

# Trainingsprogramm für Kugelstoßer

von Ariane Keil



## Buder stößt 20,27 Meter

Meeting in Weiler

**M**it einem Sieg des überraschenden Oliver-Sven Buder (TV Wattenscheid) endete im schwäbischen Weiler der Auftakt zum „Deutschland Pokal“ im Kugelstoßen. Buder stellte vor knapp 200 Zuschauern mit 20,27 m eine neue deutsche Jahresbestleistung auf und hat in dieser Form beste Voraussetzungen den über drei Etappen ausgeschriebenen ersten „Pokal“ zu gewinnen.

Bei den Frauen gab es in Abwesenheit der bisher überraschenden Stoßinnen der Saison einen Erfolg für die Fürtherin Gnt Hammer mit 18,78 m. Zweite wurde Stefanie Storp mit 18,53 m, die sich nach einer Verletzung wieder im Aufwind befindet. Insgesamt kam der Wettkampf aber nicht an das Niveau des Männerwettbewerbes heran.

Schon im ersten Durchgang hatte Buder mit einer Weite knapp an die 20-m-Marke für klare Verhältnisse gesorgt. Insgesamt viermal übertraf er diese Marke. Thorsten Herbrand (LG Bayer Leverkusen) wirkte insgesamt nicht so frisch, wie zum Saisonauftakt - und mußte am Ende froh sein, wenigstens den zweiten Platz gegen den bis auf 18,91 m aufkommenden Oliver Duck zu verteidigen.

Gute Leistungen lieferten in beiden Wettbewerben die Junioren ab: Sowohl Claudia Mues (LG München/16,83), Nadine Kleinert (SC Magdeburg/16,77) wie auch die Junioren Detlef Bock (SC Magdeburg/17,78) und Gunnar Pflingsten (LG Steinhuder Meer/17,31) konnten mit ihren Leistungen zufrieden sein. Die Fortsetzung des „Deutschland Pokals“ findet beim 6. Sachsenmeeting in Chemnitz (25.5.) statt. Das Finale steigt dann am 19. Juni in Iffezheim. Gesamtsieger wird der Athlet, der am Ende die größte Gesamtweite zu verzeichnen hatte. Eine etwas enttäuschte Miene gab es beim Veranstalter in Weiler, schließlich hatten sich in den Vorjahren bis zu 800 Leute um den Kugelring auf dem „Dorfplatz“ versammelt.

## Problemstellung

Überlegt sich ein Leichtathlet mit seinem Trainer, wie er seine Bestleistung steigern kann, so müssen sie sich unterschiedlichste Gedanken machen. Die Überlegungen, die angestellt werden müssen, sind ganz von der Disziplin abhängig, die der Sportler vorzugsweise ausüben will. So wird zum Beispiel der Sprinter vorzugsweise seine Sprintfähigkeit trainieren wollen, der Marathonläufer eher die Ausdauerfähigkeit und das Stehvermögen.

Betrachtet man nun einen Kugelstoßer, so gibt es hier auch Fähigkeiten, die besonders trainiert werden sollten, weil sie die größten Auswirkungen auf die Bestleistung des Sportlers haben. Um zu erkennen, welche Fähigkeiten dieses sind, sollte man die Leistungsentwicklung beim Kugelstoßen betrachten ebenso wie die körperlichen Ausprägungen der Leistungssportler.



Viermal über 20 Meter: Oliver-Sven Buder

Foto: hpi

aus: Leichtathletik Nr. 21 vom 23.5.95

In der folgenden Tabelle sind die Leistungen einiger Kugelstoßer und Kugelstoßerinnen und ihre Körperhöhe und -gewicht aufgelistet worden.

	Leistung	Körperhöhe	Körpergewicht
<b>Männer</b>			
Matson (USA)	21,78 m	200 cm	120 kg
Rothenburg (DDR)	21,32 m	185 cm	118 kg
Briesenick (DDR)	21,67 m	195 cm	116 kg
Komar (Polen)	21,18 m	195 cm	125 kg
<b>Frauen</b>			
Tschihowa (UdSSR)	21,45 m	173 cm	90 kg
Gummel (DDR)	20,22 m	176 cm	90 kg
Iwanowa (UdSSR)	19,39 m	168 cm	84 kg
Lange (DDR)	19,25 m	182 cm	85 kg

aus: Schmolinsky, Leichtathletik 1980

Diese Tabelle gibt die Mittelwerte der 6 besten Teilnehmer der olympischen Spiele 1972 an.

	Alter (Jahre)	Körperhöhe (cm)	Körpergewicht (kg)
<b>Männer</b>	26,7	192	120,2
<b>Frauen</b>	27,8	177	86,8

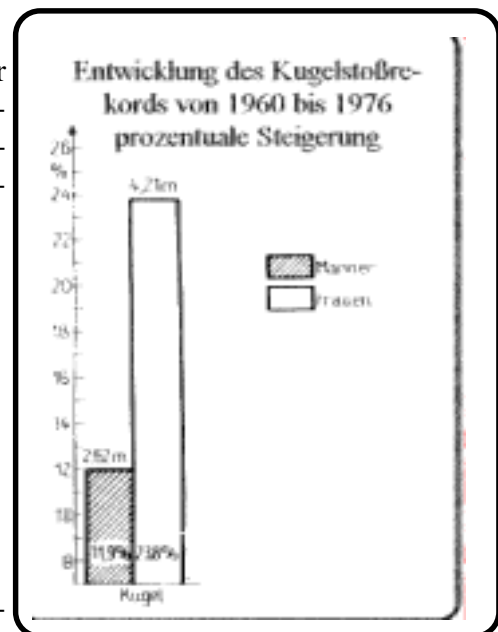
aus: Schmolinsky, Leichtathletik 1980

Anhand dieser Tabellen läßt sich gut ablesen, welche körperlichen Voraussetzungen der Athlet haben sollte.

Betrachtet man weiterhin die Leistungsentwicklung der Leistungssportler, so wird deutlich, daß sich die Bestleistungen insbesondere zwischen 1960 und 1976 gesteigert haben (siehe Abbildung rechts). Die unten stehende Tabelle zeigt die absolute Verbesserung der Bestleistungen bis zum bestehenden Weltrekord.

	1909/ 1926	1976	jetziger Weltrekord
Männer	19,54 m	22,00 m	23,12 m (1990)
Frauen	9,54 m (5 kg)	21,99 m	22,63 m (1987)

Die in den letzten beiden Tabellen verdeutlichte Steigerung konnte zum großen Teil durch gezieltes Training erreicht werden.



aus: Schmolinsky, Leichtathletik 1980

Betrachtet man außerdem die Leistungsdichte bei den Bestleistungen der deutschen Männer und Frauen, so ist festzustellen, daß insbesondere im Hochleistungsbereich nur durch gezieltes Training eine Steigerung erreicht werden kann.



Will man weiterhin eine Leistungssteigerung erreichen, so ergibt sich folgende zentrale Fragestellung:

**Welche Trainingsanweisungen sollte ein Trainer seinem Athleten geben, damit er seine maximale Leistung erbringen kann?**

Welche körperlichen Voraussetzungen sind für den Kugelstoßer günstig?

#### Bestleistungen Männer 1995 (Stand 13.6.95)

##### Kugelstoßen

20,84 Buder (TV Wattenscheid)  
20,21 Herbrand (B.Leverkusen)  
19,49 Urban (LG Wedel/Pinneberg)  
19,29 Reinhardt (TV Wattenscheid)  
18,95 Dück (Q.Fürth/München)  
18,65 Kahles (MTG Mannheim)  
18,34 Mertens (LG Göttingen)  
18,21 Krämer (LC Rehlingen)  
18,14 Natho (OSC Berlin)  
18,12 Deuschle (LG Stuttgart)  
18,06 Hartel (OSC Berlin)  
17,96 Föhrenbach (TV Gernsbach)  
17,79 Bock (SC Magdeburg)  
17,72 Beck (LG Stuttgart)  
17,63 R.Bartels (Neubrandenburg) J  
17,60 Plingsten (Steinhuder Meer)  
17,58 Schwarz (LG Göttingen)  
17,43 Dittmar (LG Odra-Hörse)

#### Bestleistungen Frauen 1995 (Stand 13.6.95)

##### Kugelstoßen

20,48 Kumbemuss (Neubrandenbg.)  
20,05 Neimke (SC Magdeburg)  
19,05 Storp (VfL Wolfsburg)  
19,03 Hammer (Q.Fürth/Mü.)  
17,83 Wittich (TV Wattenscheid)  
17,18 Mues (LG München)  
17,13 Kleinert (SC Magdeburg)  
15,66 Hees (TSV Ballmannsweiler)  
15,59 Beyer (TV Wattenscheid) J  
15,57 Berger (OSC Berlin)  
15,49 Beckel (Schweriner SC) J  
15,35 Petsch (B.Leverkusen)  
15,28 Grethammer (LG München)  
15,05 Koch (LG Stuttgart)  
14,96 Will (LG Sigmaringen)  
14,73 Harms (LG Herstedt-U.) J  
14,71 Krauß (TV Schwabach)  
14,64 Tornow (TV Neu-Iserburg)  
14,54 Moos (LC Rehlingen) J  
14,39 Müller-Schmidt (LG Ortenau)

aus: Leichtathletik Nr.24 vom 13.6.95

Welche Größen beeinflussen die Weite beim Kugelstoßen?

Welche Größen sind besonders sensitiv, welche eher robust?

Was muß man über das Kugelstoßen wissen, um eine optimale Förderung zu garantieren?

Versucht man dieses Trainingsprogramm für Kugelstoßer zu erstellen, geschieht dies sicherlich unter Berücksichtigung der Entwicklung von Trainingsanweisungen, die eine maximale Stoßweite garantieren.

## Übersetzung in ein Modell

Ausgangspunkt der Überlegungen zu dieser Problematik muß wohl die Technik des Kugelstoßers sein, denn nur bis zum Abstoß hat der Mensch Einfluß auf die Weite des Stoßes.

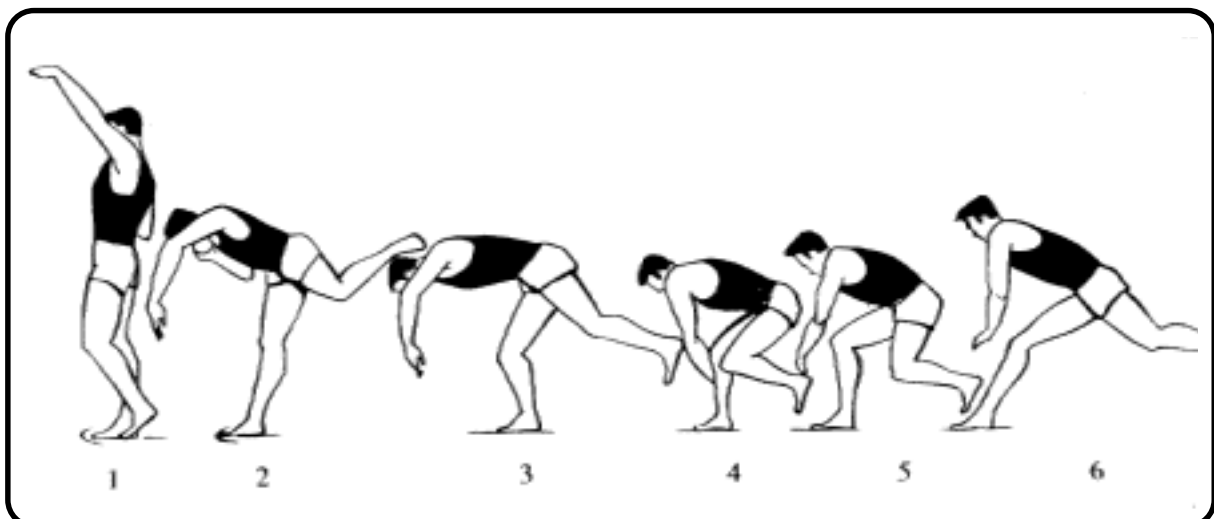
### Der Bewegungsablauf beim Kugelstoßen

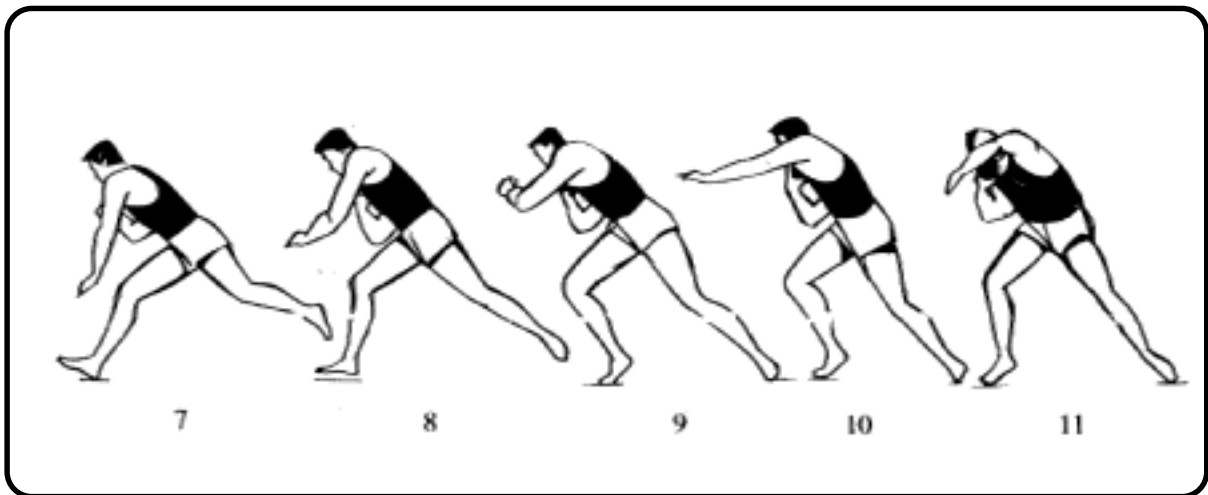
Zum besseren Verständnis zeigt die folgende Sequenz den Bewegungsablauf beim Kugelstoßen.

Die Kugelstoßbewegung wird in folgende Bewegungsphasen unterteilt:

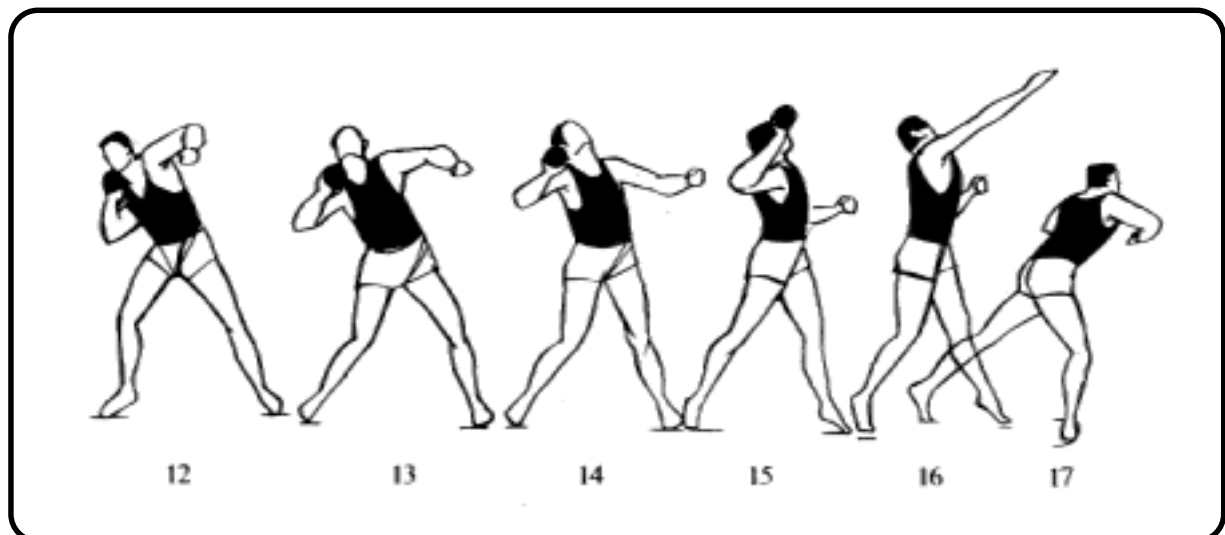
- 1. Auftaktphase** (Ausgangsstellung bis Einnehmen der Startposition - tiefste Lage der Kugel)
- 2. Startphase** (Startposition bis Abstoß des rechten Beines zum Angleiten)
- 3. Angleitphase** (letzter Abdruck re. vor dem Angleiten bis Aufsetzen re. nach dem Angleiten)
- 4. Übergangsphase** (Aufsetzen re. nach dem Angleiten bis Aufsetzen li. nach dem Angleiten)
- 5. Abstoßphase** (Aufsetzen li. nach dem Angleiten bis Abstoß)

Die Abbildungen 1 bis 4 verdeutlichen die Auftaktphase. Der Sportler versucht eine günstige Ausgangslage für einen optimalen Beschleunigungsweg einzunehmen. Die Bilder 5 bis 9 verdeutlichen die Start- und Angleitphasen, bei der ein erster positiver Beschleunigungsstoß erzeugt und außerdem eine Vorspannung durch Einleiten einer Verwindung aufgebaut werden soll.





Die Übergangsphase (Bild 10 bis 11) stellt den Übergang zwischen Angleitbewegung und Abstoßbewegung dar. Außerdem beginnt hier der zweite positive Beschleunigungsstoß.



In Bild 12 beginnt die Abstoßphase, in der die Hauptbeschleunigung erfolgen soll und die Geschwindigkeit auf die Kugel übertragen werden soll. Die Bildsequenz ist aus Schmolinsky, Leichtathletik 1980.

Am Anfang einer Unterrichtseinheit kann das Entwickeln eines Modells für die Flugbahn der Kugel stehen. Einen möglichen Verlauf zeigen die Aufgaben 1-7. Direkt danach folgen die Lösungen.

Die Aufgaben 8 und 9 beschäftigen sich mit der Variation der verschiedenen Einflußgrößen. Hier sollen die Abhängigkeiten der einzelnen Einflußgrößen erkannt und dargestellt werden. Die Bearbeitung dieses Arbeitsblatts stellt gleichzeitig einen möglichen Verlauf des Unterrichts dar.

Bei den Aufgaben 10-15 steht der Schüler vor der Aufgabe, den optimalen Abstoßwinkel für eine maximale Stoßweite zu bestimmen. Es zeigt gleichzeitig einen Verlauf des Unterrichts

auf. Außerdem wird an dieser Stelle deutlich, welchen Einfluß die unterschiedlichen Größen auf die Stoßweite haben.

## Aufgaben

### Aufgaben 1- 3

1. Stelle dar, welche Größen die Stoßweite beeinflussen. Benutze dazu die Bildreihe zum Kugelstoßen und die übrigen Materialien.
2. Begründe, warum der Bewegungsablauf des Kugelstoßers einen solchen Verlauf hat?
3. Welche Flugbahn, vermutest Du, nimmt die Kugel? Fertige eine Skizze an..

## Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

1. Die Stoßweite der Kugel ergibt sich aus folgenden Größen:

- Abfluggeschwindigkeit  $v$
- Abflughöhe  $h$
- Abflugwinkel  $\alpha$
- Luftwiderstand  $k$
- Erdbeschleunigung  $g$ .

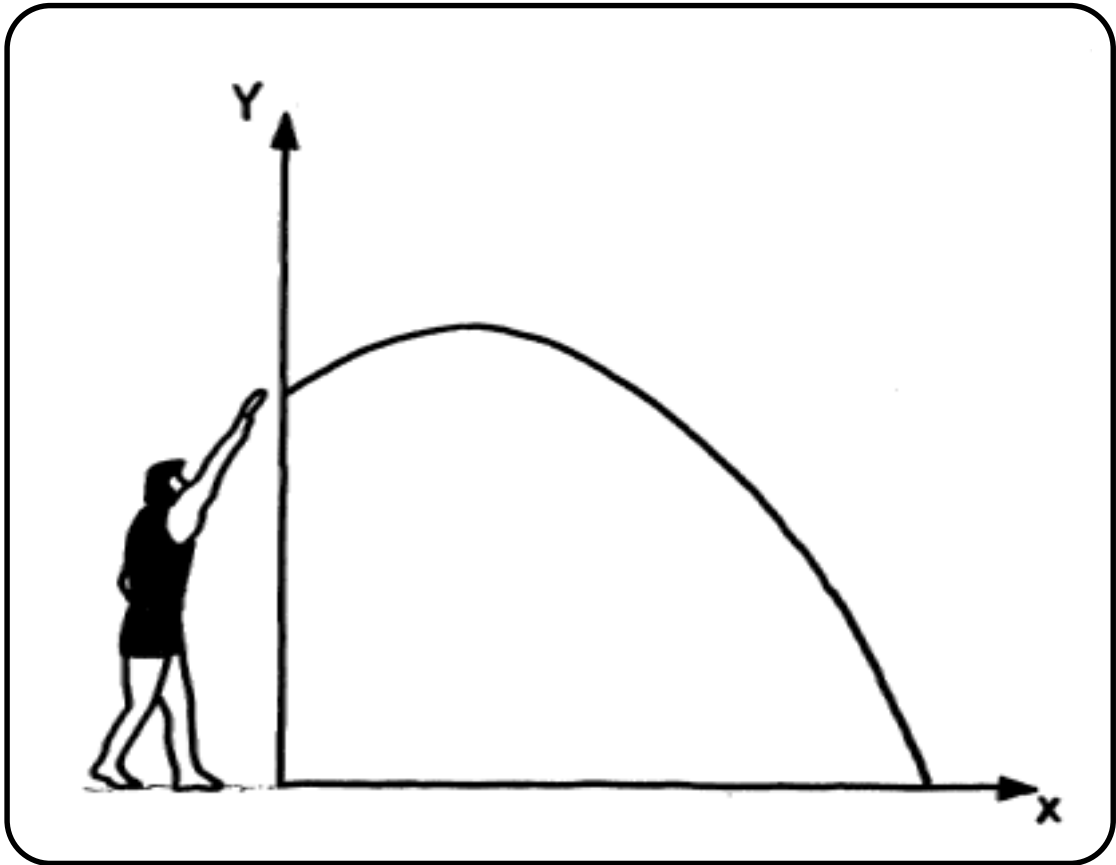
Dabei hat der Mensch keinen Einfluß auf den Luftwiderstand und die Erdbeschleunigung. Hier soll der Luftwiderstand vernachlässigt und die Erdbeschleunigung mit  $9,81m/s^2$  angenommen werden.

Die Abflughöhe der Kugel ist auch nicht weiter zu beeinflussen, da die Größe des Sportlers unveränderlich ist. Allerdings könnte man später eine Aussage darüber treffen, ob die Größe des Sportlers Einfluß auf die Stoßweite hat. Insbesondere sind also die Abfluggeschwindigkeit und der Abflugwinkel zu betrachten.

2. Der Bewegungsradius eines Kugelstoßers ist sehr begrenzt, der Stoßer darf den Ring während des Stoßes nicht verlassen. Deswegen muß er auf einer recht kurzen Anlaufstrecke versuchen, der Kugel eine möglichst hohe Geschwindigkeit zu geben.

Außerdem ist die Kugel schwer, so daß es nicht effektiv wäre, mit gestrecktem Arm Schwung zu holen. Die Regeln beim Stoßen erlauben dieses auch nicht.

3.



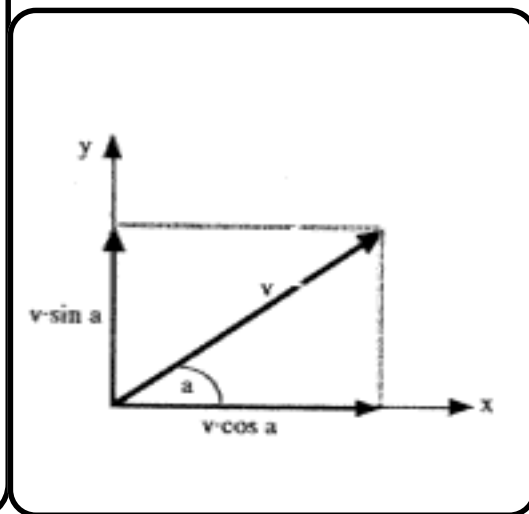
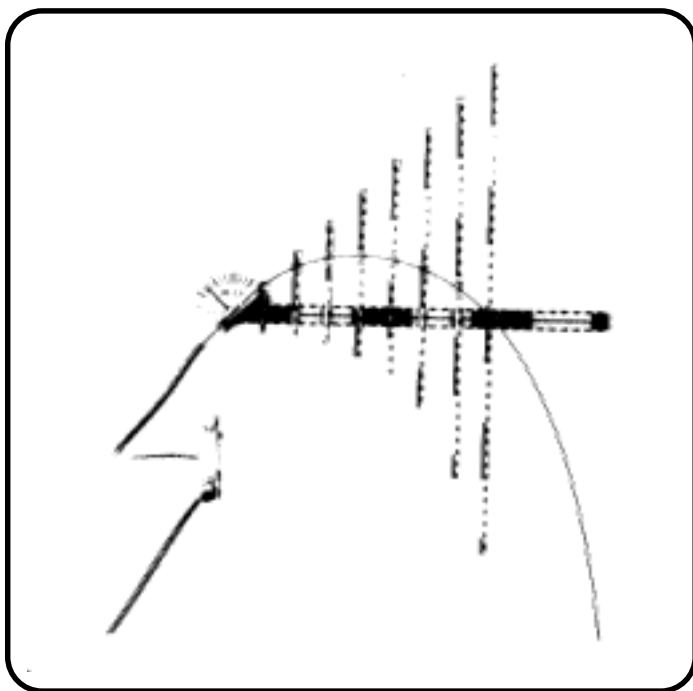
An dieser Stelle ist zu vermuten, daß die Flugkurve wahrscheinlich einer Parabel entsprechen wird. Um die Funktionsgleichung für diese Flugkurve aufstellen zu können, sind einige Vorüberlegungen anzustellen.

### Einige Erkenntnisse aus der Mechanik

Flugbahnen dieser Art verdeutlichen den sogenannten "schiefen Wurf". Beim schiefen Wurf wird ein Körper unter beliebigem Winkel mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abgeworfen. Nach dem Unabhängigkeitsprinzip läßt sich der schiefe Wurf aus den beiden Sonderfällen des waagerechten und senkrechten Wurfes zusammensetzen.

Dabei vollführt die Kugel einmal eine gleichförmige Bewegung in der durch den Austrittswinkel gegebenen Richtung unabhängig von der gleichmäßig beschleunigten Fallbewegung. Der in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg  $s$  hängt von der Geschwindigkeit  $v$  ab:  $s_1 = vt$ . Durch die Erdanziehungskraft bewegt sie sich aber gleichzeitig in einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung senkrecht nach unten. Hier berechnet sich der in der Zeit  $t$  zurückgelegte Weg  $s$  nach der Formel  $s_2 = \frac{g}{2}t^2$ , wobei  $g$  die Konstante für die Erdbeschleunigung ist  $\left(g = 9,81 \frac{m}{sec^2}\right)$ .





aus: Schmidt, Methoden des Mathema-

tikunterrichts in Stichwörtern und Beispielen

Die Bahnkurve resultiert aus der Überlagerung dieser beiden Bewegungen.

Für die mathematische Bearbeitung ist es günstig, die Bewegung in eine x-Komponente und in eine y-Komponente zu zerlegen. Die gleichmäßig geradlinige Bewegung liefert in beiden Komponenten einen Anteil, die beschleunigte Fallbewegung nur für die y-Komponente. Für einen Abwurfwinkel  $\alpha$  gilt dann:

$$x(t) = vt \cos(\alpha)$$

$$y(t) = vt \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

Diese Beschreibung einer Kurve nennt man die Parameterdarstellung einer Kurve, der Parameter ist in diesem Fall die Zeit  $t$ .

Die eben entwickelten Gleichungen beschreiben die Bahnkurve des schiefen Wurfs. Durch diese Gleichungen werden die Koordinaten eines Punktes ( $x(t)/y(t)$ ) auf der Flugbahn angegeben, der nach der Zeit  $t$  erreicht wird. Eliminiert man die Zeit  $t$ , so erhält man die explizite Darstellung der Bahnkurve:

$$y(x) = x \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 (\cos(\alpha))^2} x^2$$

Dieses Modell des schiefen Wurfs beschreibt den Kugelstoß.

Will man mit Schülern dieses Modell erarbeiten, so ist es notwendig zu verdeutlichen, daß die Flugbahn der Kugel sich in zwei Bewegungen zerlegen läßt. Da die Theorie nicht allen sofort verständlich sein wird, sollte möglichst anschaulich - z. B. mit Bildern - gearbeitet werden.

## Aufgaben

### Aufgaben 4-7

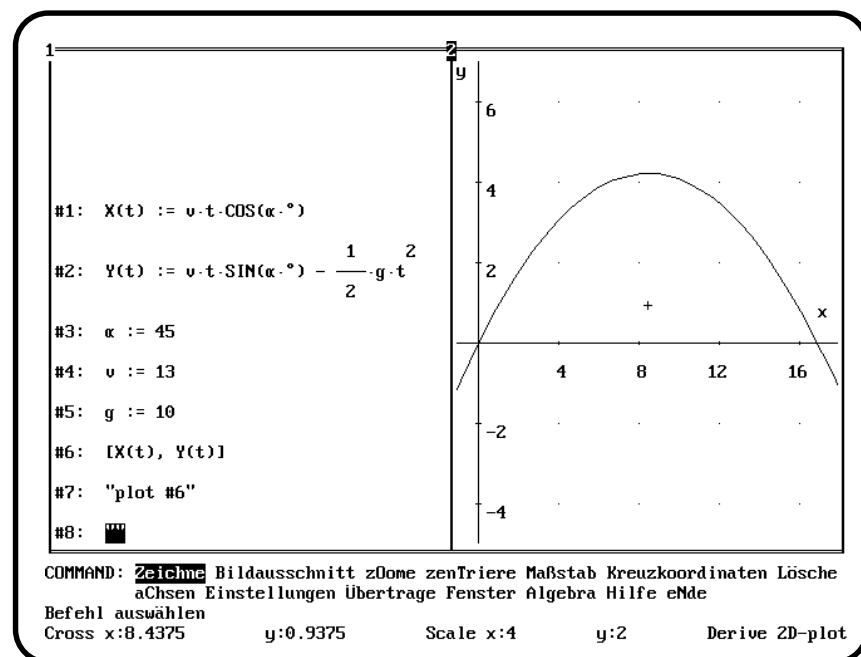
4. Plote die Parameterdarstellung der Bahnkurve.
5. Plote die explizite Darstellung der Bahnkurve.
6. An dieser Stelle wird deutlich, daß die Flugkurve dem Verlauf einer Parabel folgt. Wie kann man rechnerisch zeigen, daß die Bahnkurve eine Parabel ist?

Beide Funktionen haben die Zeit als Parameter. Zeige durch Elimination des Parameters  $t$ , daß sich eine quadratische Funktion ergibt.

7. Was ändert sich an der Flugbahn, wenn die Höhe des Sportlers berücksichtigt wird, aus der der Sportler abstößt?

## Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

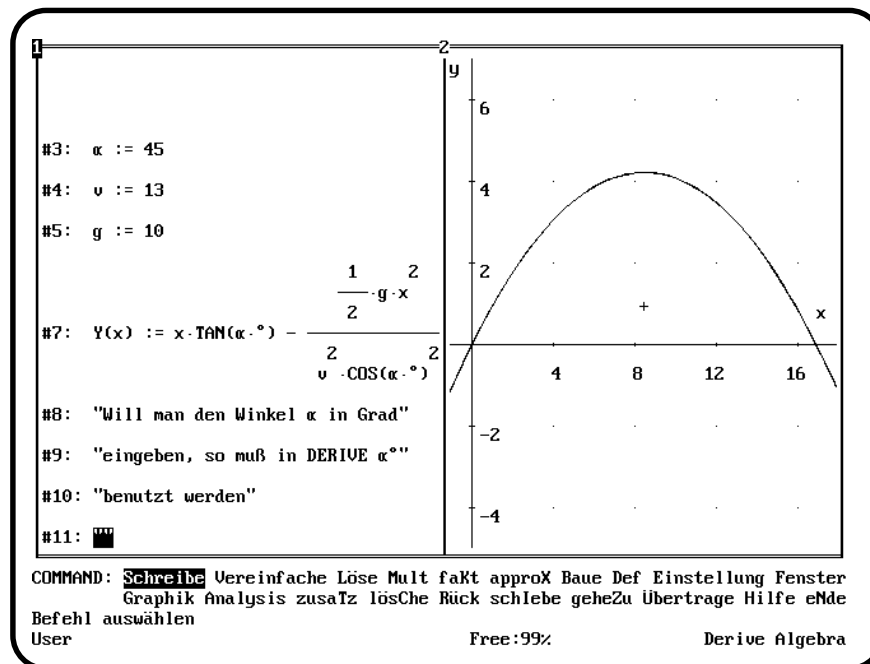
4.



An dieser Stelle wurden für  $\alpha, g, v$  die konkreten Werte  $\alpha = 45$ ,  $v = 13$ ,  $g = 10$  eingegeben.

Die Umrechnung in das Bogenmaß wird durch  $\alpha \cdot \text{deg} = \alpha^\circ$  erreicht (vgl #1 und #2).

5.

6.  $x(t)$  der Parameterdarstellung der Bahnkurve ist nach  $t$  aufzulösen:

$$t = \frac{x}{v \cos(\alpha)}$$

Einsetzen in  $y(t)$  liefert:

$$y(x) = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v \cos(\alpha)} \right)^2 + \frac{v \sin(\alpha) x}{v \cos(\alpha)}$$

$$= x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v^2 (\cos(\alpha))^2} x^2$$

Die Betrachtungen haben gezeigt, daß der Graph der Parameterdarstellung und der expliziten Darstellung - wie erwartet - ein und derselbe ist. Ebenso lassen sich die Darstellungen ineinander überführen.

7. Berücksichtigt man die Höhe  $h$ , so wird der Graph der Bahnkurve um  $h$  Einheiten in Richtung der  $y$ -Achse verschoben. Die Funktionsgleichung lautet dann:

$$y(x) = x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v^2 (\cos(\alpha))^2} x^2 + h$$

## Variation der verschiedenen Einflußgrößen

Mit Hilfe dieser Bahnkurve läßt sich gut modellieren, welche Größen Einfluß auf die maximale Stoßweite haben. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die Variation von Abstoßgeschwindigkeit, Abstoßwinkel und Abstoßhöhe. Insbesondere soll dabei der Einfluß dieser Größen auf die maximale Stoßweite erkannt werden.

## Aufgaben

### Aufgaben 8-9

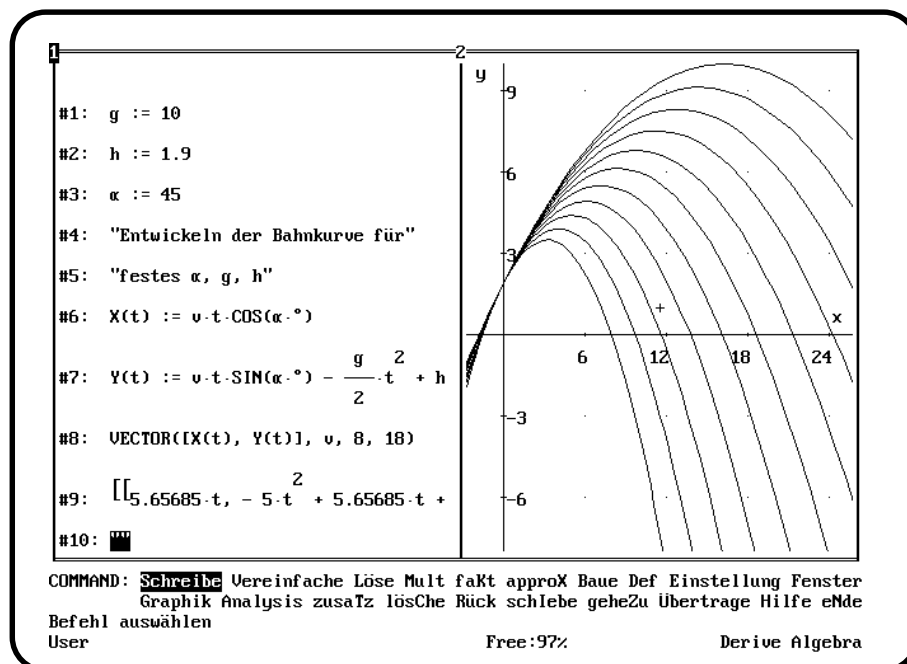
8. Zeichne die Bahnkurve für verschiedene Abstoßgeschwindigkeiten. lasse dabei den Winkel  $\alpha$  und die Abstoßhöhe  $h$  fest

Interpretiere Deine Graphik und erläätere die Zusammenhänge.

9. Zeichne die Flugkurve für verschiedene Abstoßwinkel bei festen Werten von  $v$  und  $h$ .
- 9.1. Variiere dabei den Winkel deutlich. Schätze dann den optimalen Winkel, d. h. den Winkel, der zur optimalen Stoßweite gehört.
- 9.2. Variiere nun den Winkel in einem kleinen Bereich um den Schätzwert.
- 9.3. Untersuche, welchen Einfluß unterschiedliche Abstoßwinkel in der Nähe des optimalen Winkels auf die Stoßweite haben.

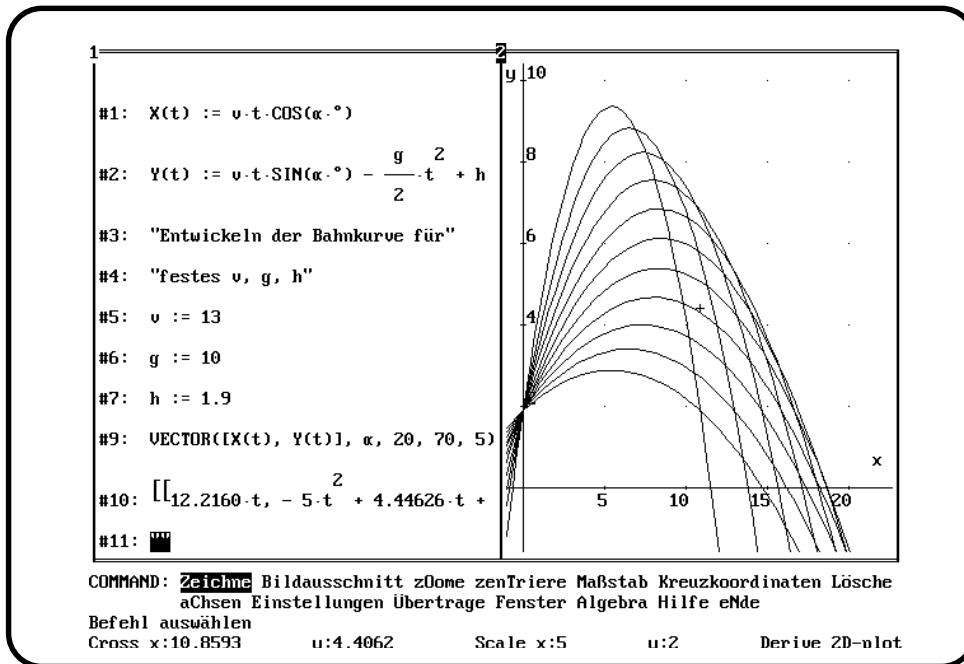
## Lösungsvorschläge

8. Mit Hilfe von DERIVE kann man eine Parabelschar dem Scharparameter  $v$  erzeugen:



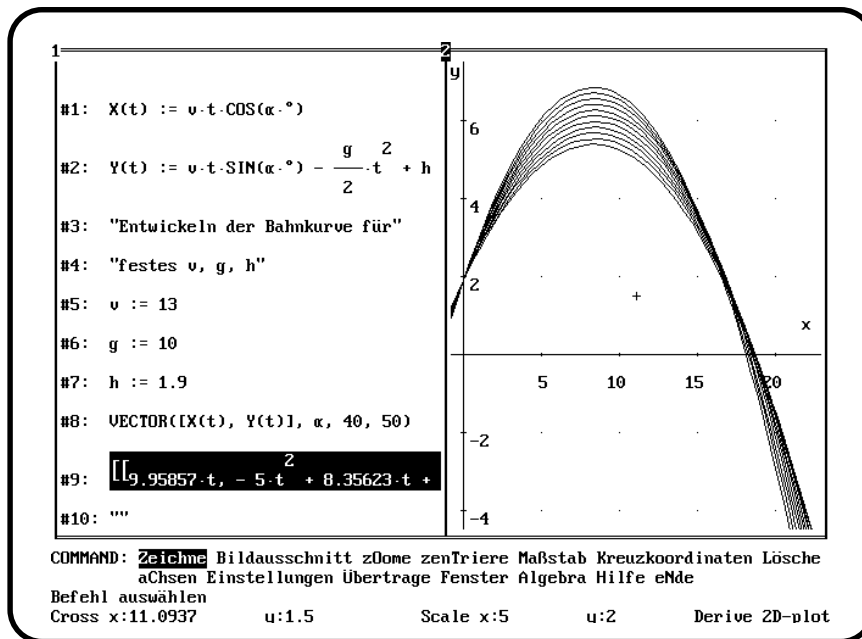
Variiert man die Abstoßgeschwindigkeit, so erkennt man mit Hilfe der Graphik den folgenden Zusammenhang: je größer die Abstoßgeschwindigkeit, desto weiter fliegt die Kugel. Die Differenzen zwischen benachbarten Werten werden immer größer.

9.1.



Der Abstoßwinkel wurde deutlich variiert. Man erkennt, daß es einen optimalen Abstoßwinkel geben muß. Dieser liegt im Bereich von 40° und 50°.

9.2.



9.3. Verändert man den Abstoßwinkel, wirkt sich auch das auf die Stoßweite aus, allerdings nicht so deutlich wie eine veränderte Abstoßgeschwindigkeit. Die Graphiken aus den Aufgaben 9.1. und 9.2. verdeutlichen, daß ein veränderter Abstoßwinkel eine unterschiedliche Höhe der Flugkurve bewirkt.

## Berechnen der maximalen Stoßweite und des optimalen Abstoßwinkels

Es soll nun die Stoßweite in Abhängigkeit von den verschiedenen Einflußgrößen berechnet werden. Die Aufgaben 8 und 9 lassen vermuten, daß es einen optimalen Abstoßwinkel geben muß. Läßt sich dieser Winkel berechnen?

### Aufgaben

#### Aufgaben 10-15

- 10.** Ermittle einen Term  $S(\alpha, v, h)$  für die Stoßweite in Abhängigkeit von  $\alpha, h, v$  auf.
- 11.** Bestätige die gewonnenen Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben, indem Du mit Hilfe dieses Terms die verschiedenen Zusammenhänge graphisch darstellst. Stelle dazu den Term nur in Abhängigkeit von  $\alpha$  oder  $h$  oder  $v$  dar und lasse die anderen Parameter fest.  
Was bewirkt eine Variation der Einflußgrößen?  
Interpretiere den Zusammenhang.  
Gibt es eine maximale Stoßweite?
- Wie ändert sich die Stoßweite  $S$ , wenn der Abstoßwinkel geändert wird?  
Welchen Einfluß hat die unterschiedliche Länge der Sportler auf die Stoßweite?  
Wie verändert sich die Stoßweite, wenn die Abstoßgeschwindigkeit geändert wird?  
Fertige zu jeder dieser drei letzten Fragestellungen eine Zeichnung an und interpretiere die Graphiken.
- 12.** Die bisher erkannten Zusammenhänge lassen die Vermutung zu, daß es einen optimalen Abstoßwinkel geben muß, um eine maximale Stoßweite zu erzielen.
- Um die maximale Stoßweite in Abhängigkeit von  $\alpha$  zu ermitteln, liegt es nahe, die Gleichung  $\frac{d}{d\alpha}S(\alpha, v, h) = 0$  zu lösen. Selbst mit Hilfe von DERIVE gelingt dies nicht.
- Einfacher wird es, wenn man ausnutzt, daß am Auftreffpunkt der Kugel  $x(t) = S$  und  $y(t) = 0$  gilt. Eingesetzt in die Bahnkurve  $y(x)$  liefert dies
- $$S(\alpha, v, h) = tv \cos(\alpha) \text{ und } h + vt \sin(\alpha) - \frac{g}{2}t^2 = 0.$$
- 13.** Bestimme den optimalen Abstoßwinkel.

14. Erzeuge mit Hilfe von DERIVE eine Tabelle, in der jeweils die Stoßweiten für verschiedene Abstoßgeschwindigkeiten und Längen der Sportler angegeben werden.

Interpretiere die Tabelle.

15. Stelle den in der Tabelle aus Aufgabe 14 erkannten Zusammenhang graphisch dar.

## Lösungsvorschläge zu den Aufgaben

10. Will man die Stoßweite  $S$  ermitteln, so ist die Gleichung

$y(x) = 0$  und damit

$$x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v^2(\cos(\alpha))^2}x^2 + h = 0$$

zu lösen.  $S$  entspricht in diesem Fall der positiven Nullstelle, welche die Stoßweite angibt. Mit Hilfe von DERIVE lassen sich die Nullstellen leicht errechnen.

Die Stoßweite  $S$  wird in Abhängigkeit von  $\alpha, v, h$  angegeben. Die unterlegte Zeile des folgenden DERIVE-Bildschirms gibt die entscheidende Nullstelle an:

1: 
$$Y(x) := x \tan(\alpha) - \frac{g}{2v^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + h$$

2: "Stoßweite:Y(x)=0 ist nach x aufzulösen"

3: 
$$Y(x) = 0$$

4: 
$$x \tan(\alpha) - \frac{g x^2}{2v^2 \cos^2(\alpha)} + h = 0$$

5: 
$$x = \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} - \frac{\cos(\alpha) |v| \sqrt{v^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g}$$

6: 
$$x = \frac{\cos(\alpha) |v| \sqrt{v^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} + \frac{v^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g}$$

---

COMMAND: **Author** Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage  
Options Plot Quit Remove Simplify Transfer move Window approx

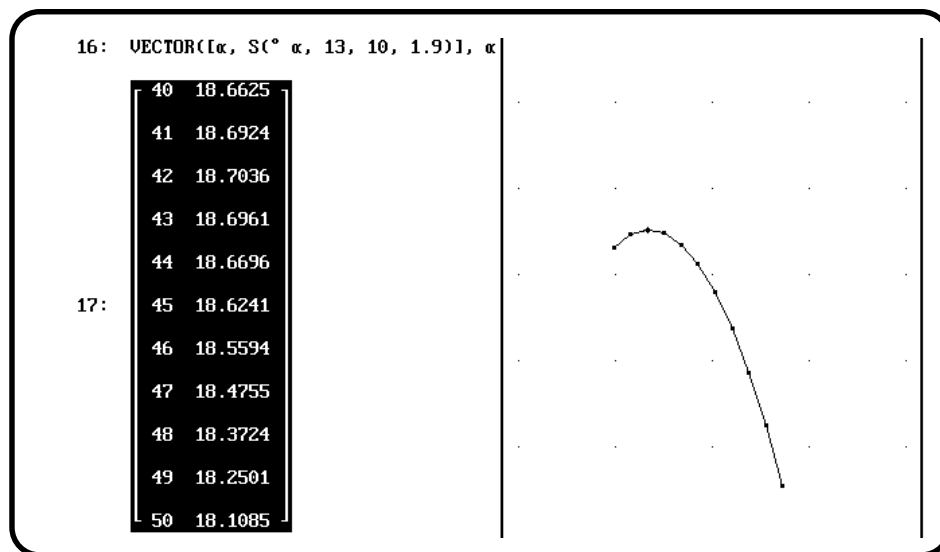
Enter option

User A:ST086.MTH Free:100% Derive Algebra

Da  $|v| > 0$ , entfallen die Betragsstriche. Damit erhält man folgenden Term für die Stoßweite:

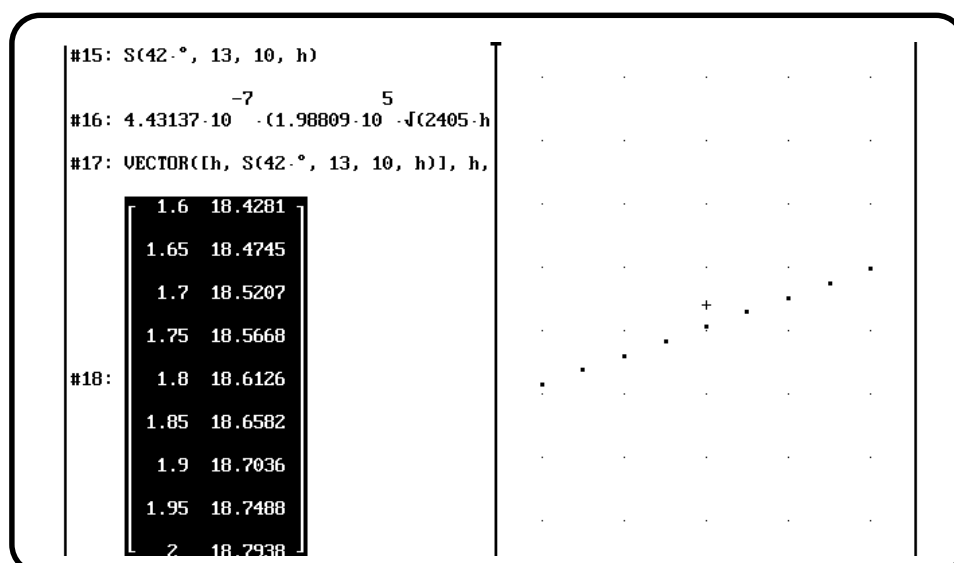
$$S(\alpha, v, h) = \frac{\cos(\alpha)v \sqrt{v^2(\sin(\alpha)^2) + 2gh} + v^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

11. Will man unter Festlegung der Größen  $v$  und  $h$  hinterfragen, welche Auswirkungen ein veränderter Abflugwinkel auf die Weite hat, so stellt man hier mit Hilfe der folgenden Graphik fest, daß es einen optimalen Winkel geben muß, für den die Stoßweite maximal wird. Dieser Winkel liegt genau dort, wo der Scheitelpunkt der Parabel ist.



Im folgenden Fall werden die anderen zwei Größen  $\alpha$  und  $v$  festgelegt. Bei der Festlegung des Winkels  $\alpha$  soll berücksichtigt werden, was die Überlegungen zur Änderung des Abstoßwinkels ergeben haben.

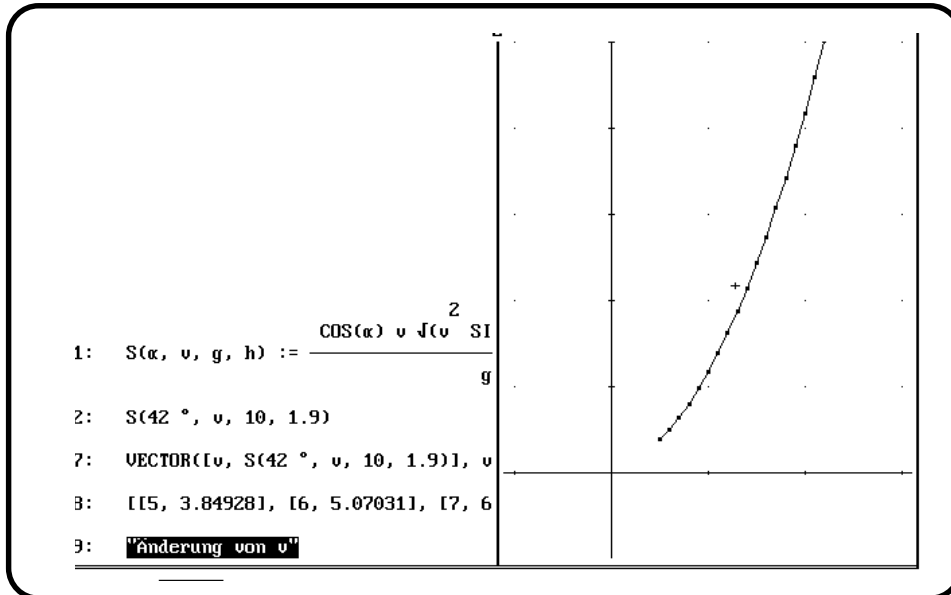
$\alpha$  soll jetzt  $42^\circ$  betragen. ( $v = 13 \frac{m}{s}$ ,  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )





Sind die Sportler unterschiedlich groß, so kann wieder festgestellt werden, daß sich die Stoßweite der Kugel mit zunehmender Größe des Sportlers erhöht bei unverändertem Winkel und gleicher Abstoßgeschwindigkeit.

In der nachfolgenden Zeichnung bleiben also die Größen  $\alpha$  und  $h$  konstant.



Plottet man die Funktion der Stoßweite in Abhängigkeit von der Abstoßgeschwindigkeit, so wird deutlich, daß die Stoßweite mit zunehmender Geschwindigkeit  $v$  größer wird.

12.  $t$  wird eliminiert, dann wird nach  $\alpha$  differenziert. Die Rechenarbeit kann wieder das Werkzeug DERIVE übernehmen.

#1: **S(alpha) :=**

#2: 
$$\theta = S(\alpha) \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot S(\alpha)^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos(\alpha)} + h$$

#3: 
$$\frac{d}{d\alpha} \left[ \theta = S(\alpha) \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot S(\alpha)^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos(\alpha)} + h \right]$$

#4: 
$$\theta = \tan(\alpha) \cdot \frac{d}{d\alpha} S(\alpha) + \frac{S(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2} - \frac{g \cdot S(\alpha) \cdot \frac{d}{d\alpha} S(\alpha)}{v^2} - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot S(\alpha)^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos(\alpha)^3}$$

#5: "zusatz Substituiere Ausdruck in #4"

Da  $\frac{d}{d\alpha}S(\alpha) = 0$  für den optimalen Abstoßwinkel gilt, ersetzt man diesen Teil in der Gleichung #4 durch Null.

$$\begin{aligned} \#6: \quad 0 &= \tan(\alpha) \cdot 0 + \frac{S(\alpha) \cdot \sin(\alpha)^2 - \frac{g \cdot S(\alpha) \cdot 0}{v^2}}{\cos(\alpha)^2} - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot S(\alpha)^2}{v^2 \cdot \cos(\alpha)^3} + S(\alpha) \\ \#7: \quad 0 &= S(\alpha) \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot S(\alpha)^2}{v^2 \cdot \cos(\alpha)^3} + S(\alpha) \\ \#8: \quad &\text{"zusatz Substituiere Ausdruck in \#7"} \\ \#9: \quad 0 &= k \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot k^2}{v^2 \cdot \cos(\alpha)^3} + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#7: \quad 0 &= S(\alpha) \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot S(\alpha)^2}{v^2 \cdot \cos(\alpha)^3} + S(\alpha) \\ \#8: \quad &\text{"zusatz Substituiere Ausdruck in \#7"} \\ \#9: \quad 0 &= k \cdot \tan(\alpha) - \frac{g \cdot \sin(\alpha) \cdot k^2}{v^2 \cdot \cos(\alpha)^3} + k \\ \#10: \quad k &= 0 \\ \#11: \quad k &= \frac{v^2 \cdot \cot(\alpha)}{g} \\ \#12: \quad &\text{"k ist die Stoßweite S in Abhängigkeit von \alpha"} \end{aligned}$$

DERIVE kann an dieser Stelle nicht nach  $S(\alpha)$  auflösen, deswegen wird hier  $S(\alpha)$  durch  $k$  ersetzt.

$$S = \frac{v^2}{g \tan(\alpha)}$$

Zur Erinnerung,  $S$  gibt die maximale Stoßweite an.

13. Um den optimalen Abstoßwinkel zu bestimmen, wird  $S$  wieder in obige Gleichung eingesetzt. Die Rechenarbeit kann auch hier DERIVE überlassen werden:

$$\begin{aligned} \#1: & \frac{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \cdot \tan(\alpha) + h = \frac{g \cdot \left[ \frac{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)}{g} \right]^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\ \#2: & \frac{v^2}{g} + h = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot \sin^2(\alpha)} \\ \#3: & \alpha = \text{ATAN} \left[ \frac{v \cdot \sqrt{(g \cdot h + v^2)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h + v^2}{g \cdot h + v^2}}}{2 \cdot g \cdot h + v^2} \right] \end{aligned}$$

Löst man die Gleichung mit den üblichen Mitteln in DERIVE, so erhält man fünf Lösungen, von denen eine in Zeile #3 der letzten Abbildung zu sehen ist.

Der Term  $\frac{v^2}{g} + h = \frac{v^2}{2g \sin^2(\alpha)}$  in Zeile #2 läßt sich per Hand vereinfachen und auflösen zu

$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{v^2}{2(hg + v^2)}}$ . Er entspricht der einen Lösung in DERIVE, die durch Umformung des Terms in Zeile #3 entsteht.

Der optimale Abstoßwinkel  $\alpha$  ist abhängig von der Abstoßgeschwindigkeit  $v$  und von der Größe  $h$  des Sportlers. Die Variation von  $g$  soll auch hier vernachlässigt werden.

Bemerkenswert ist, daß  $\alpha$  unabhängig ist von der Abstoßgeschwindigkeit, wenn die Abstoßhöhe Null ist.

14. Mit DERIVE läßt sich eine Tabelle erzeugen, an der einige Zusammenhänge abgelesen werden können. In der ersten Spalte der Einzeltabelle steht die Abstoßgeschwindigkeit, in der zweiten Spalten der Einzeltabelle der optimalen Abstoßwinkel in Abhängigkeit von  $\alpha$  bei dieser Geschwindigkeit.

```

#1:      ASIN [ sqrt( (v^2) / (2 * (h * g + v^2)) ) ] * 180
alpha(v, h) := -----
                1

#2: VECTOR(VECTOR([v, alpha(v, h)], v, 10, 15), h, 1.6, 2, 0.1)

#3: g := 10

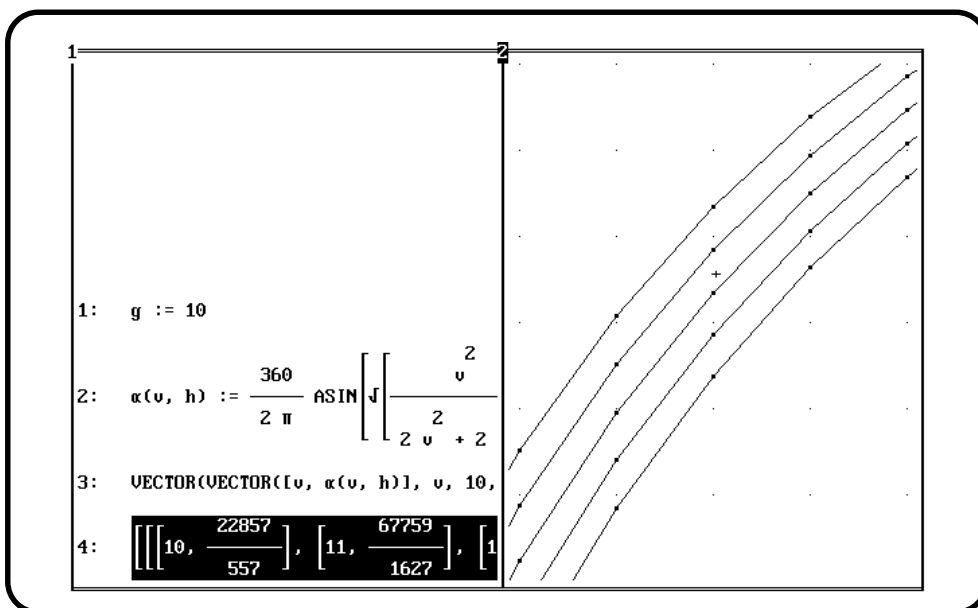
#4: " [v, alpha(v, 1.6)], [v, alpha(v, 1.7)], [v, alpha(v, 1.8)], [v, alpha(v, 1.9)], [v, alpha(v, 2)]

#5: [ [10, 41.0359], [11, 41.6465], [12, 42.1303], [13, 42.5192], [14, 42.8358], [15, 43.0966] ],
     [ [10, 40.8226], [11, 41.4619], [12, 41.9693], [13, 42.3779], [14, 42.7111], [15, 42.9858] ],
     [ [10, 40.6128], [11, 41.2797], [12, 41.8102], [13, 42.2381], [14, 42.5875], [15, 42.8759] ],
     [ [10, 40.4062], [11, 41.1], [12, 41.6529], [13, 42.0997], [14, 42.4649], [15, 42.7669] ],
     [ [10, 40.2], [11, 40.9], [12, 41.4529], [13, 41.9007], [14, 42.2649], [15, 42.5369] ]

```

- Je größer die Abfluggeschwindigkeit v ist, desto größer ist auch der optimale Abflugwinkel α.
- Je größer der Sportler ist, desto kleiner (wenn auch nur sehr wenig) ist der optimale Winkel α.

15. Der folgende DERIVE-Bildschirm verdeutlicht graphisch, wie der Winkel α (auf der y-Achse) von der Geschwindigkeit v (auf der x-Achse) und der Abstoßhöhe h des Sportlers abhängt. Die Länge des Sportlers ist diejenige Größe, die nicht zu verändern ist. Deshalb wird hier insbesondere der Zusammenhang zwischen v und α betrachtet. Jeder der folgenden Graphen ist der Graph für ein festes h. Der oberste Graph ist der Graph mit dem kleinsten h.



## Schlußbetrachtungen

Deutlich wird, daß die die Stoßweite beeinflussenden Größen die Abstoßgeschwindigkeit, der Abstoßwinkel und die Länge des Sportlers sind. Dabei ist generell der Luftwiderstand vernachlässigt worden.

Betrachtet man diese Größen im Zusammenhang, so ist zu erkennen, daß die entscheidende Größe die Abstoßgeschwindigkeit ist. Je schneller abgestoßen wird, desto weiter wird der Stoß. Dieses ist die entscheidende Größe, da eine kleine Änderung von ihr eine deutliche Änderung der Stoßweite bewirkt.

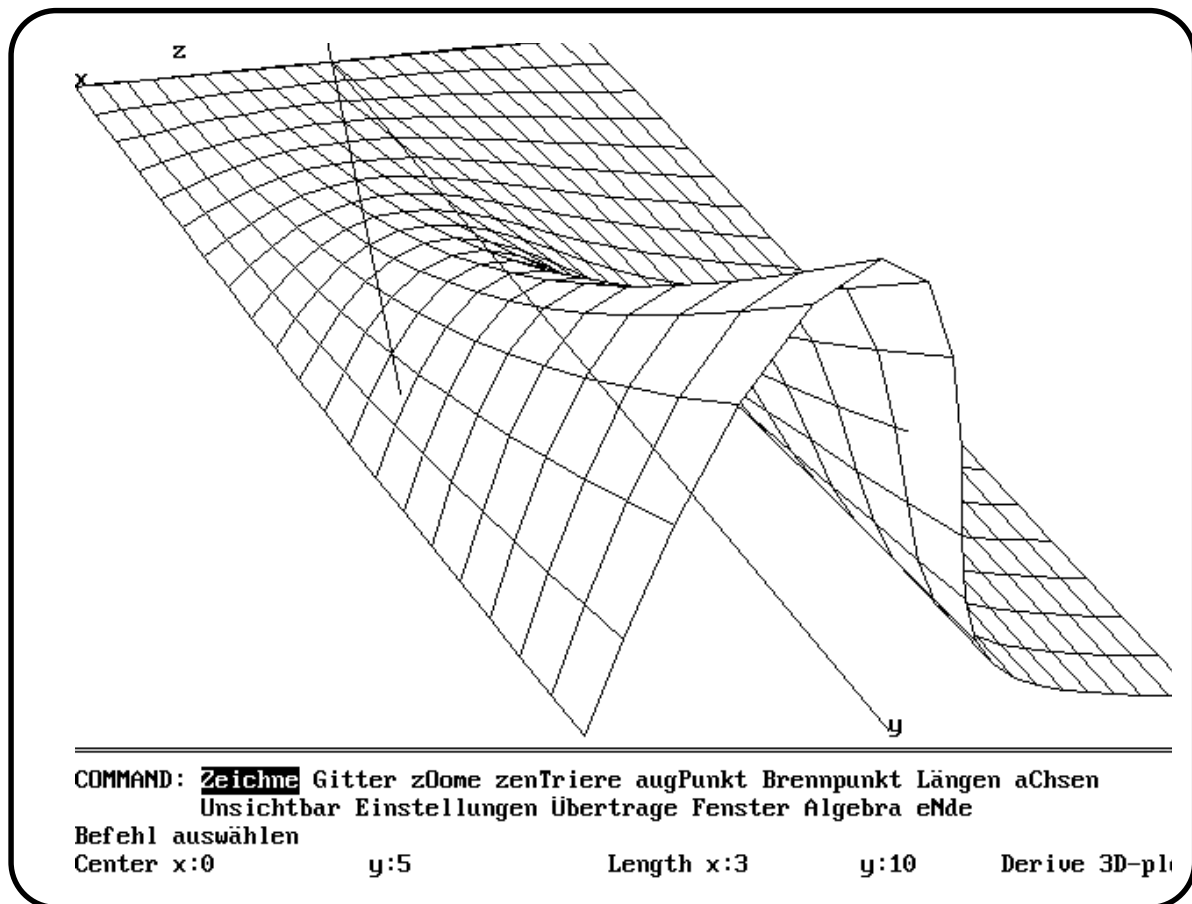
Eine Veränderung des Abstoßwinkels wirkt sich dagegen auch auf die Weite aus, jedoch in viel geringerem Maße als die Abstoßgeschwindigkeit, denn die Geschwindigkeit geht quadratisch in die Formel für die Weite ein. In Abhängigkeit von der Größe eines Sportlers und seiner maximalen Abstoßgeschwindigkeit läßt sich der optimale Winkel bestimmen. Eine Abweichung von ein paar Grad hat jedoch nur geringe Auswirkung auf die Weite.

Die Größe des Sportlers hat nur auf die Bestimmung des optimalen Winkels Einfluß.

Mit Hilfe von DERIVE ist es möglich, diesen Zusammenhang in einer "drei-dimensionalen" Graphik darzustellen. In diesem Fall ist auf der x-Achse der Winkel  $\alpha$ , auf der y-Achse die Geschwindigkeit  $v$  und auf der z-Achse die Stoßweite  $S$  abgetragen.

Will man die nachfolgende Graphik erzeugen, so ist zuerst  $S(\alpha, v, h)$  einzugeben. In diesem Fall sind folgende Einstellungen gewählt worden:

Längen:	x: 3	y: 10	z: 6
augPunkt:	x: 3	y: 15	z: 20
zenTriere:	x: 0	y: 5	z: 0



Anhand des Bildschirms erkennt man, daß eine höhere Geschwindigkeit ( $y$ -Achse) zu einer größeren Stoßweite ( $z$ -Achse) führt. Der optimale Winkel wird für eine größere Abstoßgeschwindigkeit etwas kleiner.

Als Trainingsanweisungen sollte ein Trainer seinem Sportler erklären, daß dieser einen bestimmten Könnensstand beim Kugelstoßen erreicht haben sollte. Die Grobform, besser die Feinform der Technik sollte vorhanden sein. Dazu gehört, daß das Einhalten eines günstigen Winkels geübt werden sollte.

Unter Berücksichtigung dieser Grundlagen muß der Sportler dann wissen, daß die Abstoßgeschwindigkeit die entscheidende Rolle spielt. Der Sportler sollte nicht so sehr Wert darauf legen, immer den optimalen Abstoßwinkel zu erreichen, denn eine kleine Abweichung von diesem hat nur eine kleine Abweichung von der maximalen Stoßweite zur Folge.

Der Kugelstoßer sollte deshalb viel Krafttraining machen, insbesondere Schnellkrafttraining, um seine körperlichen Voraussetzungen zu verbessern und um die Geschwindigkeit bei der Drehung zu erhöhen. Besonders wichtig ist dabei das Training der Arm- und Beinmuskeln, die in der Lage sein sollten, einerseits möglichst große Kräfte zu entwickeln und andererseits die Bewegung möglichst schnell auszuführen.

Will man dieses Thema weiter ausdehnen, so könnte man weiter Fragen stellen:

- Hat ein größerer Sportler bessere Chancen, weit zu stoßen?

- Wie verändert sich die Bahnkurve der Kugel unter Berücksichtigung von Reibung?
- Wie würde ein Stoß auf dem Mond verlaufen?

## Literaturangaben

Bardy, P., Beispiele mathematischer Modellbildung im Sport, in MU Jg. 34 Heft 6/1988, S. 29-42

Burghes, D. N., u.a., Applying Mathematics, A Course in Mathematical Modelling, New York John Wiley & Sons, 1982, hier Sec. 14 "Shot Putt Analysis", S. 97-105

Kuhlow, A., die Technik des Kugelstoßens der Männer bei den Olympischen Spielen 1972 in München, Frankfurt a. M. 1974

Kuhn, W., Physik, Band II, Braunschweig 1992

Zeitschrift Leichtathletik, Köln 1995

Schmidt, G. (Hrsg.), Methoden des Mathematikunterrichts in Stichwörtern und Beispielen 9/10, Braunschweig 1982

Schmolinsky, G., Leichtathletik, Berlin 1980

Universität Kaiserslautern, Zentrum für Techno- und Wirtschaftsmathematik, Die Modellierungswoche in der Pfalzakademie Lambrecht 1994