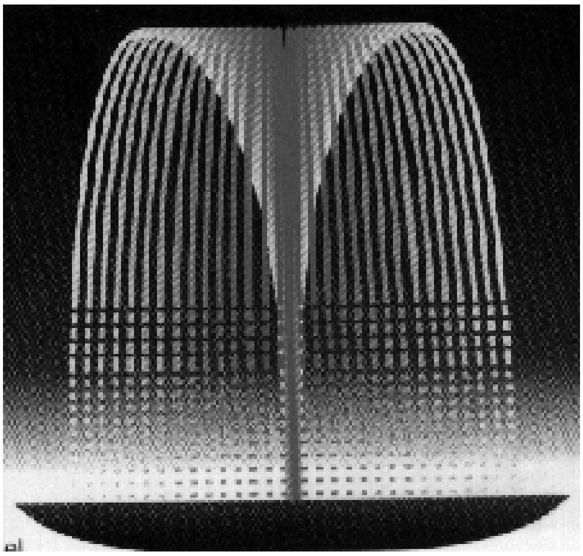
Springbrunnen

von Günter Schmidt

Themenbereich	
Analysis	
Inhalte	**Ziele**
• schiefer Wurf und Parabeln • Parameterdarstellung von Funktionen • Extremwertbestimmung bei reellen Funktionen	• Beschreiben realer Phänomene mit Hilfe von Funktionen • Verschiedene Darstellungen von Funktionen , insbesondere Parameterdarstellung • Arbeiten mit Funktionen



In der Mitte eines kreisförmigen Springbrunnens sind auf einer kleinen Halbkugel Düsen angebracht, aus denen Wasserfontänen in einem bestimmten Winkel und mit einer bestimmten Geschwindigkeit austreten.

- Zeige, daß die Wasserteilchen der Fontänen sich auf Parabelbahnen bewegen.

Die in einer Ebene befindlichen Düsen werden in Stufen von jeweils 15° in Winkeln von 15° bis 75° eingestellt. Über den Durchmesser der Düsen läßt sich die Austrittsgeschwindigkeit der Wasserfontäne bestimmen.

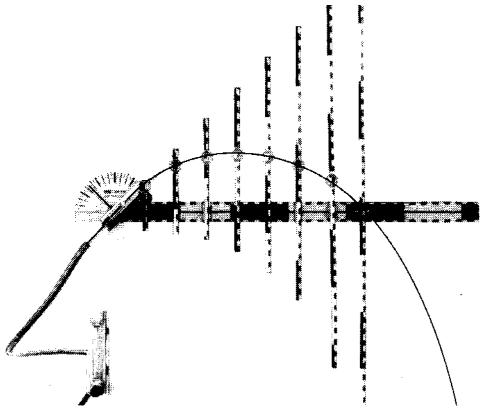
- Wie müssen die Austrittsgeschwindigkeiten bei den einzelnen Düsen gewählt werden, damit alle Fontänen kurz vor dem Rand des Springbrunnens (Radius 10 m) auftreffen.

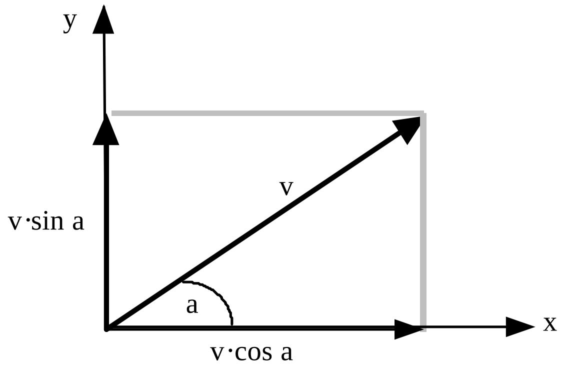
- Zeichne die Parabelschar.

Lösungsskizze Teil 1

Der erste Teil der Aufgabe läßt sich nicht allein mit mathematischen Mitteln bearbeiten, wir müssen einige Erkenntnisse aus der Mechanik nutzen.

Ein aus der Düse austretendes Wasserteilchen gehorcht den Gesetzen des schiefen Wurfes. Dabei überlagern sich zwei verschiedene Bewegungsformen des Wasserteilchens unabhängig. Einmal vollführt das Teilchen eine gleichmäßig geradlinige Bewegung in der durch den Austrittswinkel gegebenen Richtung. Der in der Zeit t zurückgelegte Weg s_1 hängt von der Geschwindigkeit v ab: $s_1 = v \cdot t$ Durch die Erdanziehungskraft bewegt es sich aber gleichzeitig in einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung senkrecht nach unten. Hier berechnet sich der in der Zeit t zurückgelegte Weg s_2 nach der Formel $s_2 = \frac{g}{2} \cdot t^2$ wobei g die Konstante für die Erdbeschleunigung ist. ($g \approx 9.81 \frac{m}{\sec^2}$)





Die wirkliche Bahnkurve resultiert aus der Überlagerung dieser beiden Bewegungen.

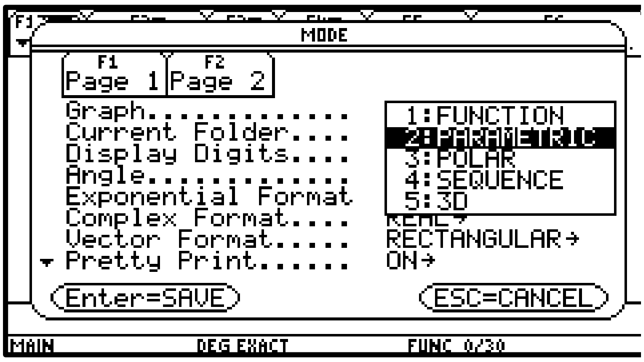
Für die mathematische Bearbeitung ist es nun günstig, die Bewegung im rechtwinkligen Koordinatensystem darzustellen und hierfür eine Zerlegung in eine x-Komponente und in eine y-Komponente vorzunehmen. Die gleichmäßig geradlinige Bewegung liefert in beiden Komponenten einen Anteil, die beschleunigte Fallbewegung nur für die y-Komponente. Für einen Austrittswinkel a gilt dann:

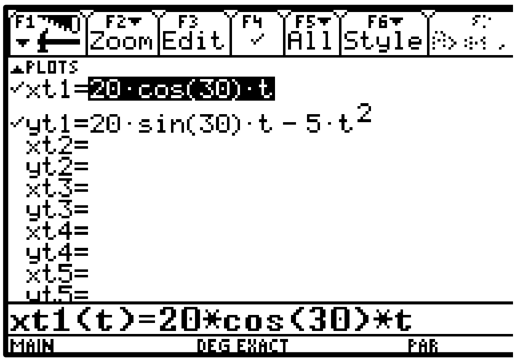
$$x(t) = v \cdot \cos(a) \cdot t$$

$$y(t) = v \cdot \sin(a) \cdot t - 5t^2$$

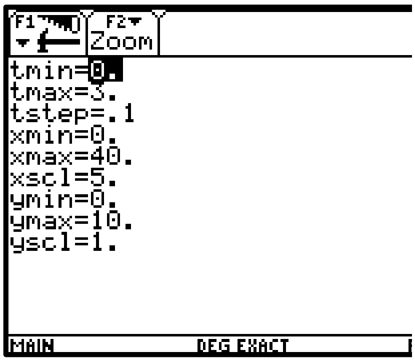
Mit dem Paar (x(t)| y(t)) wird nun die Position des Wasserteilchens zum Zeitpunkt t beschrieben, die aufeinanderfolgenden Positionen ergeben die Bahnkurve.

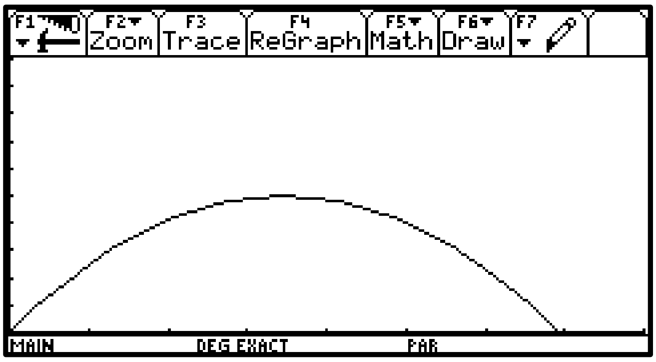
Diese Beschreibung einer Kurve nennt man die Parameterdarstellung einer Kurve, der Parameter ist in diesem Falle die Zeit t. Die Kurve können wir mit dem TI-92 darstellen. Hierzu wählen wir in MODE bei Graph die Option 2: PARAMETRIC und geben dann über Y die beiden Gleichungen ein.
Wir wählen a = 30° und v = 20 m/s und g=10 m/s².



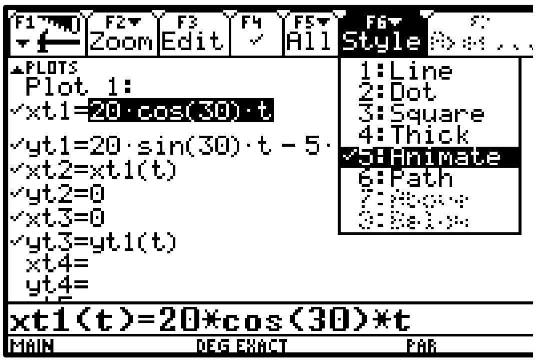


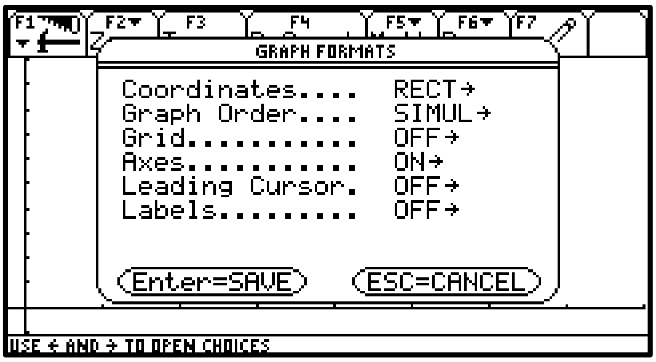
Mit den entsprechenden Einstellungen in WINDOW erhalten wir den Graph.

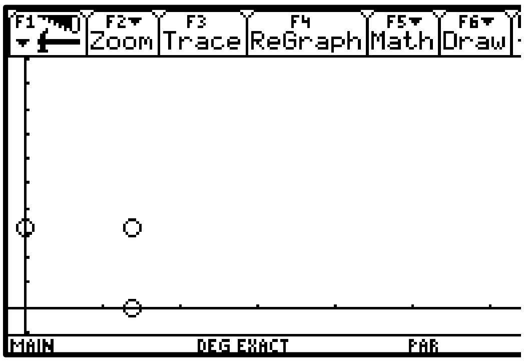


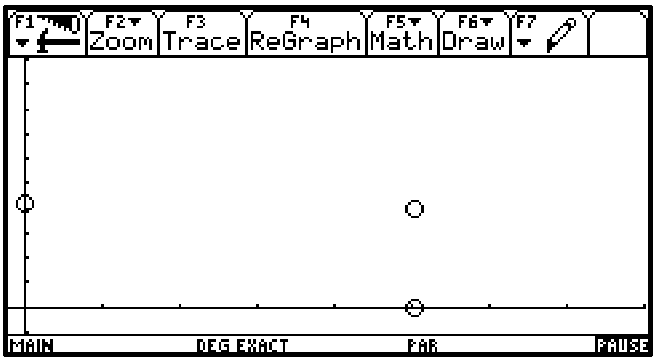


Im Funktions- Menü (Y=) steht uns eine Option zur Verfügung, mit der wir die unabhängige Zusammensetzung der Bewegung aus den beiden Bewegungskomponenten eindrucksvoll demonstrieren können. Wir geben zusätzlich für die beiden Einzelbewegungen die passenden Parametergleichungen ein und stellen für jede Parametergleichung unter F6 Style die Option 5: Animate ein. Wenn wir jetzt im Graphik-Fenster unter GRAPH FORMATS (F) unter Graph Order die Einstellung SIMUL(TAN) wählen, so können wir die simultanen Bewegungen dreier „Bälle“ verfolgen.

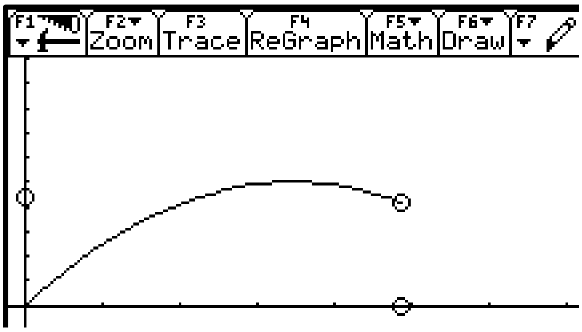






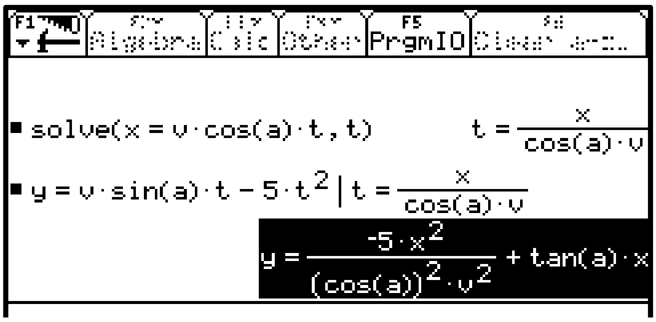


Wenn wir für die zusammengesetzte Bewegung (xt1,yt1) die Option
6:Path an Stelle von
5:Animate wählen, so können wir für die Bewegung dieses Balles auch noch die Bahnkurve dynamisch aufzeichnen.



Es bleibt nun noch der Nachweis, daß es sich bei der Bahnkurve tatsächlich um eine Parabel handelt.

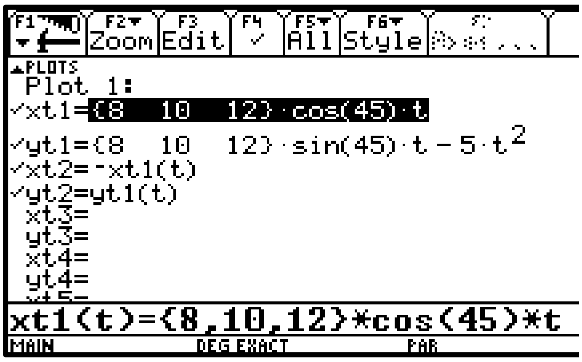
Diesen Nachweis führen wir auf die übliche Art, indem wir die Parameterdarstellung in die Funktionsdarstellung y=y(x) überführen.

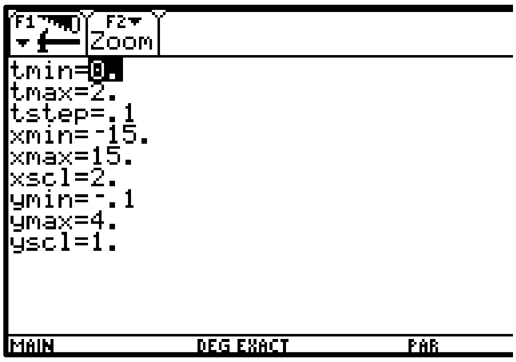


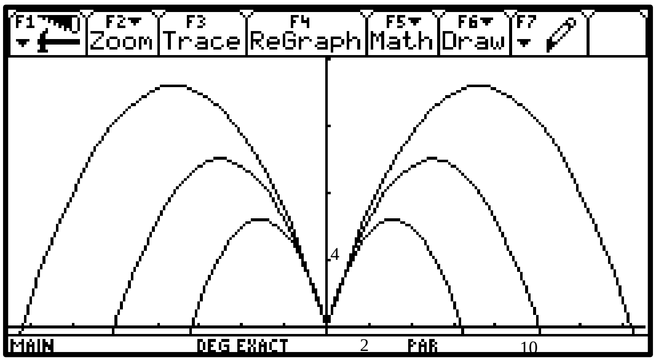
Lösungsskizze zu Teil 2

Den zweiten Teil der Aufgabe - die gewünschte Düseneinstellung des Sprinbrunnens - gehen wir zunächst experimentell an. Zunächst idealisieren wir die (kleine) Halbkugel, auf der die Düsen angebracht sind, zu einem Punkt.

Wir beginnen unser Experiment der Symmetrie wegen mit einem Austrittswinkel von 45° und versuchen es mit verschiedenen Geschwindigkeiten 8 m/s, 10 m/s und 12 m/s. Wir können dies bei den Parametergleichungen als Liste { } eingeben.
Im Graph erkennen wir, daß v=10 m/s die geforderte Bedingung erfüllt, d.h. die Fontäne trifft dann im Abstand von 10 m am Rand des Springbrunnens auf.



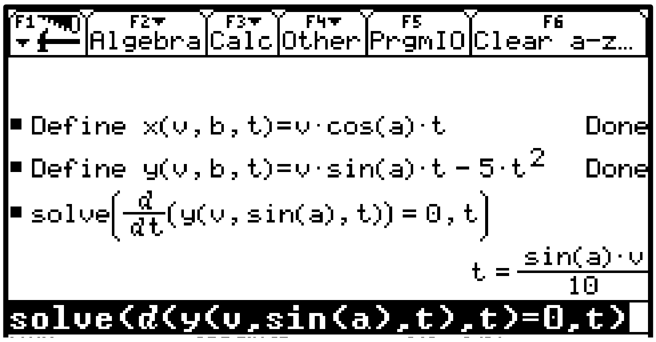


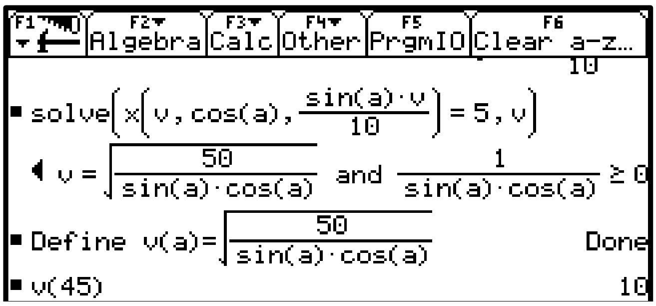


Die Geschwindigkeiten für die weiteren Winkel lassen sich nun auf gleiche Weise durch Experimentieren bestimmen.

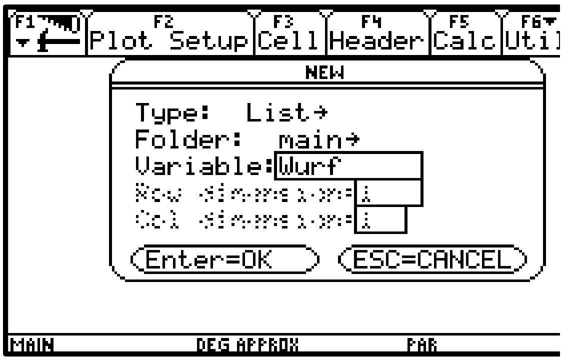
Wir gehen hier jedoch einen anderen Weg, bei dem wir mit Hilfe von Algebra und Analysis die Werte berechnen und uns damit eine beliebig feine Tabelle erstellen können.

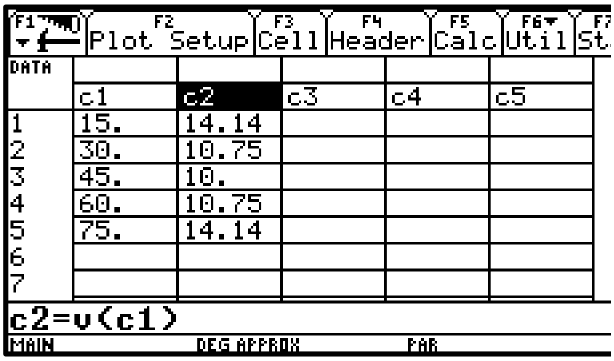
Wir bestimmen zunächst den Zeitpunkt t_{max}, für den das Maximum der Parabel erreicht ist. In x-Richtung hat das Teilchen zu diesem Zeitpunkt gerade die Hälfte der Strecke bis zum Auftreffpunkt zurückgelegt. (Symmetrie der Parabel). Die Länge dieser Strecke muß nach unseren Forderungen also gerade 5 m betragen. Einsetzen von t_{max} in x(t) und Auflösen der Gleichung $x(t_{max})=5$ nach v liefert dann die gesuchte Geschwindigkeit v.

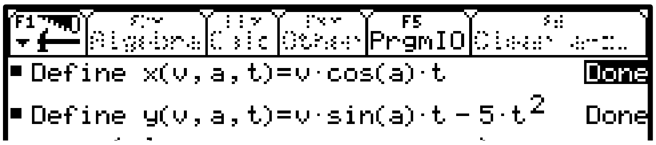


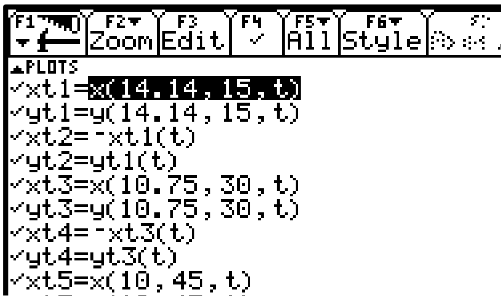


Die Zuordnung a->v(a) stellen wir uns der Übersicht halber in einer Tabelle dar. Wir rufen dazu mit der Taste APPS den Data/Matrix-Editor auf , wählen hier NEW und anschließend den Typ List. In die Liste c1 geben wir nun die vorgegebenen Winkel für die Düsen ein. Die zugehörigen Geschwindigkeiten v(a) können über die vorher definierte Formel direkt berechnen und in die Liste c2 eintragen.

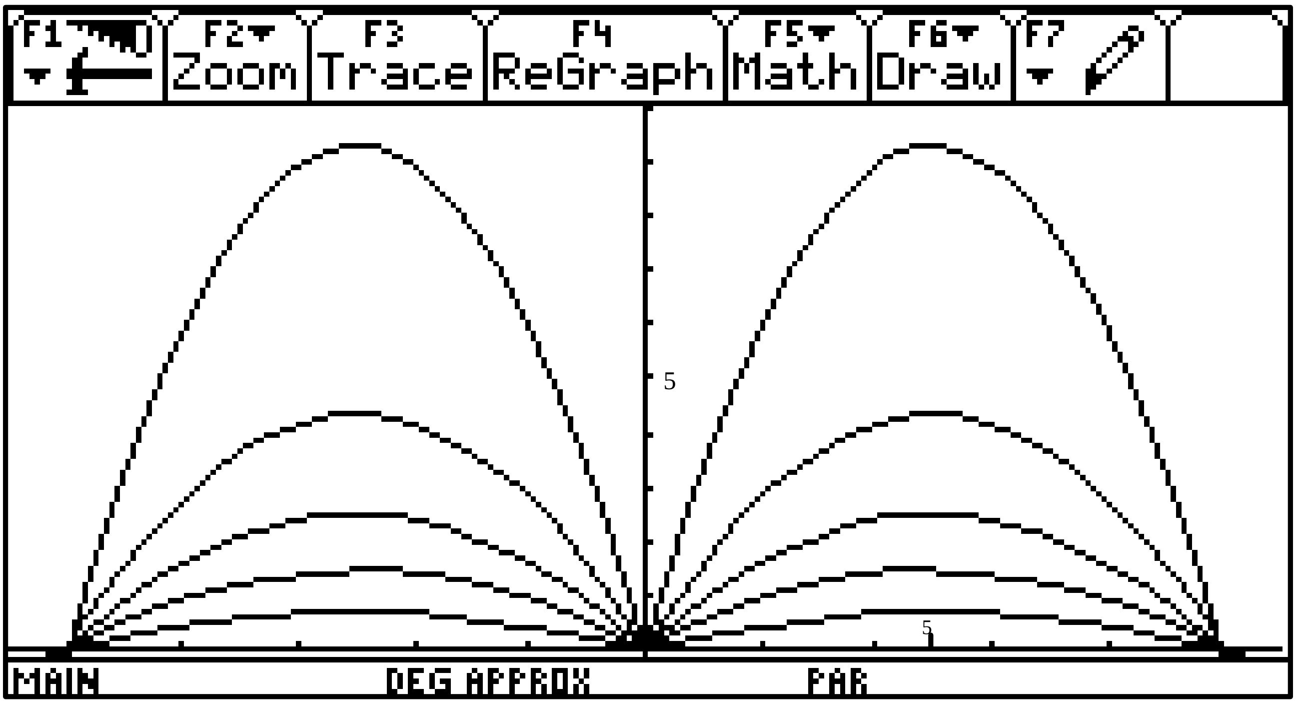






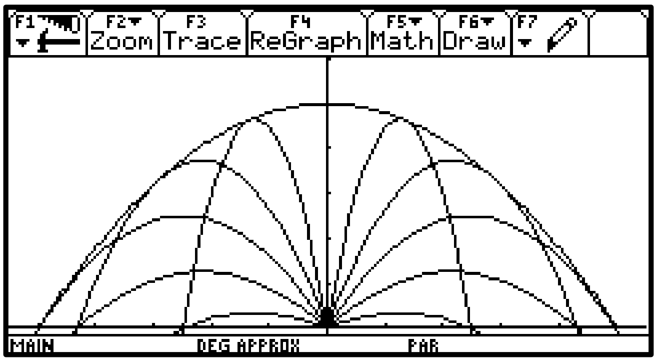


Die Parameterdarstellungen mit diesen Werten liefern uns nun die Graphen, die einen ebenen Schnitt durch den vorschriftsmäßig konstruierten Springbrunnen veranschaulichen.



Zusatzaufgaben und Erweiterungen

- Nachweis, daß bei konstanter Geschwindigkeit v die größte Weite bei einem Austrittwinkel von 45° erreicht wird
- Berücksichtigung der Halbkugel (r=0.1m). Die Spitzen der Düsen befinden sich dann in den Positionen (rcos(a)| rsin(a)). Wie wirkt sich dies auf die Parabelkurven der Fontänen aus?
- Andere Konstruktionen von Springbrunnen, z,B. Düsen in verschiedenen Höhen.
- Bei allen Düsen gleiche Austrittsgeschwindigkeit, dann Konstruktion von Düsen zur Erzeugung der einhüllenden Grenzparabel



Literatur

[3.1] F. Kursawe, Extremwertaufgaben zum schiefen Wurf, in: Der Mathematikunterricht, Jg 23, Heft 4/1977, Seiten 63-72

[3.2] Mathematiklehren Heft 37 „Parabeln“, Dezember 1987

[3.3] H.-J. Kayser, DERIVE im SII-Unterricht - Analysis, Kap.3.1 „Extremwertaufageben - Extremwertaufgaben ?!“ in: Neue Medien im Unterricht, DERIVE - ein mathematischer Assistent, Seite 59-70, herausgegeben vom Landesinstitut für Schule und Weiterbildung, Soest 1993

[3.4] A. Keil, Trainingsprogramm für Kugelstoßer, erscheint 1996 in: Materialien zum Mathematikunterricht mit Computer und DERIVE, herausgegeben vom Landesmedienzentrum in Rheinland-Pfalz, Koblenz 1996

Kurzkommentar zur Literatur

In dem Aufsatz von Kursawe [3.1] findet man weitere Anwendungsbeispiele mit schönen Ansätzen zur theoretischen Vertiefung. In dem Heft [3.2] findet man eine Reihe von Vorschlägen zur Behandlung der Parabel in den unterschiedlichen Klassenstufen. Bei den meisten Vorschlägen ist kein Computereinsatz intendiert, sie können aber durch den Einsatz des TI-92 variiert werden. Die Beiträge von Kayser [3.3] und Keil [3.4] zeigen Möglichkeiten der unterrichtlichen Behandlung des schiefen Wurfs mit Einsatz von DERIVE. Bei Keil wird der Modellierungsprozeß in seinen verschiedenen Stufungen beschrieben.