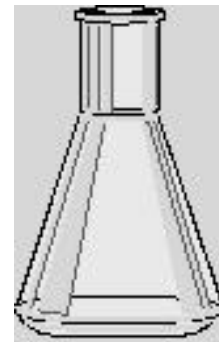
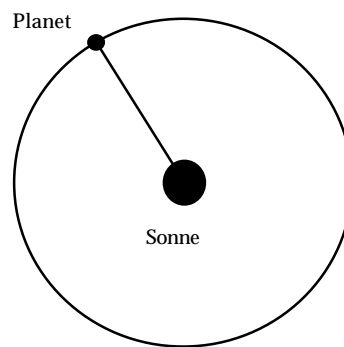


Entdecken von Gesetzen

Kurvenanpassung an Meßdaten

von Günter Schmidt

Themenbereich	
Statistik/Analysis	
Inhalte	Ziele
<ul style="list-style-type: none">• Hyperbel-, Exponential- und Potenzfunktionen• Transformation von Daten• Doppelt und halblogarithmisches Papier• Kurvenanpassung in Streudiagrammen	<ul style="list-style-type: none">• Beschreiben realer Phänomene mit Hilfe von Funktionen• Zielgerichtetes Transformieren von Daten und Funktionen zum Erkennen von Abhängigkeiten• Erstellen und Interpretieren von Streudiagrammen



Die Darstellung zweidimensionaler Daten im Streudiagramm führt in vielen Fällen zu Vermutungen über funktionale Abhängigkeiten. Aus dieser Darstellung und dem Sachzusammenhang gewinnt man Hypothesen, die mit Hilfe von geeigneten Datentransformationen und Kurvenanpassung untersucht werden. Dies führt zum Entdecken von Gesetzmäßigkeiten, die im günstigen Fall auch durch theoretische Modelle bestätigt werden.

An drei für den Mathematikunterricht geeigneten fächerübergreifenden Beispielen wird die Behandlung eines solch forschend-entwickelnden Verfahrens mit Hilfe empirisch gewonnener Daten aufgezeigt:

- Abkühlung von Kaffee (Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit)
- 3. Keplersches Gesetz (Umlaufzeit von Planeten in Abhängigkeit von der mittleren Entfernung zur Sonne)
- Chemische Reaktion (Reaktionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration eines Stoffes)

Beispiel 1 Abkühlung einer Kaffeetasse

In einem Analysis-Kurs wird die folgende „Anwendungsaufgabe“ zum Kapitel Exponentialfunktion gestellt:

Die Temperatur einer abkühlenden Flüssigkeit fällt mit einer Rate, die proportional ist zu der Differenz $T(t) - c$, wobei c die konstante Temperatur des umgebenden Mediums ist ($T > c$). Der Abkühlungsvorgang wird durch die Differentialgleichung $T'(t) = -k(T(t) - c)$ beschrieben.

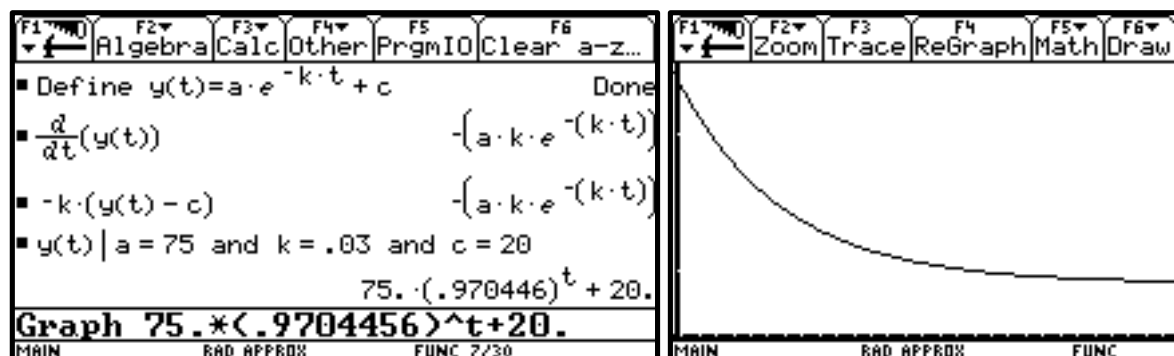
- (a) Zeigen Sie, daß $T(t) = a \cdot e^{-kt} + C$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.
 (b) Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion für $a=75$, $k=0.03$ und $c=20$. Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen
 (c) Die Temperatur einer frisch gebrühten Tasse Kaffee sei 95° und die umgebende Raumtemperatur 20° . Die Temperatur des Kaffees fällt in 2 Minuten auf 90° .

- Welche Temperatur hat der Kaffee nach 10 Minuten?
- Wie lange braucht er, bis er auf 30° abgekühlt ist?
- Geben Sie zunächst Schätzwerte an!



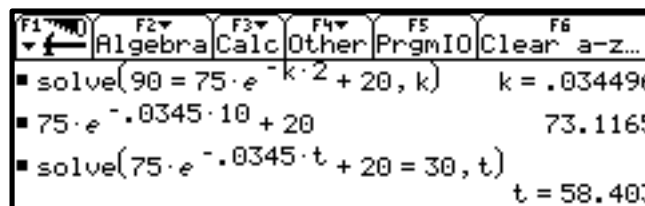
Lösungsskizze:

- (a) und (b)



Der Graph beginnt im Punkt $(0|95)$ und fällt dann monoton. Er verläuft zunehmend „flacher“ und nähert sich asymptotisch an die Gerade $y=20$ an.

- (c) Aus den gegebenen Daten bestimmen wir den Parameter k und ermitteln damit die Temperatur nach 10 Minuten (73°). Für die Abkühlungszeit auf 30° erhalten wir einen Wert von gut 58 Minuten!



Der Wert von über 58 Minuten für die Zeitdauer der Abkühlung von 95° auf 30° überrascht. Er stimmt so gar nicht mit den vermeintlichen subjektiven Erfahrungen überein, die vorher eingeholten Schätzungen lagen zwischen 5 und 10 Minuten. Die Suche nach einem Rechenfehler bleibt erfolglos, so werden die vorgegebenen Daten kritisiert und auch das zugrundeliegende mathematische Modell angezweifelt.

Hier kann nur das eigene Experiment helfen!

Aus der Chemie-Sammlung wird ein Temperaturmeßgerät mit elektronischer Anzeige geholt, aus dem Lehrzimmer eine Tasse Kaffee vom Kaffeeautomaten. Die Ausgangstemperatur des Kaffees beträgt (nach dem langen Weg) noch 56° . In der beschränkten Zeit werden vier weitere Meßwerte erhoben:

$$56^\circ \xrightarrow{5 \text{ min}} 48,3^\circ \xrightarrow{4 \text{ min}} 44,9^\circ \xrightarrow{5 \text{ min}} 41,5^\circ \xrightarrow{5 \text{ min}} 38,4^\circ$$

Zur Auswertung übertragen wir die Daten in unseren Rechner. Über APPS (Applications) rufen wir den Data/Matrix Editor auf und wählen hier zunächst die Option 3: New. In dem nun erscheinenden Menu wählen wir unter Type: die Option List-> und speichern sie unter der Variable: kaffee. Nach ENTER erscheint nun eine mehrspaltige Tabelle, in die wir unsere Meßdaten in die Spalten c1 und c2 als Listen eintragen.

DATA	Zeit	Temp	c3	c4	c5
1	0.	56.			
2	5.	48.3			
3	9.	44.9			
4	14.	41.5			
5	19.	38.3			
6					
7					

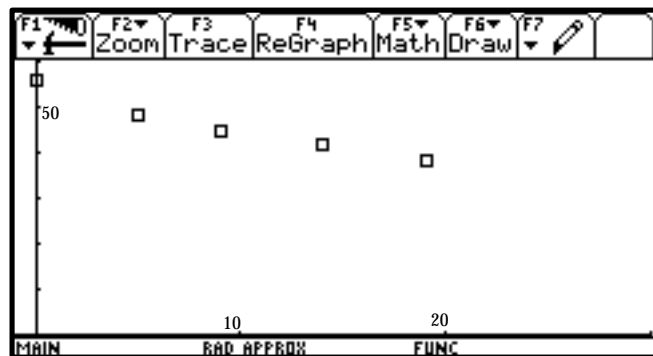
Über das Menu F2 Plot Setup gelangen wir in ein weiteres Menu über das wir Plot 1: definieren können (F1 Define) Wir wählen den Typ Scatter (Streudiagramm) mit der Punktanzeige Box. Als x-Variable wählen wir die Werte der Liste c1, als y-Variable c2.

Plot 1	Plot Type	Mark	x	y	Use Freq and Categories?
1	Scatter->	Box->	c1	c2	NO->
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Die Auswahl wird uns nach ENTER nochmals mit passenden Symbolen angezeigt.

Plot	Symbol	Variable
1	☑	x:c1 y:c2
2		
3		

Nach Wahl des passenden Fensters ◊ WINDOW erhalten wir mit ◊ GRAPH das zugehörige Streudiagramm.



Das Streudiagramm und die Sachinformationen lassen die Vermutung zu, daß die Meßpunkte auf dem Graph einer fallenden Exponentialfunktion liegen. Zudem wissen wir, daß $y=17$ eine Asymptote des Graphen sein muß.

Diese Vermutung läßt sich mit einer geeigneten Datentransformation überprüfen, die uns gleichzeitig die Parameter unserer Exponentialfunktion liefert.

Hierzu transformieren wir zu-nächst die Temperaturwerte T der Liste c2 in Werte T-17, die wir in eine Liste c3 eintragen.

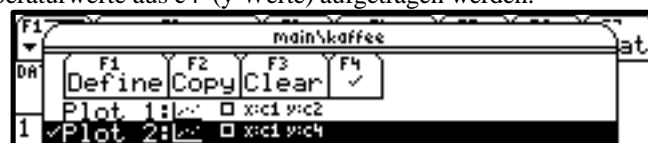
$$T \rightarrow T-17 \quad c3=c2-17$$

Die Werte werden nun nochmals transformiert zu $\ln(T-17)$ und in die Liste c4 eingetragen.

$$T-17 \rightarrow \ln(T-17) \quad c4=\ln c3$$

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	Zeit	Temp	T-C	lnT-C			
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	0.	56.	39.	3.6636			
2	5.	48.3	31.3	3.4436			
3	9.	44.9	27.9	3.3286			
4	14.	41.5	24.5	3.1987			
5	19.	38.3	21.3	3.0587			
6							
7							
c3=c2-17							

Dann definieren wir ein Streudiagramm Plot 2: , in dem die Zeitwerte aus c1 (x-Werte) gegen die Logarithmen der transformierten Temperaturwerte aus c4 (y-Werte) aufgetragen werden.

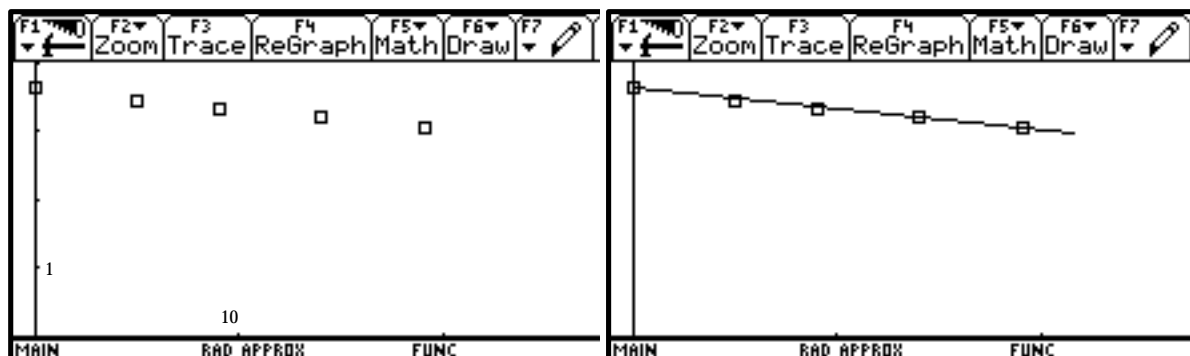


Dies entspricht einem Auftragen auf **halblogarithmischem Papier**.

Wenn unsere Vermutung der Exponentialfunktion zutrifft, so müssen die transformierten Datenpunkte nun auf einer Geraden liegen.

Begründung: Vorausgesetzt, die Paare (x|y) erfüllen die Exponentialgleichung $y=a \cdot e^{-kx} + c$. Dann gilt $\ln(y-c) = -k \cdot x + \ln(a)$. Damit erfüllen die Paare $(x|y^*) = (x|\ln(y-c))$ die Geradengleichung $y^* = -k \cdot x + b$.

Wir zeichnen den Graph und verbinden die beiden äußeren Meßpunkte mit einer Geraden (Menü F7 3:Line).

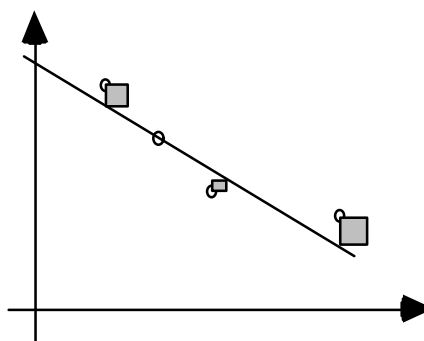


Unsere Vermutung wird damit hinreichend bestätigt. Aus der graphischen Darstellung könnten wir nun die Steigung $-k$ der Geraden und den y -Achsenabschnitt b ($=\ln(a)$) bestimmen und damit auf die Parameter unserer Exponentialfunktion zurückrechnen. Wir wählen jedoch ein anderes Verfahren, das uns eine Ausgleichsgerade durch die transformierten Datenpunkte nach einem statistischen Verfahren liefert.

Nach diesem Verfahren wird die Gerade $y^*=mx+b$ so durch die Datenpunkte $(x_i|y_i)$ gelegt, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen $(y^*-y_i)^2$ minimal ist.

$$\sum_1^n (y^* - y_i)^2 \leftarrow \min$$

Dieses Verfahren wird nach dem Mathematiker Gauß als „**Gaußsche Fehlerquadratmethode**“ bezeichnet.

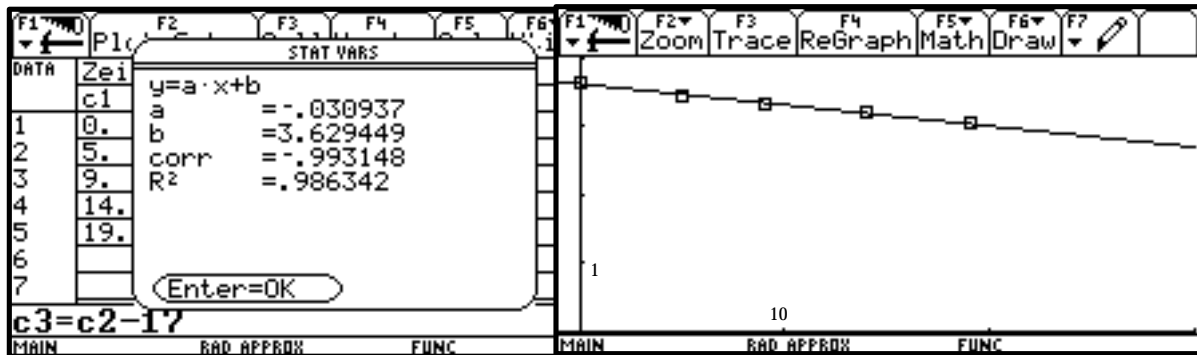


Mit dem TI-92 können wir die Ausgleichsgerade (Regressionsgerade) direkt bestimmen.

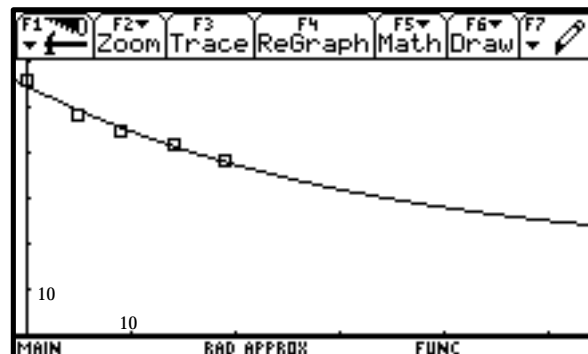
In dem Data/Matrix Editor erhalten wir mit F5 Calc ein Menu, in dem wir unter Calculation Type die Option 5:LinReg (Lineare Regression) wählen. Die Regressionsgerade soll für die Werte aus der Liste c1 (x-Werte) und der Liste c4(y-Werte) bestimmt werden. Die Gleichung dieser Gerade können wir gleich unter $y1(x)$ abspeichern.

The screenshot shows the TI-92 calculator's 'main\kaffee Calculate' menu. The 'Calculation Type' is set to 'LinReg'. The x-axis is set to 'c1' and the y-axis is set to 'c4'. The regression equation is stored to 'y1(x)'. The 'Use Freq and Categories?' option is set to 'NO'. The 'Freq' field is empty. The 'Categories' field is empty. The 'Include Categories as' field is set to 'C'. The 'Enter=SAVE' and 'ESC=CANCEL' buttons are visible at the bottom. At the very bottom, it says 'USE ← AND → TO OPEN CHOICES'.

Wir erhalten die Parameter „Steigung“ und „y-Achsenabschnitt“ für die Ausgleichsgerade und gleichzeitig auch noch den Korrelationskoeffizienten R , der uns etwas über die Güte des linearen Zusammenhangs der Daten $(x|y)$ aussagt. ($\text{corr}=-1$ bedeutet exakten linearen Zusammenhang). Nach Aktivierung von plot 2: und $y1(x)$ im Y= Editor können wir uns das Streudiagramm mit der Regressionsgeraden ansehen.

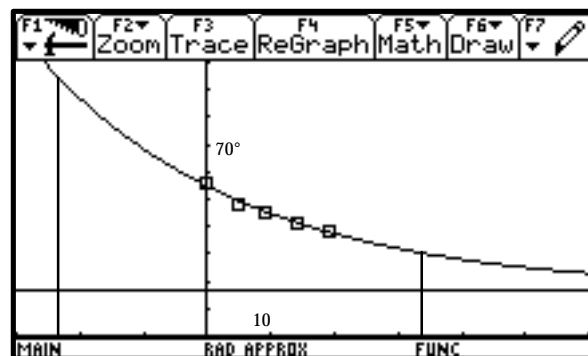


Mit $k=0.0309$ und $a=e^b=37.7$ definieren wir die Funktion $y_2(x) = 37.7 \cdot e^{-0.0309x} + 17$ und stellen diese zusammen mit dem Streudiagramm plot1: dar.



In einem erweiterten Fenster können wir auch den Abkühlungsvorgang von 95° auf 30° in dem Modell rekonstruieren.

Der Graphik entnehmen wir, daß hierfür eine Zeitspanne von etwa 56 Minuten erforderlich ist. Die Zweifel an der Lösung der Aufgabe oder an der Brauchbarkeit des zugrundeliegenden Modells sind beseitigt, ebenso das Vertrauen in die subjektiven Schätzungen.



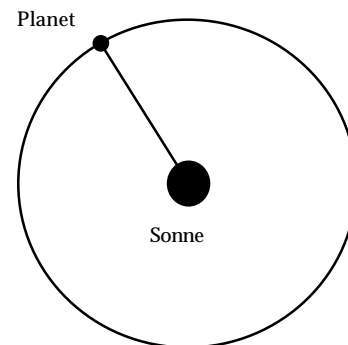
Beispiel 2 Das 3. Keplersche Gesetz

Im Herbst des Jahres 1601 übernahm der Astronom und Mathematiker Johannes Kepler (1571-1630) das Prager Observatorium nach dem plötzlichen Tod von Tycho Brahe. Dieser hatte in jahrzehntelanger Arbeit ein außerordentlich umfangreiches und sorgfältiges Beobachtungsmaterial über den Lauf der Planeten am Himmel aufgehäuft. Mit Hilfe dieser Daten, insbesondere der der Bewegungen des Planeten Mars, veröffentlichte Kepler 1609 die ersten beiden nach ihm benannten Gesetze.

Das dritte Keplersche Gesetz hat Kepler erst wesentlich später entdeckt, und zwar am 18. Mai 1618 (fünf Tage vor dem Prager Fenstersturz!). Mit Hilfe seiner verfügbaren Beobachtungsdaten fand er eine Beziehung zwischen den Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten und deren (mittlerer) Entfernung zur Sonne.

Wir wollen versuchen, diese Entdeckung mit den heute verfügbaren Daten der neun Planeten unseres Sonnensystems nachzuvollziehen und damit das 3. Keplersche Gesetz zu formulieren.

Planet	Entfernung in Mill. km	Umlaufdauer in Tagen
Merkur	57.9	88
Venus	108,2	225
Erde	149.6	365
Mars	227,9	687
Jupiter	778,3	4392
Saturn	1447	10753
Uranus	2870	30660
Neptun	4497	60150
Pluto	5907	90670

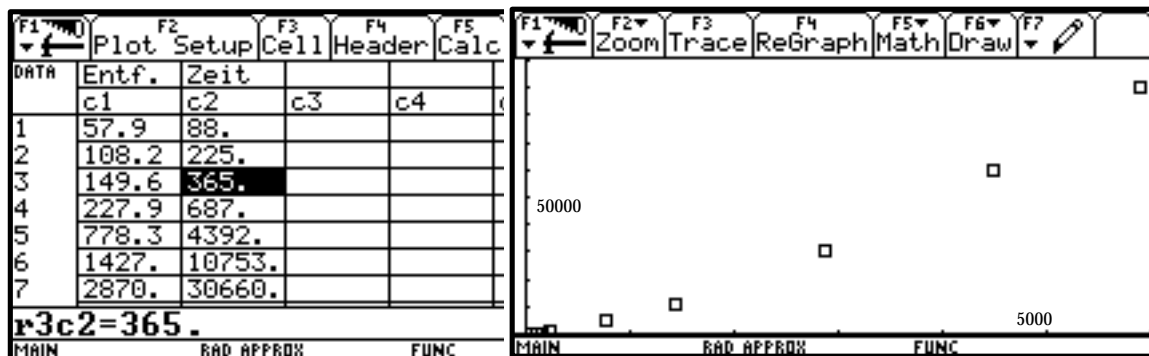


Entwicklung eines empirischen Modells

Wir vermuten einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Daten. Dazu tragen wir die Punkte

$$(x|y) = (\text{Entfernung von der Sonne in Mill. km} \mid \text{Umlaufzeit in Tagen})$$

im Koordinatensystem ein.



Die Punkte liegen auf einer Kurve, die Graph einer Potenzfunktion der Form

$$y = ax^c$$

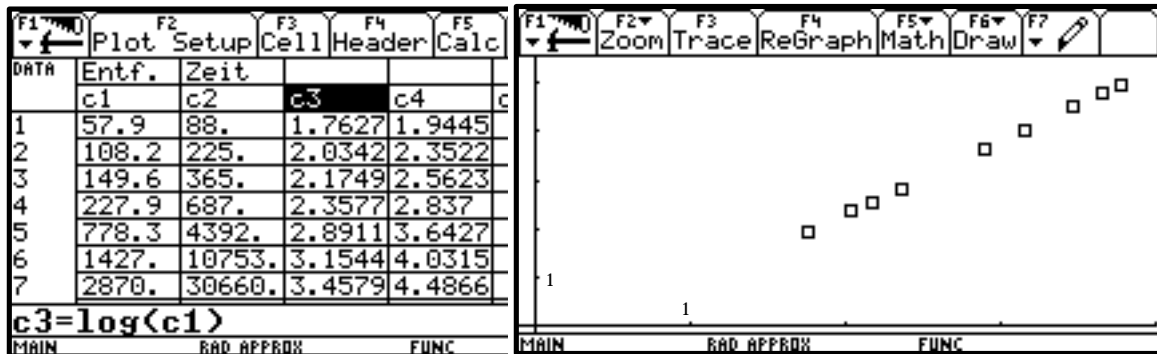
sein könnte. Leider liegen wegen des ungünstigen Maßstabs die Punkte für die ersten drei Planeten sehr dicht, so daß man hier nicht viel erkennen kann.

Hier kann ein "Log-Log-Plot" helfen, d.h. x - und y -Achse werden in logarithmischer Unterteilung dargestellt. Damit werden die Maßstabsprobleme umgangen. Gleichzeitig läßt sich die Vermutung der Potenzfunktion gut überprüfen: wenn sie zutrifft, so müssen die Logarithmen $(\log(x)|\log(y))$ auf einer Geraden liegen, denn Logarithmieren einer Gleichung $y = ax^c$ liefert

$$\log(y) = \log(ax^c) = c \log(x) + \log(a)$$

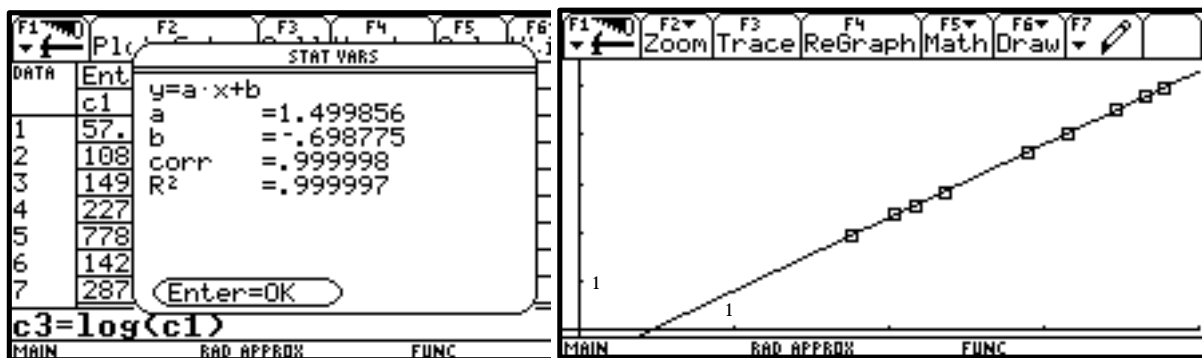
Dabei ist es gleichgültig, welche Logarithmenbasis man wählt. Wir arbeiten im folgenden mit Zehnerlogarithmen.

Wir erstellen zwei weitere Listen $c3=\log c1$ und $c4=\log c2$ und stellen die so transformierten Datenpunkte wiederum im Streudiagramm dar. Die Darstellung entspricht dann einer solchen auf doppelt-logarithmischen Papier.



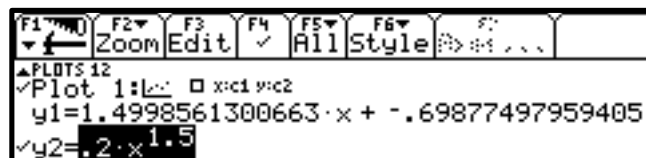
Im log-log-Plot liegen die Punkte offensichtlich auf einer Geraden. Steigung und y-Achsenabschnitt dieser Geraden können wir grob aus der Zeichnung ablesen oder mit Hilfe der gegebenen Punkte berechnen.

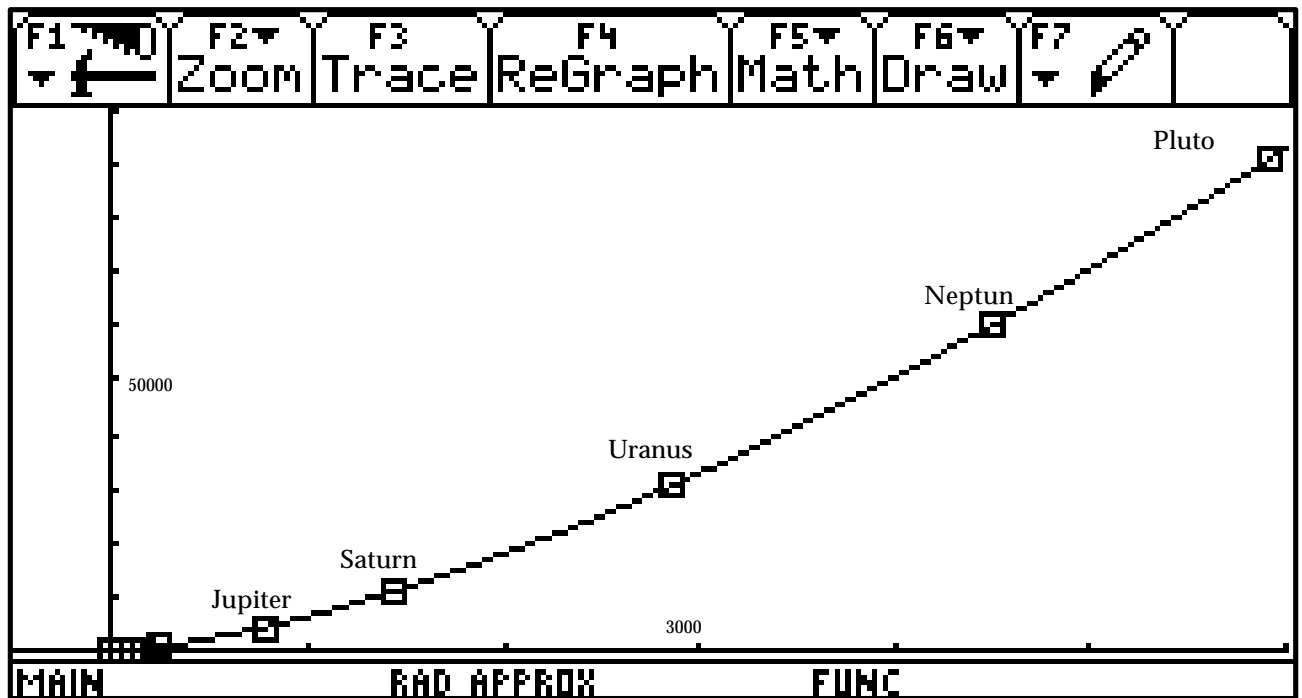
Wir bestimmen die Gerade als lineare Regressionsgerade, der Korrelationskoeffizient von nahezu 1 bestätigt den linearen Zusammenhang.



Damit ist klar, daß die Ausgangsdatenpaare unserer Planeten auf dem Graph einer Potenzfunktion mit der Gleichung $y = ax^c$ liegen.

Der Parameter c entspricht genau der Steigung 1.5 der Geraden im log-log-Plot. Den Parameter a erhalten wir mit Hilfe des y-Achsenabschnitts der Geraden, es gilt $a = 10^b = 10^{-0.698} = 0.2$. Wir geben die Potenzfunktion als $y2(x)=0.2 \cdot x^{1.5}$ ein und plotten den Graph zusammen mit dem Streudiagramm für c1 und c2.





Damit haben wir durch die Auswertung der Daten ein empirisches Gesetz über den Zusammenhang von Umlaufdauer T und Bahnradius R der Planeten unseres Sonnensystems gefunden:

$$T = 0.2 \cdot \sqrt{R^3}$$

Dies entspricht der Formulierung des dritten Keplerschen Gesetzes:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhälften:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad \text{oder} \quad \frac{T^2}{R^3} = \text{konstant}$$

Bei Kepler hatte die Suche nach dem gesetzmäßigen Zusammenhang wie bei den anderen Gesetzen auch bereits physikalische Motive. Kepler war der richtigen Meinung, daß die Umlaufzeit der Planeten von der Entfernung der Sonne abhängen muß, wenn die Sonne Ursache der Bewegung ist. Diese physikalische Überlegung war es auch, die Kepler zu diesem Problem hinführte, dem sich vor ihm noch kein Forscher zugewandt hatte. Obwohl Kepler schon nahe dran war, hat erst Newton das allgemeine Gravitationsgesetz gefunden, aus dem die drei Kepler-Gesetze zwangsläufig folgen. Es steht in seinem Hauptwerk „Principia mathematica philosophiae naturalis“ (Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie), das 1687 in England gedruckt wurde.

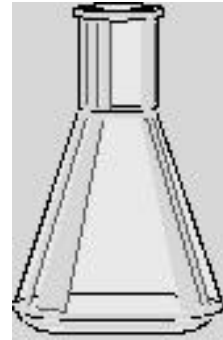
Beispiel 3 Reaktionsgeschwindigkeit

Kenntnisse über die Geschwindigkeiten chemischer Reaktionen sind nicht nur für die Planung und den Bau technischer Großanlagen unabdingbar, auch in der Arzneimittelforschung ist es wichtig zu wissen, wie schnell und unter welchen Bedingungen bestimmte Wirkstoffe reagieren. Unterschiedliche Reaktionszeiten lassen sich eindrucksvoll an Experimenten mit mit extrem kurzen (Entzünden von Schwarzpulver, Fällern von Silberchlorid) bzw. extrem langen Reaktionszeiten (Rosten eines Eisennagels, Gärung von Alkohol) verdeutlichen. Zum Entdecken quantitativer Zusammenhänge eignen sich besonders Experimente mit mittlerer Reaktionszeit (wenige Minuten), die auch als Schülerexperimente durchgeführt werden können.

Ein solch geeigneter Versuch ist z.B. die Reaktion von Natriumthiosulfat ($\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$) mit Salzsäure (HCl), bei der die Reaktionszeit von der Konzentration der Stoffe (in mol/Liter) abhängt.



Aus einer Natriumthiosulfatlösung wird durch Salzsäure Schwefeldioxyd entwickelt unter gleichzeitiger Abscheidung von Schwefel. Dieses Ausfällen von Schwefel führt zu einer Trübung der Lösung. Gemessen werden kann nun die Zeit t bis zu einem gewissen Grad der Trübung bei verschiedenen Konzentrationen c der Natriumthiosulfatlösung.



Aus einem Schülerversuch werden die folgenden Meßwerte festgehalten

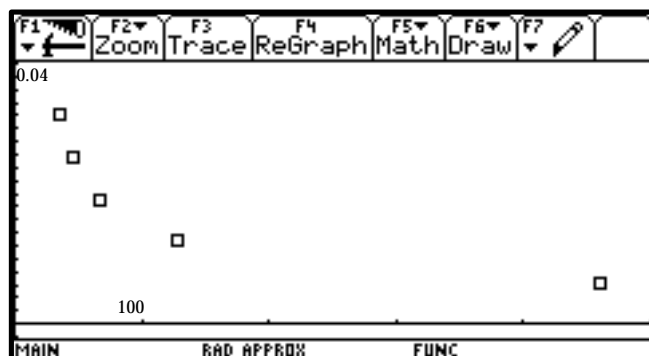
	Volumen (ml)	Konzentration(mol/l)	Reaktionszeit (s)
1	20.000	0.16000	35.00
2	16.000	0.12800	45.00
3	12.000	0.09600	67.00
4	8.000	0.06400	127.00
5	4.000	0.03200	461.00

Wir tragen die Reaktionszeiten in eine Liste c1 und die Konzentrationen der Lösung in eine Liste c2 ein und veranschaulichen die Punkte im Koordinatensystem.

DATA	Zeit	Konz	c3	c4
	c1	c2		
1	35.	.16		
2	45.	.128		
3	67.	.096		
4	127.	.064		
5	461.	.032		
6				
7				

r1c1=35.

MAIN BAD APPROX FUNC



Die Meßpunkte liegen auf einer Kurve, die einer Hyperbel gleicht. Im einfachsten Fall ist dies der Graph einer Funktion mit der Gleichung

$$y = \frac{c}{x} + d.$$

Dies können wir überprüfen, indem wir eine Datentransformation

$$x \rightarrow x^* = \frac{1}{x}$$

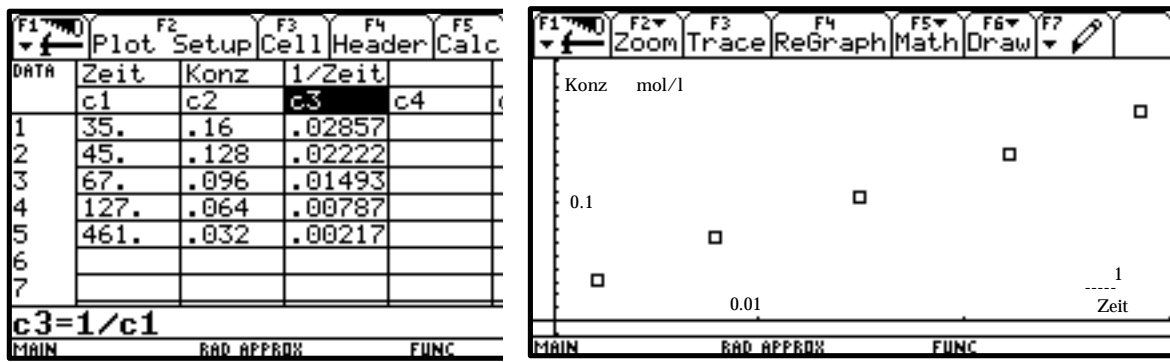
vornehmen.

Die Punkte (x*|y) müßten dann auf einer Geraden mit der Gleichung

$$y = c \cdot x^* + d$$

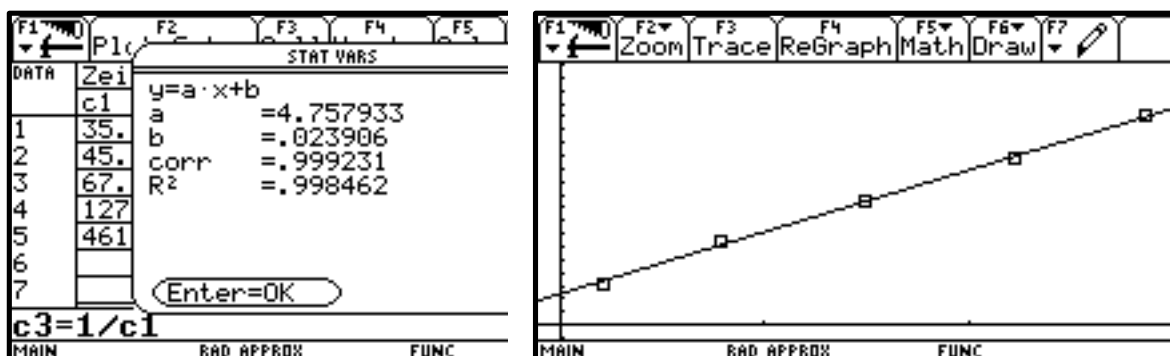
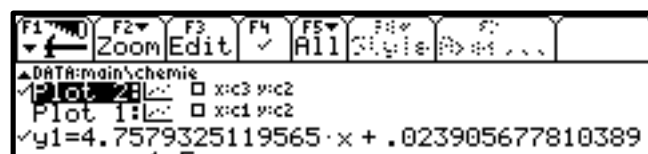
liegen.

Wir erstellen eine weitere Liste c3=1/c1 und plotten dann c3 (x-Wert) gegen c2 (y-Wert).



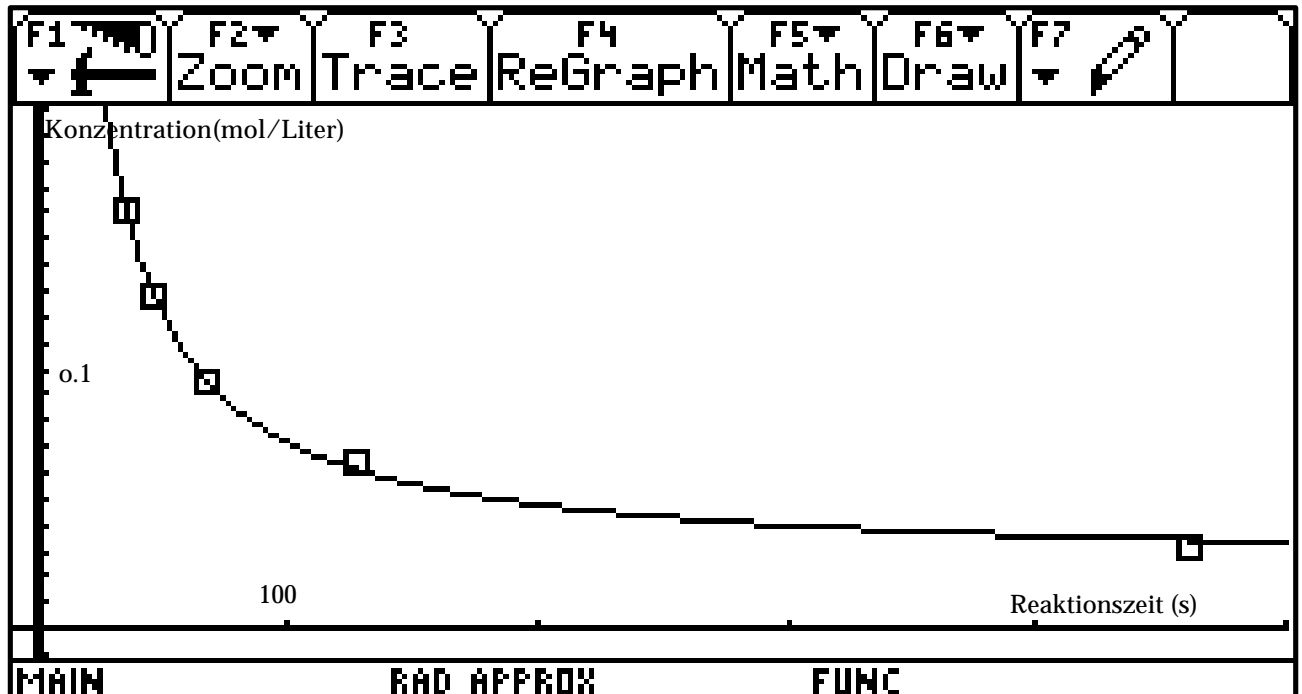
Unsere Vermutung wird bestätigt, die Punkte liegen in etwa auf einer Geraden.

Die Gerade berechnen wir wie in den obigen Beispielen als Lineare Regressionsgerade.



Für unsere Ausgangsdaten erhalten wir damit als Ausgleichskurve den Graph der Funktion

$$y = \frac{4.758}{x} + 0.024 .$$



Bei unserem chemischen Versuch erhalten wir also für den Zusammenhang zwischen Reaktionszeit RT (in Sekunden) und der Lösungskonzentration C (in mol/Liter) das „Gesetz“

$$C = \frac{4.758}{RT} + 0.024$$

Zusatzaufgaben und Erweiterungen

- Besteht ein Zusammenhang zwischen der Länge der Laufstrecke und der zugehörigen Weltrekordzeit? In der folgenden Tabelle sind die Weltrekordzeiten zu den Laufdisziplinen der Männer auf dem Stand von 1990 festgehalten. Kann aus diesen Daten ein funktionaler Zusammenhang gefunden werden?

Strecke in m	Weltrekord in sec
100	9,83
200	19,72
400	43,29
800	101,73
1500	209,46
5000	778,39
10000	1628,20

- Andere Meßreihen zu Abkühlungsvorgängen oder zum radioaktiven Zerfall
 - Bearbeitung von Daten aus der Populationsentwicklung (Erdkunde/Biologie)
-

Literatur

- [5.1] Hahn/Dzewas (Hrsg.), Grundkurs Analysis Gesamtausgabe, Seite 301, Braunschweig 1986
- [5.2] W.Kroll, Grund- und Leistungskurs Analysis, Lehr- und Arbeitsbuch Band 1, Seiten 164-179, Bonn 1988
- [5.3] Keplers Third Planetary Law, in Burghes, Applying Mathematics - A Course in Mathematical Modelling, New York 1982, Seite 88 - 91
- [5.4] J.Burow, Das dritte Planetengesetz von Kepler - einmal ganz anders, in alpha 5/92, Seite 10 und 11
- [5.5] Landesmedienzentrum Rheinland -Pfalz, Materialien zum Mathematik-unterricht mit Computer und DERIVE, Seiten 2.30 - 2.59, Koblenz 1995
- [5.6] Wollgast/Marx, Johannes Kepler, Leipzig 1976
- [5.7] Burghes,D., Mathematics and Sports, in: Mathematical Spectrum 13, 1980/81, Seite 43 - 49
- [5.8] Noll/Schmidt, Trends und Zusammenhänge, in: Materialien zur Explorativen Datenanalyse und Statistik in der Schule, Landesinstitut für Schule und Weiterbildung in Soest, 1994
- [5.9] C.Huth, Mathematische Modellierung zur Unterstützung eines forschend-entwickelnden Chemieunterrichts - Eine fächerübergreifende Unterrichtsreihe in einem Leistungskurs 12, Schriftliche Hausarbeit zur zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien, Bad Kreuznach 1995

Kurzkommentar zur Literatur

In den gängigen Analysis-Lehrbüchern zur SII findet man hinreichend viele Aufgaben, aus denen man Sequenzen zum Entdecken von Gesetzen ableiten kann. In [5.1] gibt es zu den verschiedenen Themenbereichen recht komplexe „Anwendungen“, in denen die mathematische Modellierung thematisiert wird. Die Ausgangsaufgabe zu Beispiel 1 wurde hieraus entnommen. In [5.2] gibt es ein eigenes Kapitel „Die Methode der kleinsten Quadrate“, in dem die Ausgleichsrechnung mit Regression und Korrelation in unterrichtsgerechter Form aufbereitet ist. Eine weitere Unterrichtssequenz zu diesem Thema findet man in [5.8], hier in dem aktuellen Rahmen der Explorativen Datenanalyse mit Einsatz von spezieller Statistik-Software, die zum überwiegenden Teil auch mit den Statistik-Werkzeugen des TI-92 bewältigt werden kann. Hier werden auch viele für den Unterricht geeignete Datensätze zur Verfügung gestellt, ebenso ein ausführliches Literaturverzeichnis zu den angesprochenen statistischen Methoden.

In [5.3] bis [5.5] sind unterrichtliche Anregungen zur empirischen Behandlung des 3. Keplerschen Gesetzes aufgeführt. Die Darstellung in [5.5] zeigt eine Bearbeitung mit DERIVE, sie beinhaltet darüberhinaus viele historische Anmerkungen und auch theoretische Vertiefungen, ebenso Anregungen zur Übertragung der Methode auf Beispiele aus Physik, Chemie und Sport. Die Quellen für die wenigen historischen Anmerkungen im Beispiel 2 finden sich in dem schönen Buch von Wollgast/Marx über Johannes Kepler [5.6].

Für die Bearbeitung der vorgeschlagenen Zusatzaufgabe aus dem Bereich Sport findet man in dem Aufsatz von Burghes [5.7] weitere Anregungen, in [5.5] ist hierzu und zu weiteren Datensätzen aus anderen Sportdisziplinen eine ausführliche Unterrichtssequenz mit Einsatz des graphischen Taschenrechners (TI-82) beschrieben (Seiten 2.46-2.59).

Für Anwendungsbeispiele aus der Physik und Chemie kann man auf die gängigen Lehrbücher der Oberstufe zurückgreifen, ebenso auf die kompetente Beratung von Fachkolleginnen und -kollegen. Der in Beispiel 3 bearbeitete Datensatz wurde in einem fächerübergreifenden Projekt von Schülerinnen eines Leistungskurses Chemie gemessen [5.9], für die Erlaubnis zur Verwendung dieser Daten und die „fachfrauliche“ Beratung bedanke ich mich an dieser Stelle bei Frau Christina Huth.