Daraus ergibt sich die Beziehung $|MK| = |ME| - |EK| = |ME| - |EF|$, also eine konstante Entfernungsdifferenz des Punktes E zu M und F. Der Punkt M ist der Brennpunkt des zweiten Hyperbelastes, den man erhält, wenn statt des Strahls MK eine Gerade durch M und K benutzt wird.

Sowohl bei der Gärtnerkonstruktion der Ellipse als auch bei der gerade gezeigten Hyperbelkonstruktion läßt sich eine kleine Entdeckung machen, wenn man nicht die Spur des Punktes E sondern die Spur eines anderen Objektes verfolgt.

Die Konstruktion des Hyperbelzirkel der Figur 7 ist nicht ganz so einfach:

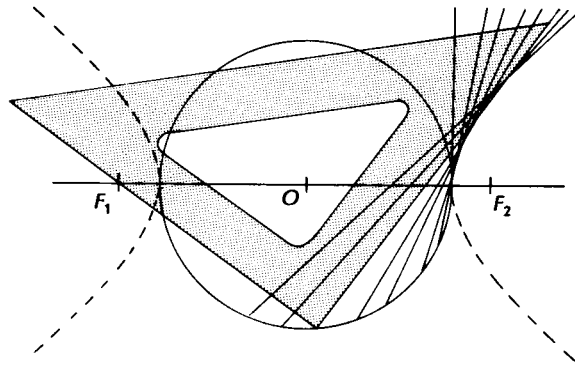
- Gerade g mit den Brennpunkten C und F
- Kreise um C mit einem Radius, der kleiner als $|CF|$ ist und dem Abstand der Hyperbelscheitel entspricht
- mit dem Befehl mit dem Befehl COMPASS aus dem Menü F4 um F den Kreis mit gleichem Radius zeichnen
- auf dem Kreis um F einen Punkt G unterhalb von g wählen (vergl. Figur 7)
- mit dem Befehl mit dem Befehl COMPASS um G den Kreis mit Radius $|CF|$ konstruieren. Seinen Schnittpunkt mit dem Kreis um C als Punkt D markieren
- Strecke von D nach G
- Strahl von D durch C und von F durch G
- Schnittpunkt der Strahlen ist Punkt P (wenn nicht sichtbar, dann G mit  etwas verschieben)
- Hilfslinien verstecken - G mit  bewegen und dabei die Spur von P zeichnen lassen



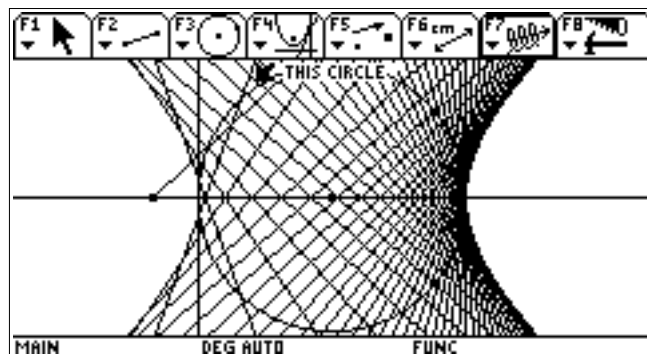
Es lassen sich jetzt ohne Schwierigkeiten Veränderungen an der Zirkelgeometrie vornehmen und deren Auswirkungen auf die Hypelform untersuchen. Beispielsweise:

Welchen Einfluß hat der Abstand der beiden Brennpunkte oder der Abstand der beiden Scheitelpunkte (Radius Kreises um C) auf die Hyperbelform? Wie kann man den zweiten Hyperbelast erhalten?

Auch für die Hyperbel gibt es ein einfache Konstruktion mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks, wie die folgende Abbildung (aus [5]) zeigt.



Ihre Animation läßt sich wieder mit dem TI92 vornehmen und liefert folgendes Bild:



Können Sie die entsprechende Konstruktion für eine Parabel angeben?

Rückblick

Kegelschnitte können ein fruchtbares Feld entdeckenden Lernens sein, insbesondere beim Einsatz experimentell orientierter Geometriesoftware. Die Möglichkeiten der dynamischen Darstellungen, der interaktiven Konstruktionsveränderungen erschließen interessante Zusammenhänge. In natürlicher Weise werden damit auch Bedürfnisse nach vertiefter Einsicht, nach Beweisen erzeugt. Ebenso können die vielfachen Konstruktionsmethoden nach Gemeinsamkeiten untersucht werden und somit Strukturierungen und lokales Ordnen initiieren. Die Rückgriffe auf historische Darstellungen und Abhandlungen stoßen dabei erfahrungsgemäß auf große Resonanz bei den Schülerinnen und Schülern, insbesondere, wenn sie mit graphischen Darstellungen verbunden sind. Schließlich bietet das Thema auch eine Reihe von Möglichkeiten zu fachübergreifendem und fächerverbindendem Lernen, beispielsweise in Bereichen der Optik, der Akustik, der Funktechnik, der Astronomie, der Architektur und vielleicht sogar der Politik („Oval Office“).

Literatur

- [1] Mannen, J. van *Seventeenth century instruments for drawing conic sections*
in: The Mathematical Gazette, Vol. 76 / 1992 S. 222 - 230
- [2] Kroll, W. / Vaupel, J. *Analysis - Lehr und Arbeitsbuch, Band 2*
Dümmler, Bonn 1986
- [3] Ziegler, Th. *Apollonius auf dem Bildschirm*
in: Der Mathematikunterricht, Heft 1 / 1995
Friedrich Verlag, Seelze
- [4] Meyer, J. *Kegelschnitte mit Geometriesoftware*
in: Mathematik-betrifft uns, Heft 5 / 1996
Bergmoser+Höllner Verlag, Aachen
- [5] Downs, J. W. *Practical Conic Sections*
Dale Seymour Publications,
Palo Alto, 1993
ISBN 0-86651-628-X