

# Vergleich von Höchstleistungen im Sport

von Günter Schmidt

## Mögliche Ausgangssituation

Die Weltrekordzeiten in den Lauf-disziplinen der Leichtathletik werden ständig verbessert.

Dabei ist es schon imponierend, welche Durchschnittsgeschwindigkeiten die Läufer selbst auf den Mittel- und Lang-strecken noch erreichen.

Der Weltrekord der Männer über 100 m liegt bei 9.8 s, der für 400 m bei 43,29 s, der für 5000 m bei 12:58,39 min.

Selbstverständlich werden die Durchschnittsgeschwindigkeiten auf den langen Strecken kleiner, aber doch nur in erstaunlich geringem Umfang.



Kann man die Höchstleistungen der Läufer in den verschiedenen Laufstrecken miteinander vergleichen? Kann man den absoluten „Champion“ auf den Laufstrecken angeben?

## Vorüberlegungen

Es ist klar, daß man die Weltrekordzeit im 100m-Lauf nicht einfach durch Vervierfachen auf den 400m- Lauf übertragen kann. Noch weniger Sinn macht ein einfacher proportionaler Ansatz beim Vergleich des 100m-Weltrekords mit dem beim 10000m-Lauf.

In irgendeiner Form muß man die verschiedenen Laufbewegungen, die Ermüdung des Körpers oder auch den Sauerstoffbedarf der Läufer berücksichtigen. Darauf weist schon die unterschiedliche körperliche Konstitution eines Sprinters im Vergleich zum typischen Langstreckenläufer hin.

## Modellierung

Besteht ein Zusammenhang zwischen der Länge der Laufstrecke und der zugehörigen Weltrekordzeit?

Ein theoretischer Ansatz scheidet wegen der Komplexität der zu berücksichtigenden Bedingungen für uns zunächst aus. Vielleicht können wir die Daten zum Sprechen bringen.

Der Chronik des Sports [5] entnehmen wir die Weltrekordzeiten zu den Laufdisziplinen der Männer auf dem Stand von 1990.

Strecke in m	Weltrekord in sec	Athlet/Jahr/Ort
100	9,83	Ben Johnson CAN 1987 Rom
200	19,72	Pietro Mennea ITA 1979 Mexico City
400	43,29	Harry Butch Reynolds USA 1988 Zürich
800	101,73	Sebastian Coe USA 1981 Florenz
1500	209,46	Said Aouita MAR 1985 Oslo
5000	778,39	Said Aouita MAR 1987 Rom
10000	1628,20	Arturo Barrios MEX 1989 Berlin

Zur Bearbeitung und graphischen Darstellung der Daten benutzen wir den graphischen Taschenrechner TI 82, der hierfür ein komfortables Statistik-Menü zur Verfügung stellt.

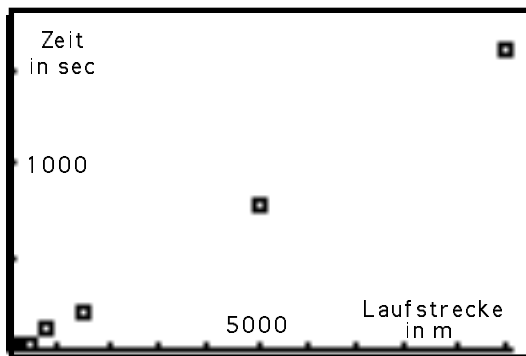
Mit STAT EDIT erzeugen wir zunächst zwei Listen L1 (Laufstrecke s in m) und L2 (Weltrekordzeit t in sec).

In einer zusätzlichen Liste L3 (=L2/L1) berechnen wir die Zeit in sec, die auf der jeweiligen Laufstrecke durchschnittlich für eine Strecke von 1 m gebraucht wird.

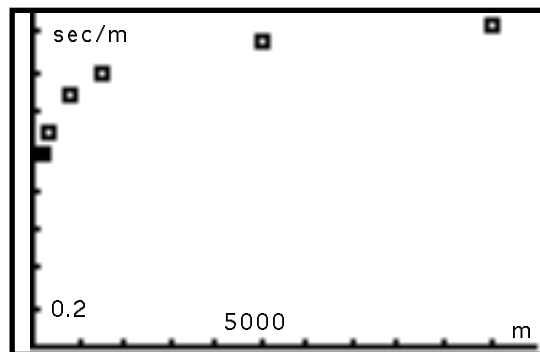
Über das STAT PLOT Menü erhalten wir Streudiagramme für L1L2 und L1L3

L1	L2	L3
100	9.83	.0983
200	19.72	.0986
400	43.29	.10823
800	101.73	.12716
1500	209.46	.13964
5000	778.39	.15568
10000	1628.2	.16282

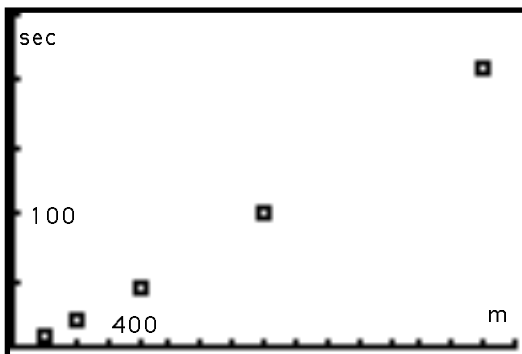
L3(1) = .0983



Laufstrecke - Weltrekordzeit



Laufstrecke - Zeit für 1m



Die Durchschnittszeiten für 1 m liegen auf einer abflachenden Kurve, während die Weltrekordzeiten auf einer Kurve mit zunehmender Steigung liegen.

Letzteres wird durch eine Ausschnittsvergrößerung auch für den Bereich der kürzeren Strecken (100m - 1500m) bestätigt.

<-----

Die sehr unterschiedlichen Differenzen zwischen den Sprintstrecken einerseits und den Langstrecken andererseits verhindern eine übersichtliche Darstellung in einem Diagramm. Das Gesamtdiagramm Laufstrecke  $\rightarrow$  Weltrekordzeit und der Auschnitt davon liegen auf einer linksgekrümmten Kurve.

Vielleicht ist dies der Graph einer Potenzfunktion  $t = c \cdot s^k$ ?

Zur Überprüfung einer solchen Vermutung bietet sich ein **log-log-Plot** an, bei dem auf den beiden Achsen an Stelle der Originaldaten die Logarithmen der jeweiligen Werte aufgetragen werden.

Durch Logarithmieren der Potenzgleichung  $t = c \cdot s^k$  erhält man

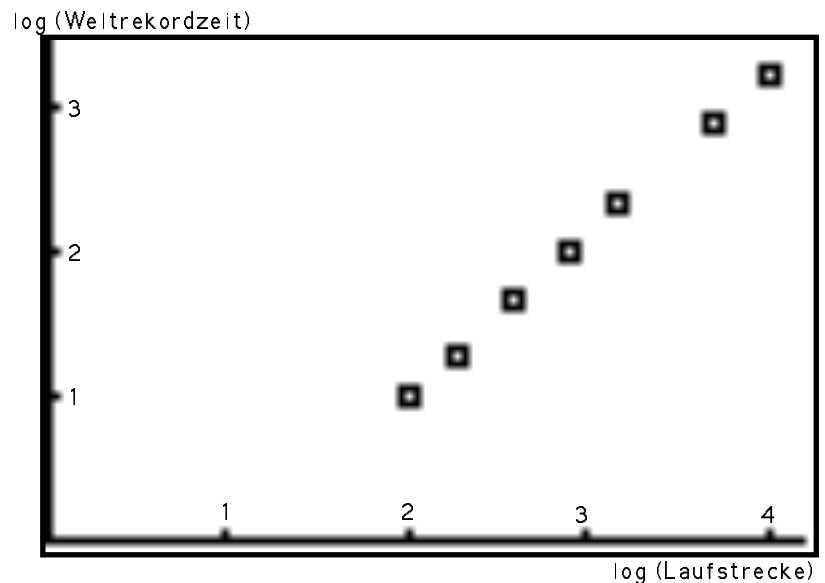
$$\begin{aligned}\log(t) &= \log(c \cdot s^k) \\ \log(t) &= k \cdot \log(s) + \log(c)\end{aligned}$$

Wenn also die Punkte  $(s|t)$  auf dem Graph einer Potenzfunktion liegen, so liegen die Punkte  $(\log(s)|\log(t))$  auf einer Geraden  $y=mx+b$ . Die Steigung  $m$  dieser Geraden entspricht dem Exponenten  $k$  in der Potenzfunktion. Der Parameter  $c$  hängt mit dem Achsenabschnitt  $b$  der Geraden zusammen, es gilt  $c = 10^b$ .

Wir legen zwei Listen  $L_3 = \log(L_1)$  und  $L_4 = \log(L_2)$  an und stellen diese in einem neuen Streudiagramm dar.

L3	L4
2	.99255
2.301	1.2949
2.6021	1.6364
2.9031	2.0074
3.1761	2.3211
3.699	2.8912
4	3.2117

In diesem log-log-Diagramm liegen die Datenpunkte  $(\log(s)|\log(t))$  nun an-nähernd auf einer Geraden.



#### Aufgabe

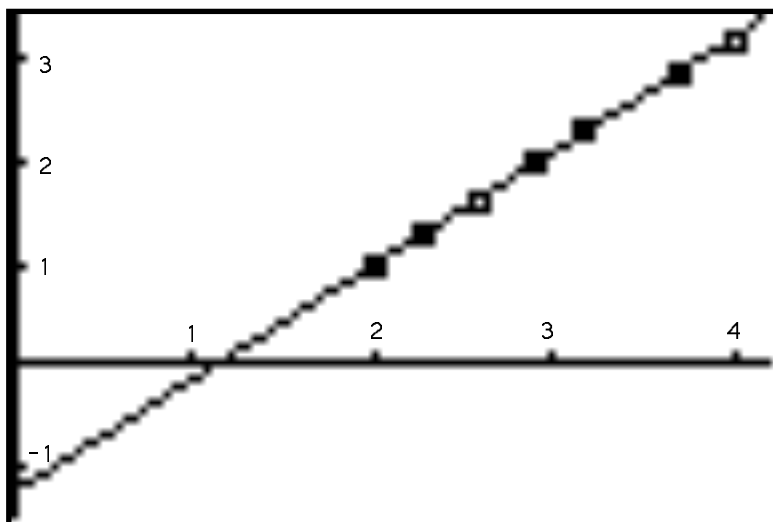
Lege durch Augenmaß eine Ausgleichsgerade durch die Datenpunkte und bestimme Steigung und Achsenabschnitt dieser Geraden.

Mit dem TI 82 können wir die Ausgleichsgerade auch als Lineare Regressionsgerade nach der Gaußschen Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmen lassen und diese auch graphisch darstellen.

Wir erhalten als Werte

```
LinReg
y=ax+b
a=1.123444105
b=-1.268416484
r=.9997646486
```

Der (Pearsonsche) Korrelationskoeffizient  $r$  liegt ganz nahe bei 1 und bestätigt damit die gute Anpassung der Regressionsgeraden an die Datenpunkte.



Für den gesuchten Zusammenhang zwischen der Laufstrecke  $s$  und der zugehörigen Weltrekordzeit  $t$  müssen wir aus der log-log-Darstellung zurückrechnen.

$$\log(t) = 1.123 * \log(s) - 1.268$$

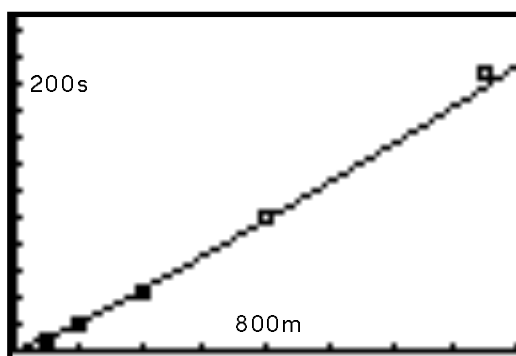
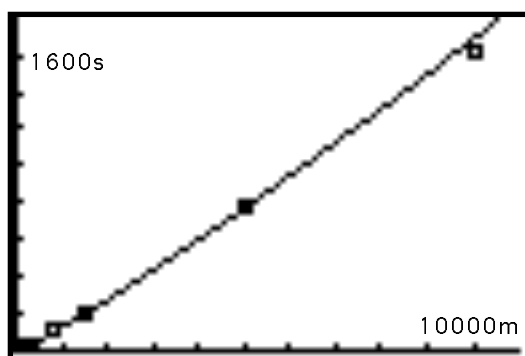
$$10^{\log(t)} = 10^{1.123 * \log(s) - 1.268}$$

$$t = s^{1.12} * 10^{-1.268}$$

$$t = 0.054 * s^{1.12}$$

Es besteht offensichtlich ein Potenzzusammenhang zwischen Laufstrecke und Weltrekordzeit.

Wir können uns dies nochmals am Graph mit den Originaldaten und der Potenz-funktion verdeutlichen.



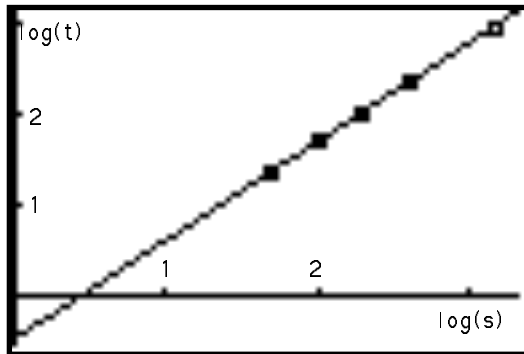
Streudiagramme Laufstrecke - Weltrekordzeit (Männer) mit Ausgleichskurven

Dieses Ergebnis macht neugierig. Besteht ein ähnlicher Zusammenhang auch bei anderen Sportdisziplinen?

Wir wählen als weiteres Beispiel die Weltrekorde im Freistilschwimmen der Männer (Chronik des Sports 1990):

Strecke in m	Weltrekord in sec	Athlet/Jahr/Ort
50	22,12	Tom Jager USA 1989 Tokio
100	54,73	Matt Biondi USA 1988 Austin
200	106,69	Giorgio Lamberti ITA 1989 Bonn
400	226,95	Uwe Dassler GDR 1988 Seoul
1500	894,76	Wladmir Salnikow URS 1983 Moskau

Der log-log-Plot zeigt wiederum einen linearen Zusammenhang:



Freistilschwimmen Männer

```

LinReg
y=ax+b
a=1.07402026
b=-.4462404061
r=.9990960519
    
```

Die Ausgangsdaten weisen damit einen ähnlichen Zusammenhang wie die Laufdaten auf:

$$t = 0.358 s^{1.07}$$

Aufgaben

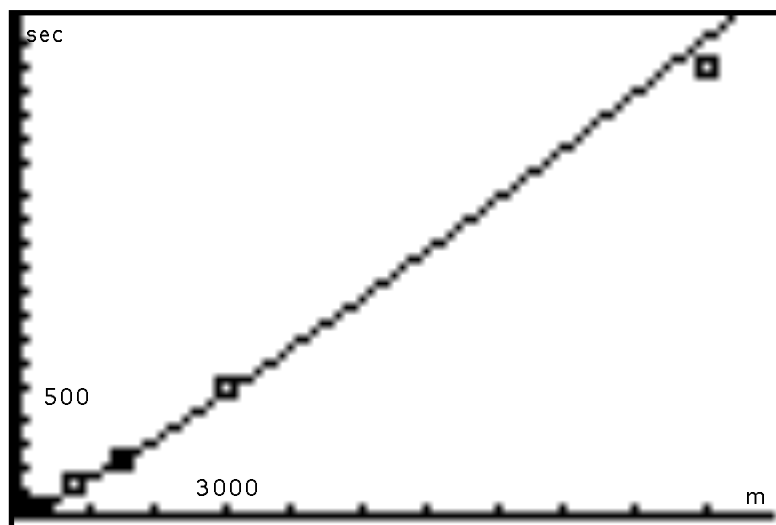
Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen

- Laufstrecke und Weltrekordzeiten und
- Schwimmstrecke (Freistil) und Weltrekordzeiten bei den Frauen.

Ergänzen Sie den log-log-Plot für die Laufdisziplinen der Männer durch den Weltrekord beim Marathonlauf (42195 m). (2:06:56,0 Densimo Belde ETH 1988 Rotterdam). Liegt dieser auf der oben ermittelten Geraden?

Lösungsskizze:

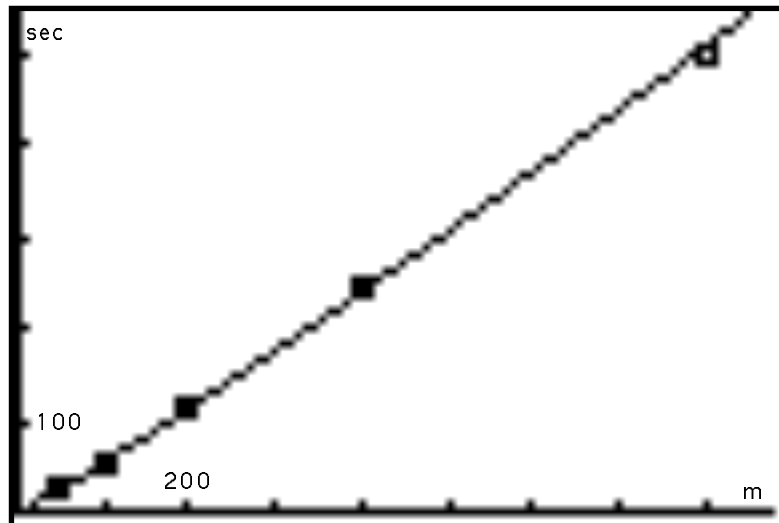
Laufdisziplinen Frauen	
Strecke in m	Zeit in s
100	10,49
200	21,34
400	47,60
800	113,28
1500	232,5
3000	502,65
10000	1813,7



Es gilt:  
 $t = 0.055 s^{1.13}$

Streudiagramm Laufstrecke-Weltrekordzeiten (Frauen) mit Ausgleichskurve

Freistilschwimmen Frauen	
Strecke in m	Zeit in s
50	24,98
100	54,73
200	117,55
400	243,85
800	496,22



Es gilt:

$$t = 0.377 s 1.077$$

Streudiagramm Schwimmstrecke-Weltrekordzeit (Freistil Frauen) mit Ausgleichskurve

Für den Marathonlauf erhalten wir den Punkt  $(\log(42195) | \log(7616)) = (4.625 | 3.881)$ . Die oben ermittelte Ausgleichsgerade geht durch den Punkt  $(4.625 | 1.12 \cdot 4.625 - 1.26) = (4.625 | 3.92)$ . Die ermittelte Gesetzmäßigkeit gilt also auch unter Einbeziehung der Daten für die Marathonstrecke!

### Interpretation

In allen betrachteten Disziplinen können wir den Zusammenhang zwischen Streckenlänge und Weltrekordzeit mit dem Modell einer Potenzfunktion

$$t = c \cdot s^k$$

beschreiben.

Die „Modellgrößen“ c und k hängen jeweils von der sportlichen Disziplin ab.

Sportdisziplin	c	k
Laufen Männer	0.054	1.12
Laufen Frauen	0.055	1.13
Freistilschwimmen M	0.358	1.07
Freistilschwimmen F	0.377	1.08

Die Konstante  $k > 1$  kann als ein Maß für die Ermüdung des Körpers gedeutet werden. Ohne diese Ermüdung müßte  $t = c \cdot s$  gelten, es wäre  $k=1$ . Interessant ist, daß diese Ermüdungskonstante bei den Höchstleistungen in den vergleichbaren Disziplinen bei Frauen und Männern im wesentlichen gleich ist. Beim Freistilschwimmen ist sie kleiner als beim Laufen.

Die Größe c ist der konstante Quotient  $t/s^k$ . Sie läßt sich nicht ohne weiteres im Sachzusammenhang interpretieren. Aber wir werden diese Größe noch zu einem Vergleich zwischen realen Daten und Modelldaten heranziehen können.

Zunächst können wir mit der gegebenen Potenzgleichung zu einer gegebenen Laufstrecke die zugehörige Zeit berechnen. Diese fassen wir dann als „Modellweltrekordzeit“ auf.

Für den 200m-Lauf Männer erhalten wir damit z.B. eine Modellweltrekordzeit  $t_M$  von  $0.054 \cdot 200^{1.12} = 20.396$ . Die reale Weltrekordzeit von 19.72 s ist also deutlich besser als die in unserem Modell berechnete Zeit. Wie sieht dies bei den anderen Laufstrecken aus?

Laufstrecke s	Modellweltrekord $t_R$	realer Weltrekord $t_M$
100	9.38	9,83
200	20.39	19,72
400	44.33	43,29
800	96.35	101,73
1500	194.81	209,46
5000	750.30	778,39
10000	1630.77	1628,20

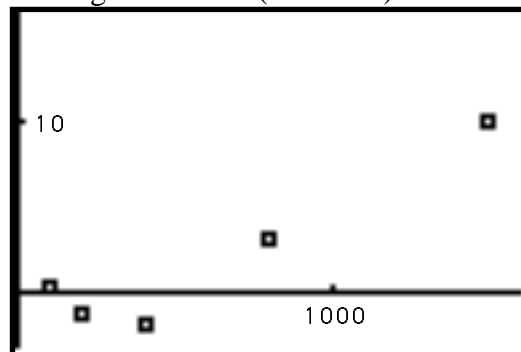
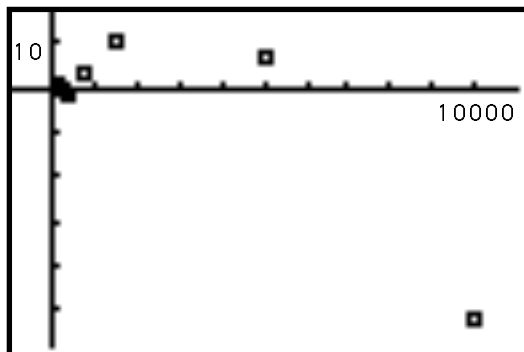
Die Tabelle zeigt bei 200m, 400m und 10000m eine Überlegenheit des realen Weltrekords gegenüber dem Modellwert, bei den anderen Laufstrecken ist es umgekehrt.

Dies können wir uns auch graphisch veranschaulichen, indem wir zu den Laufstrecken die Differenzen  $t_R - t_M$  in einem Streudiagramm darstellen. Solche Abweichungen der realen Daten von den zugehörigen Modelldaten der Ausgleichskurve oder -geraden werden in der Statistik als **Residuen** bezeichnet.

L1	L2	L3	L2	L3	L4
100	9.83	9.38	9.83	9.5164	-0.3334
200	19.72	20.733	19.72	20.733	-1.013
400	43.29	45.17	43.29	45.17	-1.88
800	101.73	98.411	101.73	98.411	3.3192
1500	209.46	199.41	209.46	199.41	10.051
5000	778.39	771.2	778.39	771.2	7.1855
10000	1628.2	1680.2	1628.2	1680.2	-52
$L_3(x) = 9.5163788 \dots$		$L_4(x) = .31362110 \dots$			

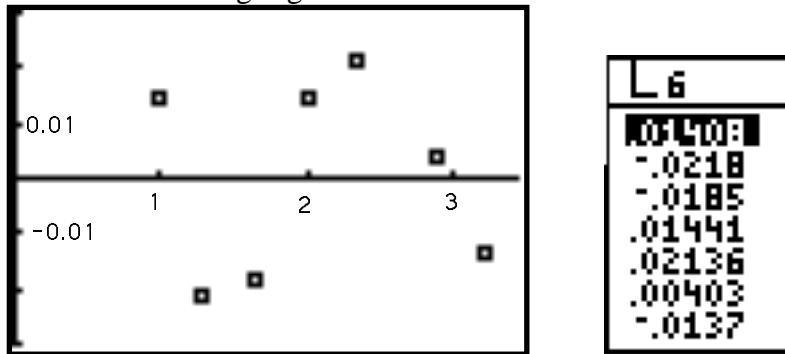
In der Liste L1 sind die Laufstrecken aufgeführt, in L2 die zugehörigen realen Weltrekorde und in L3 die nach der Potenzfunktion errechneten Modellwerte (sie unterscheiden sich etwas von denen in der obigen Tabelle, da hier die genaueren Werte für c und k verwendet wurden). Die Werte von L3 liegen auf der Ausgleichskurve. In L4 sind dann die Differenzen  $L_2 - L_3$  berechnet.

Differenzen Weltrekordzeiten zu Ausgleichskurve (Residuen)



Zum Vergleich stellen wir diese Differenzen auch in bezug auf die Ausgleichsgerade im log-log-Plot dar.

Residuen im log-log-Plot



## Vergleich von Leistungen in verschiedenen Disziplinen

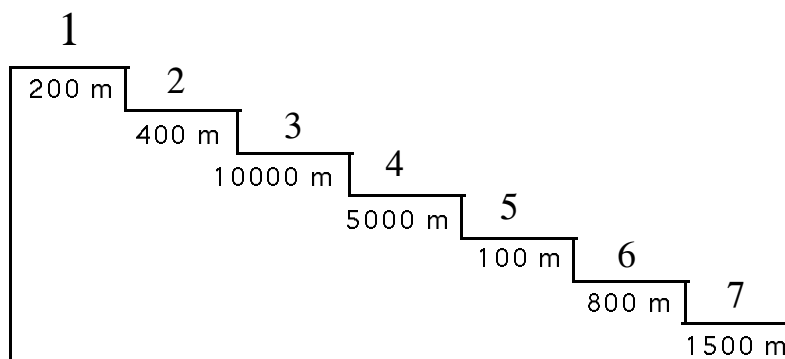
### Der „absolute Champion“ auf den Laufstrecken

Nach den entdeckten Zusammenhängen können wir uns nun an den eingangs beabsichtigten Vergleich der Leistungen auf den verschiedenen Laufstrecken heranwagen. Wir benutzen dazu unser Modell der Ausgleichskurven.

Die Residuen der Weltrekordzeiten zu denen der Ausgleichskurve (Potenzfunktion) eignen sich hierfür weniger, weil hier die absoluten Abweichungen dargestellt sind. Dabei ist eine Abweichung von 1 Sekunde beim 100m-Lauf sicher anders einzustufen als die gleiche Abweichung beim 10000m-Lauf.

Die Residuen der Weltrekordzeiten zu denen der Ausgleichsgeraden im log-log-Plot eignen sich schon besser, da durch das Logarithmieren von Streckenlänge und Zeit die absoluten Zahlen in gewissem Sinne relativiert werden.

Die 200m-Weltrekordzeit zeigt hiernach die größte negative Abweichung vom theoretischen Modellwert der Ausgleichsgerade, sie kann in diesem Sinne als der „beste“ Weltrekord auf den Laufstrecken der Männer angesehen werden. Eine Rangfolge der Höchstleistungen für die verschiedenen Laufstrecken ergibt sich mit Hilfe dieser Residuen wie folgt:





Wir können die Abweichungen der Realdaten von den Modelldaten der Ausgleichs-kurve auch auf andere Art relativieren und damit für einen Vergleich tauglich machen.

Wir beziehen diese Abweichung auf die zugehörige Weltrekordzeit, d.h. wir bilden den Quotienten  $(t_R - t_M)/t_R$ . Diese relativen Abweichungen sind in der nebenstehenden Liste L3 darge-stellt.  
Damit erhalten wir die gleiche Rangordnung wie eben, auch hier stellt sich Mennea mit seinen 19.72 Sekunden auf 200 m als der „absolute Champion“ auf den Laufstrecken heraus.

L1	L2	L3
100	9.83	.0319
200	19.72	<b>-.0317</b>
400	43.29	-.0434
800	101.73	.03263
1500	209.46	.04799
5000	778.39	.00923
10000	1628.2	-.0319
L3(2) = -.0513690...		

Es gibt noch eine andere Möglichkeit für einen sinnvollen Vergleich. In unserem Ausgleichsmodell ist der Quotient  $t/s^{1.12}$  für jede Laufstrecke konstant ( $c=0.054$ ). Wenn wir an Stelle des Ausgleichswerts  $t_M$  nun die reale Weltrekordzeit  $t_R$  einsetzen, so erhalten wir als Quotient  $t_R/s^{1.12} = c^*$  einen Wert, der von  $c$  nach oben oder unten abweicht. Kleinere Werte von  $c^*$  weisen im Vergleich der Weltrekordzeiten für die verschiedenen Laufstrecken auf die „besseren“ Leistungen hin.

Wir berechnen  $c^*$  für die verschiedenen realen Weltrekordzeiten.

Strecke s in m	Weltrekord $t_R$ in s	$c^* = \frac{t}{s^{1.12}}$
100	9,83	0.0565
200	19,72	<b>0.0522</b>
400	43,29	0.0527
800	101,73	0.0570
1500	209,46	0.0580
5000	778,39	0.0560
10000	1628,20	0.0539

Auch hiermit stellt sich die Weltrekordzeit von Pietro Mennea über 200m als die „beste“ Leistung in den Laufstrecken heraus. Auch als Rangfolge stellt sich wiederum die gleiche wie nach den beiden vorhergehenden Kriterien heraus.

### Die individuell beste Leistung

Neben der Ermittlung des „absoluten Champions“ unter den Weltrekordläufern kann der Quotient  $c^*$  auch einem einzelnen Läufer zum Vergleich seiner Leistungen über verschiedene Laufstrecken dienen.

Wir verdeutlichen dies am Beispiel der Laufleistungen des deutschen Zehnkämpfers Jürgen Hingsen, die dieser beim Gewinn der Silbermedaille bei den Olympischen Spielen 1984 in Los Angeles erzielte.

Laufstrecke s in m	Zeit t in sec	Quotient $c^* = t/s^{1.12}$
100	10.91	0.0628
400	47.69	0.0581
1500	262.60	0.0727

Offensichtlich ist die Leistung über 400 m die „beste“, die über 1500 m mit Abstand die schlechteste. Wir sehen uns einmal die Punktbewertung für die drei Laufleistungen an, wie sie nach der offiziellen Zehnkampfbewertung des Deutschen Leichtathletikverbandes (Stand 1994) aussieht:

100 m --> 881 Punkte      400 m --> 925 Punkte      1500 m --> 794

Die Rangordnung der Punktbewertung stimmt mit der durch den Quotienten  $c^*$  hergestellten Rangordnung überein.

Wie sieht dies bei den Weltrekordzeiten über diese drei Laufstrecken aus?

Laufstrecke	Weltrekordzeit	$c^* = \frac{t}{s^{1.12}}$	Punkte
100 m	9,83	0.0565	1139
400 m	43,29	0.0527	1150
1500 m	209,46	0.0580	1191

Hier erhalten wir auf Grund des Quotienten  $c^*$  die Rangordnung 400m - 100 m - 1500 m, nach der Punktbewertung aber 1500 m - 400 m - 100 m. Dies mag daran liegen, daß der typische Zehnkämpfer bei den Sprintstrecken eher an die absoluten Höchstleistungen herankommt als dies bei längeren Strecken der Fall ist.

Auch die 200 m sind in der Mehrkampfbewertung berücksichtigt. Für die Weltrekordzeit von 19,72 Sekunden gibt es demnach 1124 Punkte.

Nach der 1985 eingeführten Internationalen Mehrkampfbewertung werden die Punkte nach mathematischen Formeln berechnet. Für die Laufdisziplinen lautet diese Formel bei elektronischer Zeitmessung :

$$P = a \cdot (b - M)^c$$

P steht für die Punktzahl, M für die elektronisch gemessene Zeit in Sekunden. Die Parameter a, b und c sind für verschiedene Laufstrecken unterschiedlich:

Laufstrecke	a	b	c
100 m	25,4347	18 sec	1,81
200 m	5,8425	38 sec	1,81
400 m	1,53775	82 sec	1,81
1500 m	0,03768	480 sec	1,85

b ist jeweils der Wert, ab dem es keine Punkte mehr gibt.

Daß im obigen Vergleich bei Jürgen Hingsen die 1500 m - Zeit dennoch die geringste Punktzahl einbringt, mag an der auch für Zehnkämpfer relativ schlechten Zeit liegen.

Wir fassen die letzten Überlegungen nochmals zusammen:

Der theoretische Wert  $c^*$  kann genutzt werden, um

- um für einen Läufer seine "beste" Laufdistanz zu bestimmen
- Läufer auf verschiedenen Laufdistanzen zu vergleichen
- unter den Weltrekordlern über die verschiedenen Laufstrecken den "absoluten Champion" zu ermitteln. Nach unserer Tabelle wäre dies Pietro Mennea über 200 m.

## Weitere Aufgaben und Untersuchungen

In der skizzierten Unterrichtssequenz ist ein bestimmter Weg der Modellierung mit manchen Entdeckungen und Interpretationen dargestellt. Auch einige mögliche zusätzliche Aufgaben wurden zur Bearbeitung angeboten. Im konkreten Unterricht werden Schülerinnen und Schüler noch andere Untersuchungen und Modellierungen vorschlagen. Einige solcher Möglichkeiten und Aufgaben sollen noch angedeutet werden.

- Eine Modellierung über das eingangs dargestellte Diagramm Laufstrecke - Zeit für 1m oder über ein Diagramm Laufstrecke - Durchschnittsgeschwindigkeit
- Paßt der Meilenweltrekord (1693.49 m| 226,32 Sekunden) in die ermittelte Ausgleichskurve bei den Laufstrecken Männer?
- Wie ordnen sich die Weltrekordzeiten über die Hürdenstrecken ein? (110 m|12.92 sec), (400 m|47.02 sec)
- Bestimmung des absoluten Champions bei den anderen untersuchten Disziplinen (Lauf Frauen, Freistilschwimmen Frauen und Männer) nach den verschiedenen Kriterien
- Ähnliche Untersuchungen bei anderen Disziplinen, etwa Eisschnellauf oder Gehen. In der anschließenden Tabelle sind die Daten für den Eisschnellauf auf dem Stand von 1990 [5] angegeben.

Eisschnellauf Herren

Strecke	Weltrekord
500 m	36,23 sec
1000 m	72,05 sec
1500 m	112,48 sec
3000 m	236,65 sec
5000 m	403,59 sec
10000 m	828,20 sec

Eisschnellauf Damen

Strecke	Weltrekord
500 m	39,1 sec
1000 m	77,65 sec
1500 m	119,3 sec
3000 m	251,94 sec
5000 m	434,13 sec

- Welcher Zusammenhang ergibt sich, wenn man die Weltrekordzeiten zu einem früheren Zeitpunkt (um aktuellen Zeitpunkt) betrachtet? Die nachfolgende Tabelle gibt die Weltrekordzeiten in den Laufstrecken im Jahr 1960 an [1].

Strecke in m	Weltrekord in sec	Athlet/Jahr
100	10,0	Armin Hary BRD 1960
200	20,0	Davis Dime USA 1956
400	45,2	Lou J. Jones USA 1956
800	105,7	Roger Moens BELGIEN 1955
1500	216,0	Herb Elliot AUS 1958
5000	815,0	V. Kuz SU 1957
10000	1710,4	V. Kuz SU 1956

- Herleitung oder Begründung von Verfahren zur Ermittlung von Regressions-geraden oder -kurven.

Eine theoretische Herleitung eines Modells wie beim dritten Keplerschen Gesetz ist hier nach den bestehenden Kenntnissen und Theorien schwer möglich. Hier müßte man sowohl die dynamischen Bewegungsgleichungen als auch eine Gleichung für das Sauerstoffgleichgewicht berücksichtigen. Zudem müßte man wohl verschiedene Ansätze für die Kurzstreckenläufe mit ihren starken Beschleunigungen am Anfang und den Langstrecken mit ihren halbwegs konstanten Laufgeschwindigkeiten unterscheiden. In [3] wird ein solcher Ansatz dargestellt, er ist hinreichend kompliziert.

## Hinweise zum Unterricht

Wir haben bei der Bearbeitung der Daten durchgängig die komfortablen statistischen Tools des TI82 (Listen, Bearbeitung von Listen, graphische Darstellungen im Streudiagramm, Residuen, log-log-Plot, Ausgleichsgeraden und -kurven) benutzt. Selbstverständlich eignet sich hierfür auch eine Tabellenkalkulation oder spezielle Statistiksoftware.

Auf Grund der relativ kleinen Listen im gegebenen Zusammenhang eignet sich die Sequenz aber auch für eine allmähliche Hinführung zu dieser statistischen Technologie über entsprechende „händische“ Übungen an den Tabellen, mit Benutzung von doppelt-logarithmischem Papier und einem einfachen Taschenrechner. Dies empfiehlt sich insbesondere, wenn noch keinerlei Vorkenntnisse mit den angewandten statistischen Begriffen und Verfahren vorhanden sind. Wir haben in der obigen Darstellung diese ja jeweils nur kurz erwähnt und dann angewandt. Bei einem Erstzugang wird man die Modellierung durch eine begleitende Einführung in die statistischen Verfahren nutzen. Mit Hilfe des Handbuchs zum graphischen Taschenrechner, dem Rechenduden und den Einführungen in die Statistik kann dies mit großer Eigenständigkeit der Schülerinnen und Schüler geschehen. Eine problemorientierte Einführung im Sinne der Explorativen Datenanalyse findet man in [6].

Die Modellierung ist besonders günstig in Team- oder Gruppenarbeit durchzuführen, in vielen Bereichen lohnt sich auch arbeitsteiliges Vorgehen. Unterschiedliches „Expertenwissen“ kann eingebracht werden, sowohl aus dem Bezug zum Sport als auch im Rahmen der mathematischen Aufarbeitung spezieller statistischer Verfahren.

## Anmerkung zum graphischen Taschenrechner

Wir haben die Ausgleichskurven (Potenzfunktion) über die Darstellung der Daten im log-log-Plot, die anschließende Bestimmung der Regressionsgeraden und Rückrechnung von Steigung und Achsenabschnitt bestimmt. Der TI 82 bietet mit der Funktion **PwrReg** (power regression) die Möglichkeit, die Potenzfunktion als Ausgleichskurve direkt zu bestimmen. Wir haben dies in den Lösungsskizzen zu den Aufgaben oben bereits benutzt.

```
PwrReg
y=a*x^b
a=.0551715318
b=1.134734519
r=.9996798231
```

Laufen Frauen

```
PwrReg
y=a*x^b
a=.3778240229
b=1.077985921
r=.9997858197
```

Freistilschwimmen

Der TI 82 stellt insgesamt eine Reihe von Funktionen für die Regressionsanalyse bereit, neben der linearen Regression auch Polynomregressionen 2.,3. und 4.Grades, logarithmische Regression, exponentielle Regression und eben auch Potenzregression.

Im Handbuch werden die Regressionsfunktionen beschrieben, z.B.

**LinReg(ax+b)** **LinReg(ax+b)** (linear regression) paßt die Daten dem Modell  $y=ax+b$  mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und  $x$  und  $y$  an. Es werden **a** (Steigung), **b** (Achsenabschnitt) und **r** (Korrelationskoeffizient) angezeigt.

**PwrReg** **PwrReg** (power regression) paßt die Daten der Modellgleichung  $y=ax^b$  mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate und den transformierten Werten **ln(x)** und **ln(y)** an. Es werden **a**, **b** und **r** (Korrelationskoeffizient) angegeben.

Im Rahmen der obigen Betrachtungen und Aufgaben kann diese Regressions-funktion durchsichtig gemacht und dann benutzt werden. (Aufgaben oder Referate).

## Literatur

- [1] Engel,A., Mathematik und Sport, in: Praxis der Mathematik 4/1962, Seite 97-80
- [2] Burghes,D., Mathematics and Sports, in: Mathematical Spectrum 13, 1980/81, Seite 43 - 49
- [3] Keller, J.B., Optimal velocity in a race, in: American Mathematical Monthly 81, 1974, Seite 474-480
- [4] Fuchs/Lames, Mathematische Modellierung des Wettkampfverhaltens im Sprint, in: Leistungssport 5/1990
- [5] Umminger W., Die Chronik des Sports, Dortmund 1990
- [6] Noll/Schmidt, Trends und Zusammenhänge, in: Materialien zur Explorativen Datenanalyse und Statistik in der Schule, Landesinstitut für Schule und Weiterbildung in Soest, 1994