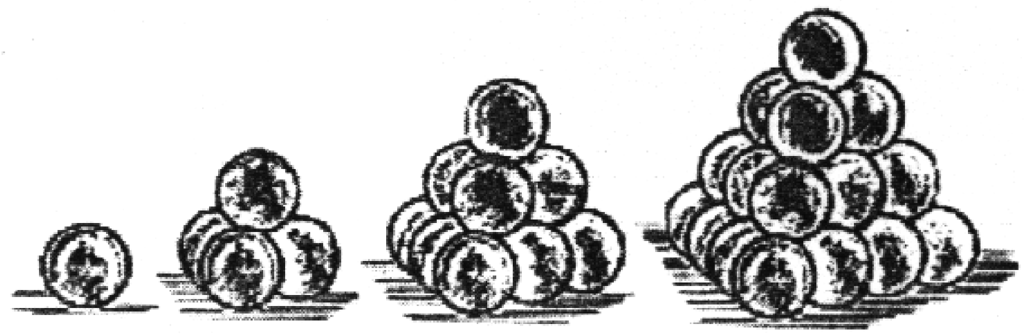
Die Tennisballpyramide

von Günter Schmidt

Tennisbälle werden in der Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet, so daß sich darauf eine Pyramide aufbauen läßt. Erste Experimente verdeutlichen den stufenweisen Aufbau der Pyramiden und die schnell wachsende Anzahl von benötigten Tennisbällen.



Für eine zweistufige Pyramide benötigt man insgesamt 4 Bälle, für eine dreistufige 10, für eine vierstufige bereits 20 usw..

Das Problem ist nun gestellt:

Wieviel Tennisbälle benötigt man für eine fünfzigstufige (n-stufige) Pyramide?

Experimentieren und Zählen

Die ersten Ergebnisse des Experimentierens halten wir übersichtlich in einer Tabelle fest:

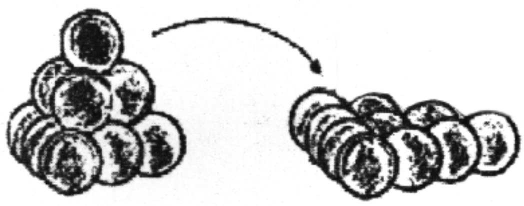
Stufenzahl n	Gesamtanzahl der Bälle f(n)
1	1
2	4
3	10
4	20
5	35

Die Zahl der Bälle wächst von Stufe zu Stufe offenbar immer schneller. Eine Gesetzmäßigkeit ist auf Anhieb nicht zu erkennen.

Strategien müssen her

Strategie A

Jede Pyramide entsteht aus der vorhergehenden, indem man diese auf ein neues Grunddreieck aufsetzt. Für das Grunddreieck der n-ten Stufe benötigt man gerade 1+2+3+...+n Bälle. Mathematiker drücken dies mit Hilfe einer **Rekursionsformel** aus:



$$\mathbf{f(n) = f(n-1) + (1 + 2 + 3 + ... + n)}$$

Leider müssen wir uns mit dieser Strategie noch recht mühsam in einzelnen Schritten von n=5 bis n=50 hocharbeiten, ein aufwendiges Unterfangen. Der Computer ist das geeignete Werkzeug für solche Aufgaben, er erledigt dies in Sekundenschnelle.

Wir bearbeiten die Rekursionsformel mit DERIVE:

```
#1:   "Tennisballpyramide"

#2:   "Strategie A"

                                     n
#3:   F(n) := IF(n = 1, 1, F(n - 1) + Σ  k)
                                    k=1

#4:   VECTOR([n, F(n)], n, 1, 5)

       ┌ 1    1 ┐
       │ 2    4 │
#5:    │ 3   10 │
       │ 4   20 │
       └ 5   35 ┘

#6:   F(50)

#7:   22100
```

Unser Problem ist damit im Prinzip gelöst, der Rechner berechnet uns zu jeder Stufe n die gesuchte Anzahl f(n). Allerdings fehlt uns noch eine explizite Formel für f(n), diese liefert auch DERIVE nicht mit „Symplify #3“.

Strategie B

Wir entwickeln die Strategie B zunächst für die Stufe 4 und 5 In den Dreiecken der verschiedenen vier Ebenen benötigen wir jeweils eine bestimmte Anzahl von Bällen:

Stufe 4

1. Ebene 4+3+2+1
2. Ebene 3+2+1
3. Ebene 2+1
4. Ebene 1

Damit ergibt sich insgesamt
$g(4) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1$

Stufe 5

1. Ebene 5+4+3+2+1
2. Ebene 4+3+2+1
3. Ebene 3+2+1
4. Ebene 2+1
5. Ebene 1

Damit ergibt sich insgesamt
$g(5) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$

Die Verallgemeinerung für die n-te Stufe führt zu der Formel:

$$g(n) = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 = \sum_{i=1}^{n} i \cdot (n - i + 1)$$

Diese Strategie läßt sich unmittelbar auf DERIVE umsetzen, in diesem Fall berechnet DERIVE auch die explizite Formel für die Summe g(n).

```
#8:  "Strategie B"

                n
#9:  G(n) :=    Σ   i·(n - i + 1)
               i=1

#10: VECTOR([n, G(n)], n, 6, 10)

      ⎡  6   56 ⎤
      ⎢  7   84 ⎥
#11:  ⎢  8  120 ⎥
      ⎢  9  165 ⎥
      ⎣ 10  220 ⎦

#12: G(50)

#13: 22100

#14: "Simplify #9"

      n·(n + 1)·(n + 2)
#15: ───────────────────
             6

             ⎛ n·(n + 1)·(n + 2)              ⎞
#17: EXPAND  ⎜───────────────────, Rational, n⎟
             ⎝         6                      ⎠

       3      2
      n      n      n
#18: ──── + ──── + ───
      6      2      3
```

Strategie C

In einer Tabelle tragen wir zu jeder Stufe i die Anzahl T(i) der Bälle im untersten Dreieck der Pyramide (Basisdreieck) und die Gesamtzahl P(i) der Bälle in der Pyramide auf.

Stufe i	Anzahl Bälle im Basisdreieck T(i)	Anzahl Bälle in der Pyramide P(i)
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56

Bei genauem Hinsehen fällt uns einiges auf:

1. Der Zuwachs der Bälle im Basisdreieck entspricht jeweils gerade der Stufenzahl i, d.h. T(2)=3=1+2, T(3)=6=3+3, T(4)=10=6+4 usw. Dies führt zu der Rekursionsformel

$$T(i) = T(i-1) + i$$

2. Der Zuwachs der Bälle in der Pyramide entspricht jeweils der Anzahl der Bälle im Basisdreieck. Dies entdeckten wir ja bereits bei der Strategie A. Also

$$P(i) = P(i-1) + T(i)$$

Die Umsetzung mit DERIVE:

```
#18: "Strategie C"
#19: T(i) := IF(i = 1, 1, T(i - 1) + i)
#20: P(i) := IF(i = 1, 1, P(i - 1) + T(i))
#21: VECTOR([n, T(n)], n, 1, 10)
      ⎡ 1   1 ⎤
      ⎢ 2   3 ⎥
      ⎢ 3   6 ⎥
      ⎢ 4  10 ⎥
      ⎢ 5  15 ⎥
#22:  ⎢ 6  21 ⎥
      ⎢ 7  28 ⎥
      ⎢ 8  36 ⎥
      ⎢ 9  45 ⎥
      ⎣10  55 ⎦
```

```
#23: VECTOR([n, P(n)], n, 1, 10)
      ⎡ 1    1 ⎤
      ⎢ 2    4 ⎥
      ⎢ 3   10 ⎥
      ⎢ 4   20 ⎥
#24:  ⎢ 5   35 ⎥
      ⎢ 6   56 ⎥
      ⎢ 7   84 ⎥
      ⎢ 8  120 ⎥
      ⎢ 9  165 ⎥
      ⎣10  220 ⎦
#25: P(50)
#26: 22100
```

Strategie D

Diese Strategie nutzt die Summenformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Diese können wir uns direkt von DERIVE ausgeben lassen. Mit Hilfe dieser Formel können wir dann die Anzahl der Bälle unserer Tennisballpyramide als Summe der Anzahlen in jeder Ebene berechnen.

Wie bei Strategie B gibt uns DERIVE hierbei auch wieder die explizite Formel aus.

#27: "Strategie D"

#28: $\sum_{i=1}^{n} i$

#29: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

#30: $\sum_{i=1}^{50} \frac{i\cdot(i+1)}{2}$

#31: 22100

#32: $\sum_{i=1}^{n} \frac{i\cdot(i+1)}{2}$

#33: $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$

Wege zur direkten Formel

Die aus den Strategien gewonnenen Rekursionsformeln und auch die Summen liefern uns die praktische Lösung unseres Problems. Aus zwei der Strategien gewinnen wir mit Hilfe des Computeralgebrasystems auch die explizite Formel, die die Berechnung der Anzahl der Bälle für eine Pyramide der Stufe n mit Hilfe eines algebraischen Terms gestattet.

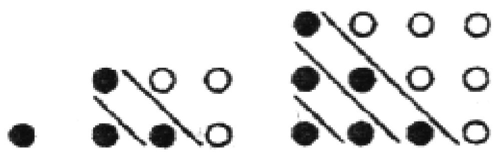
Für die Denker und Knobelexperten stellt sich nun die herausfordernde Frage, wie man zu dieser Formel findet.

„Aufwärmtraining“ mit Gauss und den Griechen

Für die Summe S(n) der ersten n natürlichen Zahlen können wir auf die dem jungen Gauss zugeschriebene Idee zurückgreifen, indem wir die Summe zweimal in umgekehrter Reihenfolge untereinander schreiben und dann entsprechend gliedweise addieren.

```
  1   +   2   +    3  + ... + (n-1)  +  n
  n    + (n-1)  + (n-3) + ...  +    2    +   1
--------------------------------------------------
(n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1)
```

Auch die alten Griechen bieten mit ihren figurierten Zahlen einen Zugang zur Formel durch einfaches Hinschauen!



$$2\cdot S(n) = n\cdot(n+1) \Rightarrow S(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Für die Zahlen unserer Tennisballpyramide greifen beide obige Ideen nicht, der Weg wird etwas mühsamer, aber nicht weniger abwechslungsreich.

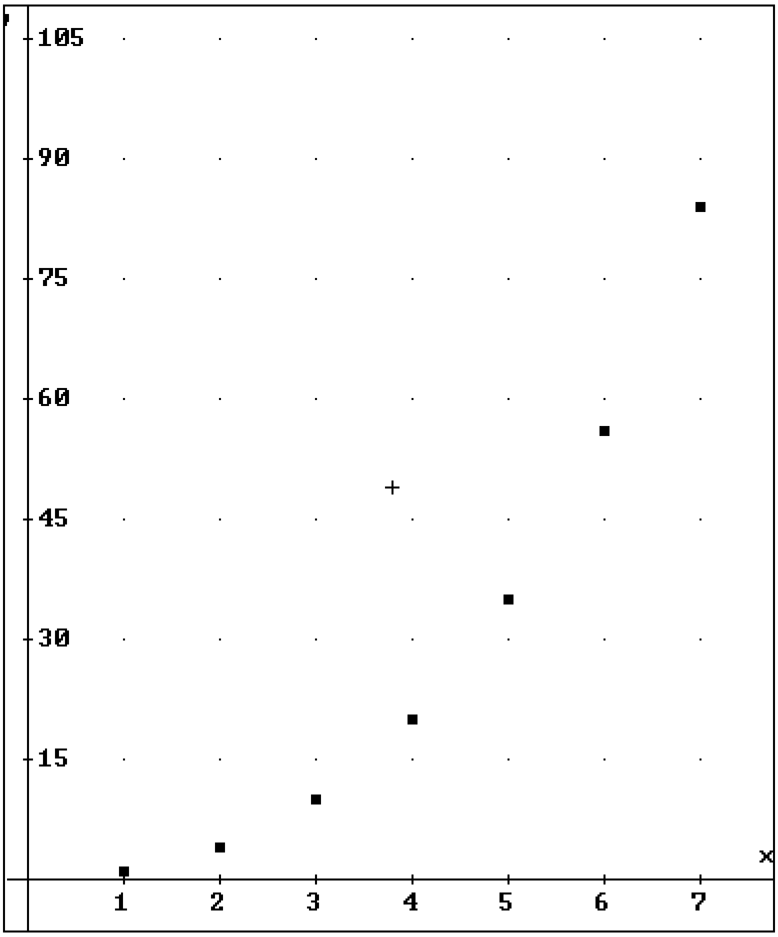
Funktionen und Graphen

Jeder Stufe n der Pyramide wird die benötigte Anzahl f(n) der Tennisbälle zugeordnet. Eine solche Zuordnung n -> f(n) ist eine Funktion, hier speziell eine Folge.

Wir suchen offensichtlich den Funktionsterm f(n).

Die Suche wird vielleicht erleichtert, wenn wir uns die tabellierten Anfangswerte in einem Graph veranschaulichen. Dies ist mit DERIVE leicht möglich, wir plotten einfach eine der vorher schon erstellten Tabellen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 10 \\ 4 & 20 \\ 5 & 35 \\ 6 & 56 \\ 7 & 84 \\ 8 & 120 \\ 9 & 165 \\ 10 & 220 \end{bmatrix}$$



Die Punkte liegen auf einer Kurve, die eine Parabel sein könnte. Es gilt einen passenden Funktionsterm f(x) zu finden.

1.Versuch: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Durch Einsetzen der Punkte (0,0), (1,1) und (2,4) erhalten wir $f(x) = x^2$
Schon das Einsetzen des nächsten Punktes (3,10) führt zum Verwerfen dieses Ansatzes.

2.Versuch: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
Einsetzen der Tabellenwerte (1,1), (2,4) und (3,10) führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ 8a + 4b + 2c &= 4 \\ 27a + 9b + 3c &= 10 \end{aligned}$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit Hilfe von DERIVE. Zur Demonstration der Möglichkeiten geben wir drei verschiedene Lösungswege an.

#34: "Loesen des inhomogenen (3-3)-Systems"

#35: "1.Loesung mit Gauss-Algorithmus"

#36: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

#37: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

#38: ROW_REDUCE$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}\right)$

#39: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

#40: "Loesen mit inverser Matrix"

#41: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$

#42: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

#43: $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

#44: $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

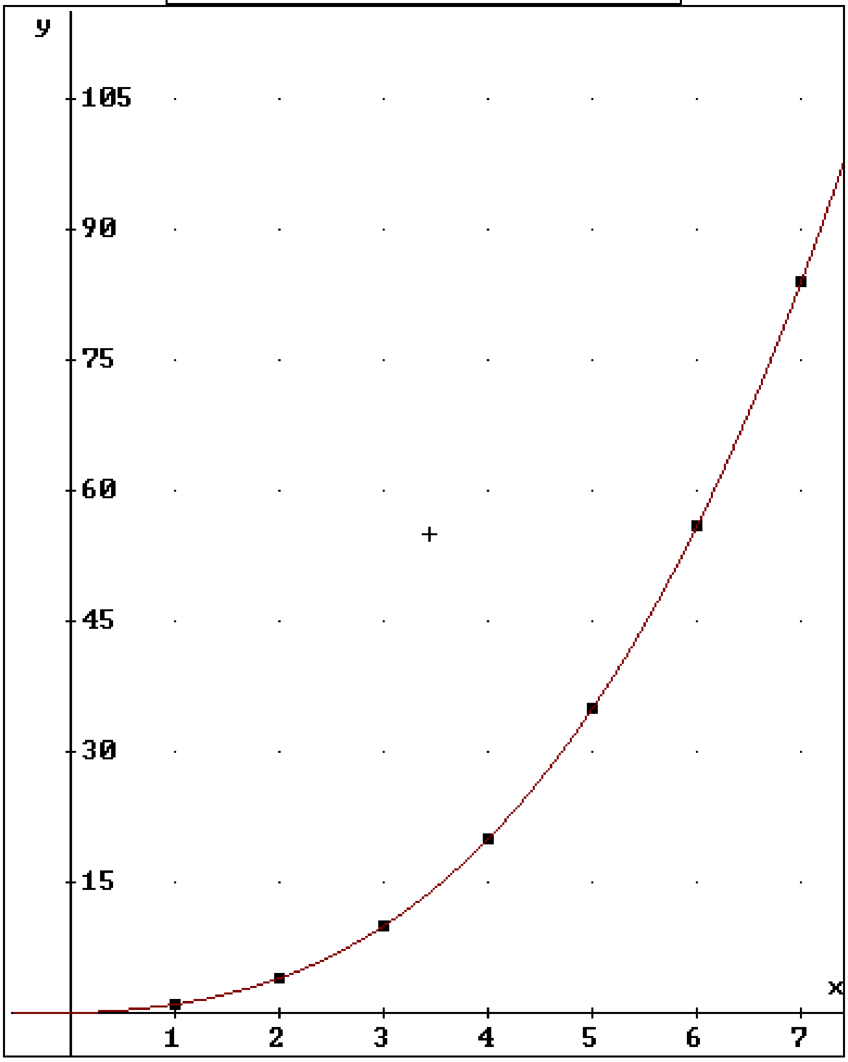
#46: "Loesen mit solve"

#47: SOLVE([a + b + c = 1, 8·a + 4·b + 2·c = 4, 27·a + 9·b + 3·c = 10], [a, b, c])

#48: $\left[a = \frac{1}{6} \quad b = \frac{1}{2} \quad c = \frac{1}{3} \right]$

Die ganz-rationale Funktion 3.Grades mit den errechneten Koeffizienten a, b und c plotten wir dann in unser Bild mit den Punkten der Zahlenfolge f(n). Die Punkte liegen tatsächlich alle auf dem Funktionsgraphen. Damit ist ein erster Weg zum Auffinden der Formel beschrieben. Wir werden sehen, daß dieser Weg auch bei anderen Problemstellungen (etwa Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen) greift.

$$\#49:\ GR(x) := \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$



Ausgleichskurven

Wir wollen hier noch eine weitere Möglichkeit zum Auffinden der Formel skizzieren, die mit DERIVE leicht zu realisieren ist. Mit der Funktion FIT läßt sich ein Ausgleichspolynom zu vorgegebenen Punkten berechnen. Dies geschieht nach der Methode der Minimierung der Gausschen Fehlerquadrate. Falls die Punkte exakt auf einem Polynom 3.Grades liegen, so erhalten wir als Ausgleichskurve eben dieses Polynom.

#55: "Ausgleichspolynom 3.Grades"

$$\#53:\ \mathrm{FIT}\begin{bmatrix} x & a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 10 \\ 4 & 20 \\ 5 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\#54:\ \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$

Eine überraschende Entdeckung am Pascalschen Dreieck

Was hat das Pascalsche Dreieck mit unserer Tennisballpyramide zu tun? Ein genaues Hinsehen offenbart Erstaunliches!

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 **4** 6 4 1
1 5 **10** 10 5 1
1 6 15 **20** 15 6 1
1 7 21 35 **35** 21 7 1
1 8 28 56 70 **56** 28 8 1

In der rechts gekennzeichneten Diagonale stehen offensichtlich gerade unsere Tennisballpyramidenzahlen f(n). Da wir das Pascalsche Dreieck beliebig weit schrittweise aufbauen können, erhalten wir auf diese Weise auch unsere Zahlen für beliebig großes n, allerdings mit einem ständig wachsenden Aufwand. Hier hilft uns unser theoretisches Wissen weiter.

Die Zahlen im Pascalschen Dreieck sind ja die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ („n über k“), wobei n die Zeilen des Dreiecks und k die schrägen Spalten des Dreiecks numeriert (jeweils bei 0 beginnend).

Für die Zahlen unserer Tennisballpyramide finden wir damit die Binomialkoeffizienten

$$f(n) = \binom{n+2}{n-1}$$

Mit Hilfe von DERIVE können wir die Binomialkoeffizienten berechnen und kommen so auf einem weiteren Weg zu der gesuchten Formel für f(n).

#54: "Pascalsches Dreieck"

#55: COMB(n + 2, n − 1)

#56: $\dfrac{n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)}{6}$

#57: $\mathrm{EXPAND}\left(\dfrac{n\cdot(n + 1)\cdot(n + 2)}{6}, \mathrm{Rational}, n\right)$

#58: $\dfrac{n^3}{6} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{3}$

Übrigens hat Blaise Pascal (1623 -1662) diese Zusammenhänge schon in seinen Abhandlungen „Traité du triangle arithmetiques“ beschrieben. Er nannte die Zahlen der hier betrachteten Diagonalen auch bereits „nombres pyramidaux“, eine für uns nun sehr verständliche Bezeichnung.

Von der Problemlösung zum Beweis

Über ganz verschiedene Wege sind wir zu der gleichen Formel für f(n) gelangt. Deshalb sind wir von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt, zumal wir sie darüberhinaus auf vielfältige Weise bestätigen konnten. Strengsten mathematischen Ansprüchen genügt dies allerdings nicht. Es wird ein Beweis verlangt. In diesem Fall bietet sich das Beweisverfahren der vollständigen Induktion an.

Selbst hierfür haben wir mit unseren heuristischen Überlegungen und Entdeckungen schon Vorarbeiten geleistet.

Wir erinnern uns an die Strategie A. Von daher wissen wir, daß gelten müßte
f(n) - f(n-1) = 1 + 2 + 3 + ... + n

Hält unsere Formel f(n) = $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ dieser Probe stand?

$$F(n) := \frac{n^3 + 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n}{6}$$

$$F(n) - F(n - 1)$$

$$\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Damit haben wir eine starke Begründung für die Gültigkeit unserer Formel.

Es bedarf nur noch einer leichten Umstellung und wir gelangen zu einer exakten Form des Beweises durch vollständige Induktion.

"Induktionsanfang"

$$F(1)$$

$$1$$

"Induktionsschluss"

"Es ist zu zeigen"

$$F(n + 1) = F(n) + \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

$$F(n) + \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

$$\frac{n^3 + 6 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 6}{6}$$

$$F(n + 1)$$

EXPAND(F(n + 1), Rational, n)

$$\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{11 \cdot n}{6} + 1$$

$$\mathrm{FACTOR}\left(\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{11 \cdot n}{6} + 1,\ \mathrm{Trivial},\ n\right)$$

$$\frac{n^3 + 6 \cdot n^2 + 11 \cdot n + 6}{6}$$

Einige Anmerkungen zum Unterricht

Ziele und Methoden

Das Problem kann in bestimmten Ausschnitten in verschiedenen Altersstufen ab Klasse 8 sinnvoll behandelt werden. Die hier dargestellte aufwendige und mehr projektartige Behandlung eignet sich besonders zu einer einführenden Unterrichtssequenz in Klasse 11. Viele mathematische Begriffe und Verfahren aus der Mittelstufe werden aufgegriffen und wiederholt, so z.B. Funktionen, Parabel, Gleichungssysteme, Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck. Neue Begriffe und Methoden werden zwanglos und situationsgebunden eingeführt, z.B. Zahlenfolge, Summen und zweckmäßige Schreibweisen für Summen, Polynom, Binomialkoeffizienten, Rekursion und Iteration. Entscheidend ist, daß mit diesem Themenkomplex Methoden und Denkstrategien angesprochen werden, die einmal grundsätzlich für mathematisches Arbeiten sind und zum anderen viel Raum für eigenständige Schüleraktivitäten und kreative Ideen bieten. Durch die Anbindung und den ständigen Rückgriff auf ein konkretes Problem und die damit verbundene Anschauung ist ein vielfältiges Verständnis und eine entsprechende Binnendifferenzierung möglich. Vor allem kann jeder Schüler in bestimmten Entwicklungsstufen des Problems zu eigenen Erfolgen kommen. Eine zunehmende Abstrahierung bis hin zum Beweis durch vollständige Induktion ist möglich, muß aber nicht von allen in gleichem Maße mitvollzogen werden. Deshalb eignet sich der Themenkomplex auch in besonderem Maße für den Einsatz von Gruppen- und Teamarbeit, sei es bei themengleichen Problemlösungsversuchen oder beim differenzierten Ausformen verschiedener Lösungswege. Für den Lehrer empfiehlt sich bei diesem offenen und komplexen Problem eine größere Zurückhaltung und Geduld, als dies bei stärker sytematisch strukturierten Themenkomplexen der Fall ist. Er wird dafür durch die Vielzahl der unerwarteten und kreativen Lösungsvorschläge und Ideen der Schüler belohnt. Die Unterrichtssequenz kann auch zu einer Einführung in das Arbeiten mit DERIVE genutzt werden, hier wird der Lehrer gegenüber den Problemlösungsphasen dann größere Vorgaben und Einweisungen beisteuern. Der Vorteil gegenüber einer mehr systematischen Einführung von DERIVE besteht hier darin, daß die Werkzeuge von DERIVE hier wirklich zur Lösung der anstehenden Probleme benötigt werden.

Einige zusätzliche Anregungen

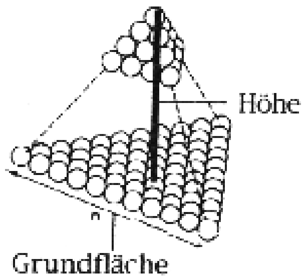
Wie bei allen offenen Problemen empfiehlt sich ein möglichst konkreter und einfacher Einstieg. Eine sehr praktische und motivierende Problemdarstellung kann in der einfachen Frage bestehen, ob man die Bälle einer 50-stufigen Pyramide in einem normalen PKW-Kombi transportieren kann? Entgegen den Erwartungen nach dem beobachteten raschen Anwachsen der Bälleanzahl bei dem Aufbau der ersten vier Stufen ist dies tatsächlich möglich.

> Wir haben für den Laderaum des PKW-Kombi die Maße 3.5m*2m*1.2m = 8.4 m^3 angenommen und für das Volumen eines Tennisballs mit dem Durchmesser von 6.5 cm das Volumen eines umbeschriebenen Würfels (= 275 cm^3). Für die 22100 Bälle benötigt man mit dieser großzügigen Berechnung etwa 6.1 m^3.

Umgekehrt kommt man über Volumenüberlegungen auch zu einer Strategie zum Abschätzen der Anzahl der Bälle in der Tennisballpyramide, hier kann man mit unterschiedlich feinen Modellen arbeiten.

In einem groben Modell nimmt man für die Grundseite und die Höhe des Basisdreiecks jeweils 50*6.5 cm an, ebenfalls für die Höhe der Pyramide. Das so errechnete Volumen der Pyramide dividiert man durch das Volumen eines Tennisballs. Der so erhaltene Schätzwert für die Anzahl in einer 50-stufigen Pyramide beträgt ungefähr 39800.

Er ist natürlich zu groß, vermittelt aber einen ersten Eindruck der Größenordnung. Bessere Schätzwerte erhält man durch die Berücksichtigung der Kugelpackung in der Pyramide, die notwendigen Maße erhält man durch Ausmessen etwa bei der vierstufigen Pyramide.

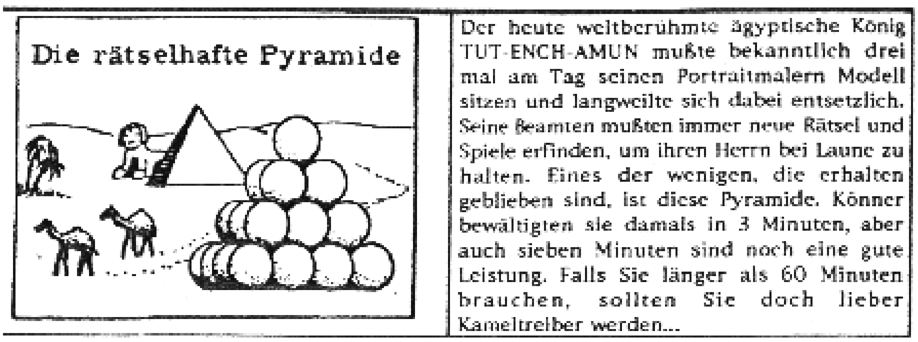


Ein Schüler hat mit Hilfe der Volumenformel für die Pyramide sogar die exakte Formel für die Anzahl der Tennisbälle in der n-stufigen Pyramide „entdeckt“.

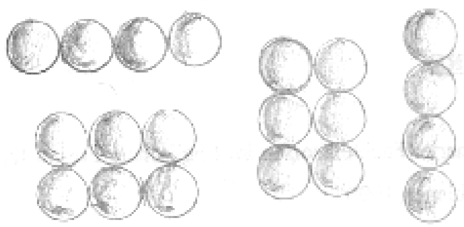
Er nahm als „Grundfläche“ der Pyramide einfach $\frac{n(n+1)}{2}$, für die „Höhe“ der Pyramide fand er durch Probieren mit den ersten Tabellenwerten den Term (n+2) und damit die Formel $V = f(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n+2)$, was der oben auf anderen Wegen hergeleiteten und bewiesenen Formel exakt entspricht.

Dies ist ein Beispiel für eine der vielen möglichen Varianten für eigenständige Entdeckungen, wie sie für offene Problemstellungen typisch sind.

Ein weiterer interessanter Zugang ist über ein Puzzle gegeben, das überall im Handel (insbesondere auf Weihnachtsmärkten) angeboten wird.



Dabei muß die Pyramide aus den nebenstehenden vier Teilen zusammengesetzt werden. die Kugeln sind bei den einzelnen Teilen fest miteinander verbunden. Interessanterweise liefert unsere oben entwickelte Strategie B zum Zählen der Bälle auch die Lösungsidee für dieses Puzzle. Man kann daraus auch ableiten, wie ein entsprechendes Puzzle für die fünf- oder sechsstufige Pyramide aussehen müßte.



Zum Abschluß wollen wir noch eine weitere Lösungsstrategie erwähnen, die wir oben nicht explizit erwähnt haben. Es handelt sich um die tragfähige Methode der Differenzenfolgen, die in der fachdidaktischen Literatur häufig angesprochen wird (siehe z.B.). Implizit ist diese Strategie bereits in unserer Strategie C festgelegt.

Wir bilden aus der Folge P(n) unserer Pyramidenzahlen die Differenzenfolge D1(n) = P(n+1) - P(n), daraus wieder die Differenzenfolge D2(n) = D1(n+1) - D1(n), daraus wieder die Differenzenfolge D3(n) = D2(n+1) - D2(n), die sich in diesem Fall als eine konstante Zahlenfolge herausstellt.

P	1		4		10		20		35		56
D1		3		6		10		15		21	
D2			3		4		5		6		
D3				1		1		1			

Wenn wir das gleiche Verfahren auf die Folge T(n) (Summe der ersten n natürlichen Zahlen) anwenden, so erreichen wir bereits in der 2.Differenzenfolge eine konstante Zahlenfolge.

Aus unseren obigen Herleitungen wissen wir bereits, daß der explizite Term für P(n) ein Polynom 3.Grades, der für T(n) ein Polynom zweiten Grades ist.

Mit Hilfe von DERIVE weisen wir nach, daß die 3. Differenzenfolge für ein Polynom 3.Grades immer eine konstante Folge ist.

```
#59: "Differenzenfolgen fηr Polynom 3.Grades"

                  3      2
#60: P(n) := a·n  + b·n  + c·n + d

#61: D1(n) := P(n + 1) - P(n)

             2
#62: a·(3·n  + 3·n + 1) + b·(2·n + 1) + c

                    2
#64: EXPAND(a·(3·n  + 3·n + 1) + b·(2·n + 1) + c, Rational, n)

            2
#65: 3·a·n  + n·(3·a + 2·b) + a + b + c

#66: D2(n) := D1(n + 1) - D1(n)

#67: EXPAND(D2(n) := D1(n + 1) - D1(n), Rational, n)

#68: 6·a·n + 6·a + 2·b

#69: D3(n) := D2(n + 1) - D2(n)

#70: 6·a
```

Im speziellen Fall sind die Werte der Differenzenfolgen errechnet. Damit kann man nun rückwärts die Koeffizienten des Polynoms bestimmen. Im Falle der Tennisballpyramide erhalten wir aus #70: 6a=1, also $a=\frac{1}{6}$, aus #68 mit n=1: 1+1+2b=3, also $b=\frac{1}{2}$ und aus #62 mit n=1: $\frac{7}{6}+\frac{3}{2}+c=3$, also $c=\frac{1}{3}$. Durch Einsetzen in P(1) erhalten wir schließlich noch d=0. Damit haben wir einen weiteren Weg zur Ermittlung der Formel für die Tennisballpyramide gefunden.

Übungen, Aufgaben und Leistungsfeststellung

Die ausführliche Behandlung des Problems der Tennisballpyramide in der hier skizzierten Form erfordert einen entsprechenden Zeitansatz. Im praktischen Unterricht stellt sich daher zu Recht die Frage nach den notwendigen Übungen, nach sinnvollen Aufgaben und Formen der Leistungsfeststellung, insbesondere auf der Grundlage des Einsatzes von DERIVE.

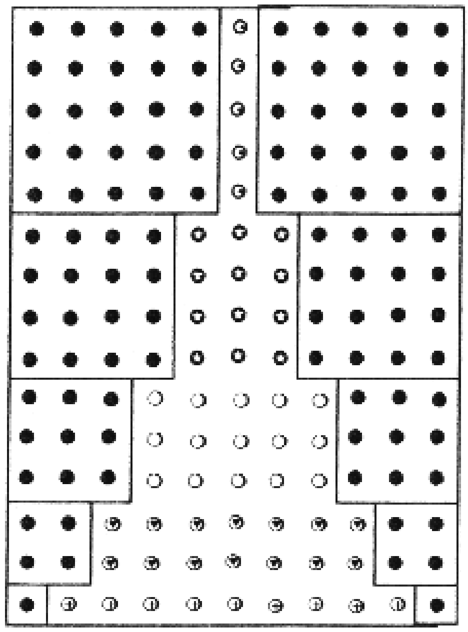
Zunächst zum Üben. Die mit der Unterrichtssequenz wesentlich angestrebten Fähigkeiten des eigenständigen Problemlösens und des Argumentierens und Begründens werden durch die Problemsequenz selbst intensiv geübt, vor allem bei der Realisierung der vorgeschlagenen Schüleraktivitäten und der Partner- und Gruppenarbeit. Beim Vorstellen und Weiterentwikkeln der zahlreichen Schülerideen können zudem die Fähigkeiten des Zuhörens und Kommunizierens trainiert werden.Selbstverständlich bedarf es auch der zusätzlichen individuellen Übungen, insbesondere bezgl. der mathematischen Begriffe und Verfahren. Hierfür stehen in allen Teilen hinreichend interessante Aufgaben zur Verfügung.

Alle angewandten Stategien - einschließlich des eigenständigen Entdeckens - können auf andere Zahlenfolgen von geeigneten Summen übertragen werden. Ein reiches Aufgabenpotential bieten die Potenzsummen, bei Ihnen greifen fast alle der bei der Tennisballpyramide angewandten Strategien, der Transfer ist nicht zu anspruchsvoll. Für die Summe der Quadratzahlen kann auch eine Präsentation als Tennisballpyramide mit quadratischer Grundfläche gewählt werden.

Ebenso läßt sich die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

aus einem von den Babyloniern überlieferten Zahlenmuster herleiten. Das interessante Muster muß natürlich vorgegeben werden (nebenstehendes Beispiel für n=5), die Denkarbeit ist dann noch hinreichend anspruchsvoll.



Zur Erleichterung derselben ein kleiner Tip:

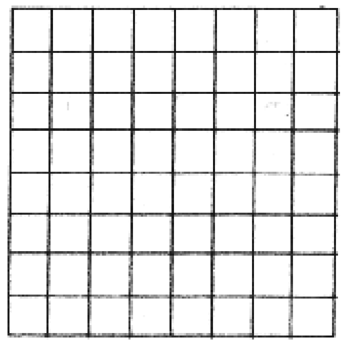
$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

Ganz „normale“ Aufgaben kann man konstruieren zum Training von Summenschreibweisen, zum Verstehen des Pascalschen Dreiecks, zum Aufstellen und Umsetzen von Rekursionsformeln, auch zur Reproduktion der im Unterricht behandelten Inhalte und Strategien.

Aufgaben zum Zwecke der Förderung der Kreativität und der Problemlösefähigkeiten für diesbezüglich besonders interessierte Schüler verlangen einen höheren Transfer. Auch hieran sollte im Sinne der Differenzierung gedacht werden. Wir wollen drei hierfür geeignete Aufgabenbeispiele „Schachbrettprobleme“ anführen, selbstverständlich ohne Lösung.

Quadrate im Quadrat

Gegeben ist ein Schachbrett mit 8 x 8 quadratischen Feldern. Wieviel Quadrate verschiedener Größe findet man in einem solchen Schachbrett.
Versuche die Aufgabe zu lösen, indem du schrittweise vorgehst, d.h. vom Schachbrett mit 1x1 zu 2x2 Quadraten usw.
Gibt es eine Rekursionsformel?
Läßt sich eine allgemeine Formel für die Anzahl der Quadrate im n x n Schachbrett finden?

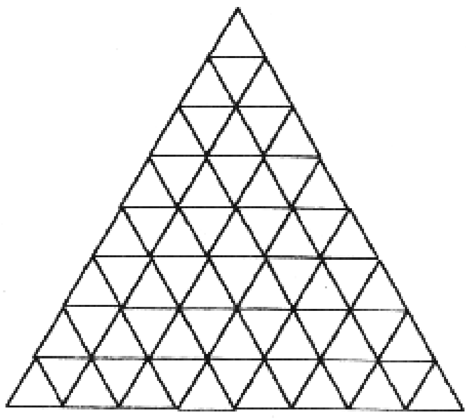


Gleichseitige Dreiecke im Dreieck

Gegeben ist ein 8x8x8 „Schachbrett“ mit gleichseitigen Dreiecken.

Wieviele gleichseitige Dreiecke gibt es in diesem Dreieck?

Entwickle schrittweise vom 1x1x1-Dreieck zum n x n x n-Dreieck. Betrachte ggf. die Entwicklung für ungerade und gerade n getrennt.



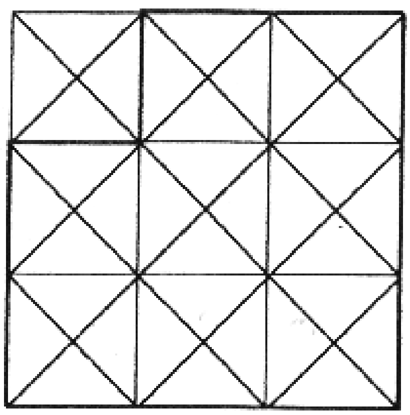
Quadrate im Diagonalschachbrett

Gegeben ist ein 3x3-Diagonalschachbrett.

Wieviele Quadrate verschiedener Größe findet man in diesem Schachbrett?

Wieviele Quadrate verschiedener Größe findet man in einem 8x8-Schachbrett?

Läßt sich das Ergebnis für ein 8x8-Diagonalschachbrett verallgemeinern?



Leistungsfeststellung

Wenn der Unterricht in der angedeuteten offenen und schüleraktiven Weise gestaltet werden konnte, so können in diesem Rahmen unterschiedliche Leistungen von Schülerinnen und Schülern recht gültig erfaßt werden. Unterschiedlich bedeutet dabei nicht in erster Linie eine hierarchische Unterscheidung von der Qualität, sondern durchaus auch Unterschiede in der Art der erbrachten Leistungen. Manche liefern die entscheidenden Ideen, andere bringen solide Kenntnisse und sichere Verfahrensausführungen ein, andere argumentieren besonders klar oder liefern gute Beiträge zu den Veranschaulichungen. Dann gibt es die besonders sicheren Anwender von DERIVE oder die mehr an abstrakten und theoretischen Erörterungen Beteiligten. Schließlich lassen sich auch die besonderen Fähigkeiten im Rahmen der Teamarbeit erfassen.

Neben diesen mehr prozessualen und unterrichtsbegleitenden Leistungsfeststellungen gibt es auch stärker zusammenfassende und normierte Möglichkeiten. Die oben beschriebenen Aufgaben gehören dazu, sie können in geschickt gestuftem Anforderungsniveau so eingesetzt werden, daß sich ein differenziertes Leistungsbild erstellen läßt, wobei natürlich die Aufgaben mit hohem Transfer und Problemlöseanteil weniger für schriftliche Leistungsüberprüfungen geeignet sind. Viele dieser Aufgaben sind allerdings nur dann sinnvoll, wenn zur Bearbeitung auch die Werkzeuge von DERIVE (oder adäquate) genutzt werden können.

Die meisten Aufgaben eignen sich auch gut für die Vergabe von Referaten (einschließlich der Dokumentation der Ergebnisse mit DERIVE), wobei auch hier die Bearbeitung und Darstellung im Team der Einzelarbeit vorzuziehen ist.

Eine bewährte - wenn auch leider nur wenig eingesetzte - Form zur Leistungsfeststellung besteht in der zusammenfassenden Ausarbeitung (Bericht/Protokoll/ mathematischer Aufsatz) zum Thema „Tennisballpyramide“ zum Abschluß oder einem geeigneten Zwischenstadium der Lernsequenz. Wenn solche Aufsätze öfters gefordert und besprochen werden, können sie auch (in geeigneter Beschränkung) in Kursarbeiten zur Beurteilung herangezogen werden. Bei geringem Erfahrungsstand wird man den Schülern zu dem Thema noch einige Stichwörter angeben, die in dem Aufsatz angesprochen werden sollen, später gehört auch dies zu den wichtigen eigenständigen Leistungen. Auch hier bietet die von einer kleinen Gruppe gemeinsam erstellte Ausarbeitung gute Chancen zur Entwicklung und zur Bewertung von Teamarbeit.

Literatur

Viele Anregungen stammen aus der mathematischen **Knobel- und Unterhaltungsliteratur** und den anregenden und anspruchsvollen **mathematischen Schülerzeitschriften**. Sie können hier nicht einzeln aufgeführt werden.

Eine wahre Fundgrube für inhaltliche Ideen, für methodische Anregungen zur Heuristik und ein unerschöpfliches Reservoir für Aufgaben bietet

Georg Polya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben - Einsicht und Entdeckung Lernen und Lehren, Band 1, Birkhäser Verlag Basel und Stuttgart 1966

Für unser Thema besonders ertragreich ist Kapitel 3 „Das Rekursionsverfahren“ (Seite 100 - 150).

Fundgruben für kleine Unterrichtsprojekte und Ergänzungen zum Thema sind die folgenden-Bände

Frederick W. Stevenson, Exploratory Problems in Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics 1992

Walter Kranzer, So interessant ist Mathematik, Aulis Verlag, Köln 1989

Alfred S. Posamentier, Arbeitsmaterialien Mathematik - 119 Unterrichtseinheiten, Klett Verlag Stuttgart 1994

R.Stowasser und B.Mohry, Rekursive Verfahren, Schroedel Verlag Hannover 1978

Eine frühere Ausarbeitung zur Tennisballpyramide mit einigen anderen Aspekten findet man mit dem Aufsatz „Heuristische Strategien im Mathematikunterricht“ von G.Schmidt (Seite 84-94) in

Martin Glatfeld (Hrsg.), Finden, Erfinden, Lernen - Zum Umgang mit Mathematik unter heuristischem Aspekt, Europäische Hochschulschriften Reihe XI Pädagogik Bd.442, Peter Lang Verlag Frankfurt/Main 1990

Auch in den gängigen **fachdidaktischen Zeitschriften** gibt es zahlreiche Artikel über den heuristischen Umgang mit Zahlenfolgen und Summen, insbesondere zu den Potenzsummen. Hier kann man viel Hintergrundwissen und auch zusätzliche Unterrichtsideen erwerben.