Wo haben Kurven ihre größte Krümmung?

Ergänzung des Analysis-Unterrichts um eine alltagsrelevante Fragestellung. Herleitung eines Krümmungsmaßes.

Arbeitsblatt 1 — Januar 2004/ge

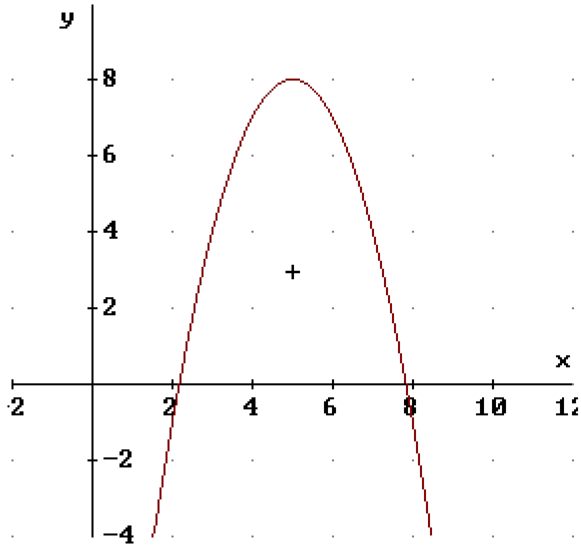
Gegeben sind die folgenden Funktionen mit Ausschnitten der Graphen

$f_1 : x \to -(x-5)^2 + 8$

$f_2 : x \to (x-3)(x-5)(x-8)/2 + 4$

$f_3 : x \to (x-3)(x-5)(x-8)(x-1)/15 + 4$

$f_4 : x \to \frac{1}{3}x + 2 - \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$



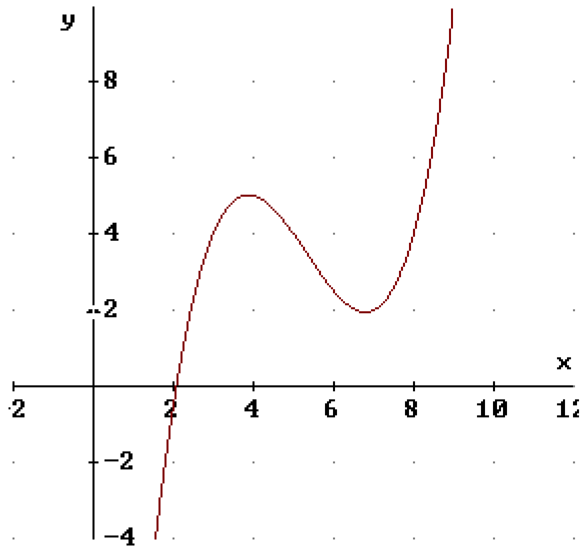
Gesucht sind die Stellen, an denen die Graphen am stärksten gekrümmt sind, relativ und absolut.

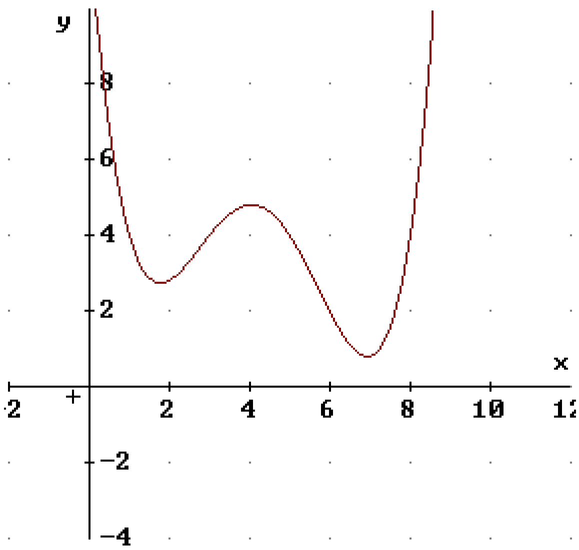
Welche Stellen bieten sich an?

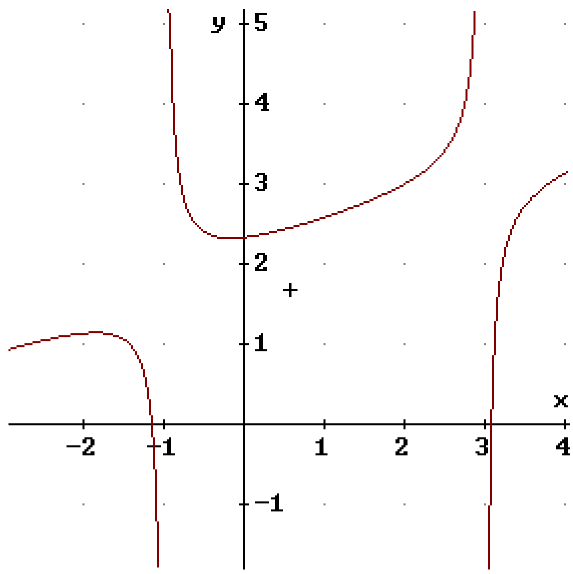
Nehmen Sie die Graphen daraufhin in Augenschein und überprüfen Sie Ihre Vermutungen.

Überlegen Sie sich Strategien zur exakten Bestimmung.

Was könnte man als Maß nehmen?







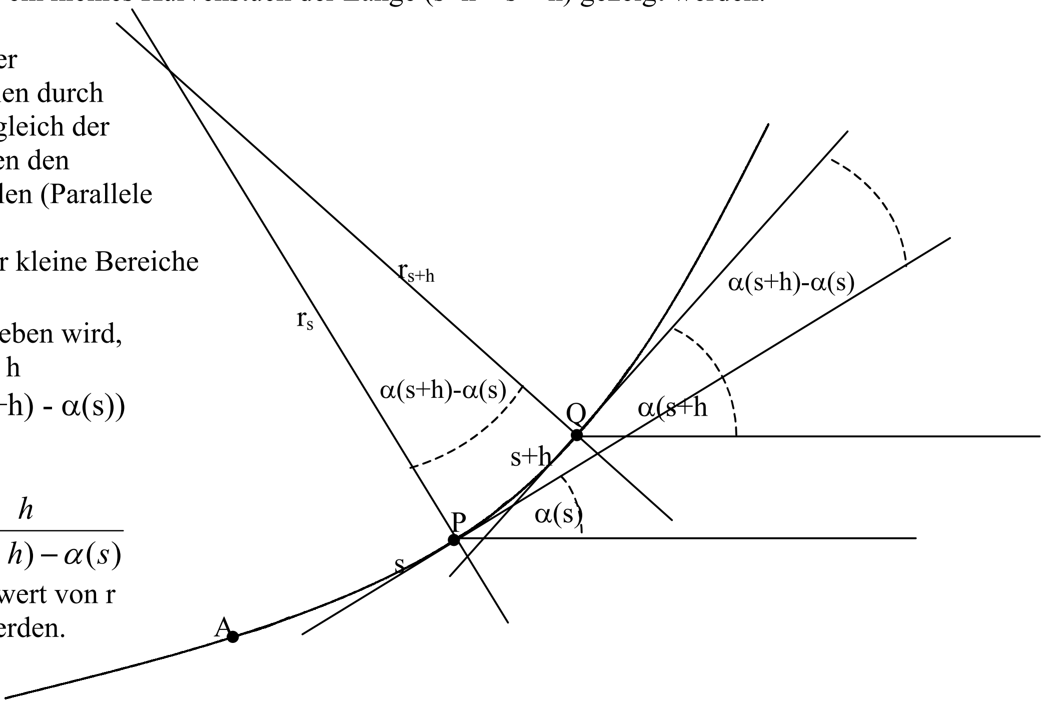
Wo haben Kurven ihre größte Krümmung?

Ergänzung des Analysis-Unterrichts um eine alltagsrelevante Fragestellung. Herleitung eines Krümmungsmaßes.

Arbeitsblatt 3 Januar 2004/ge

Krümmungsradius/Krümmungsmaß / **Herleitung über Kreisradius**

Als Anhalt für die Krümmung einer Kurve kann näherungsweise der Radius eines Kreises genommen werden, der die Kurve in einem kleinen Bereich ausreichend gut annähert.
In der Zeichnung soll dies für ein kleines Kurvenstück der Länge (s+h – s = h) gezeigt werden.



Einfache geometrische Betrachtungen zeigen, dass der Winkel zwischen den Normalen durch die Enden des Kurvenstücks gleich der Differenz der Winkel zwischen den Tangenten und der Horizontalen (Parallele zur x-Achse) ist.
Damit gilt näherungsweise für kleine Bereiche
$r_{s+h} \approx r_s \approx r$.
Wenn α im Bogenmaß angegeben wird, gilt für die Länge des Bogens h

$$h \approx r \cdot (\alpha(s+h) - \alpha(s))$$

daraus folgt für den Radius r

$$r \approx \frac{h}{\alpha(s+h)-\alpha(s)}$$

Wir betrachten nun den Kehrwert von r und lassen h beliebig klein werden.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(s+h)-\alpha(s)}{h} = \alpha'(s) = \frac{d(\alpha)}{d(s)} = \frac{d(\alpha)}{d(x)}\cdot\frac{d(x)}{d(s)} = \frac{d(\alpha)}{d(x)}\cdot\frac{1}{\frac{d(s)}{d(x)}}$$

mit α(x)= arctan(f'(x)) und $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+\left(f'(t)\right)^2}\,dt$ folgt mit den Ableitungsregeln

$$\alpha'(s) = \frac{1}{1+\left(f'(x)\right)^2}\cdot f''(x)\cdot\frac{1}{\sqrt[2]{1+\left(f'(x)\right)^2}} = \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{1,5}}$$

Damit wäre der Kurvenradius r an einer Stelle x

$$r(x) = \frac{1}{\frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{1,5}}} = \frac{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{1,5}}{f''(x)}$$

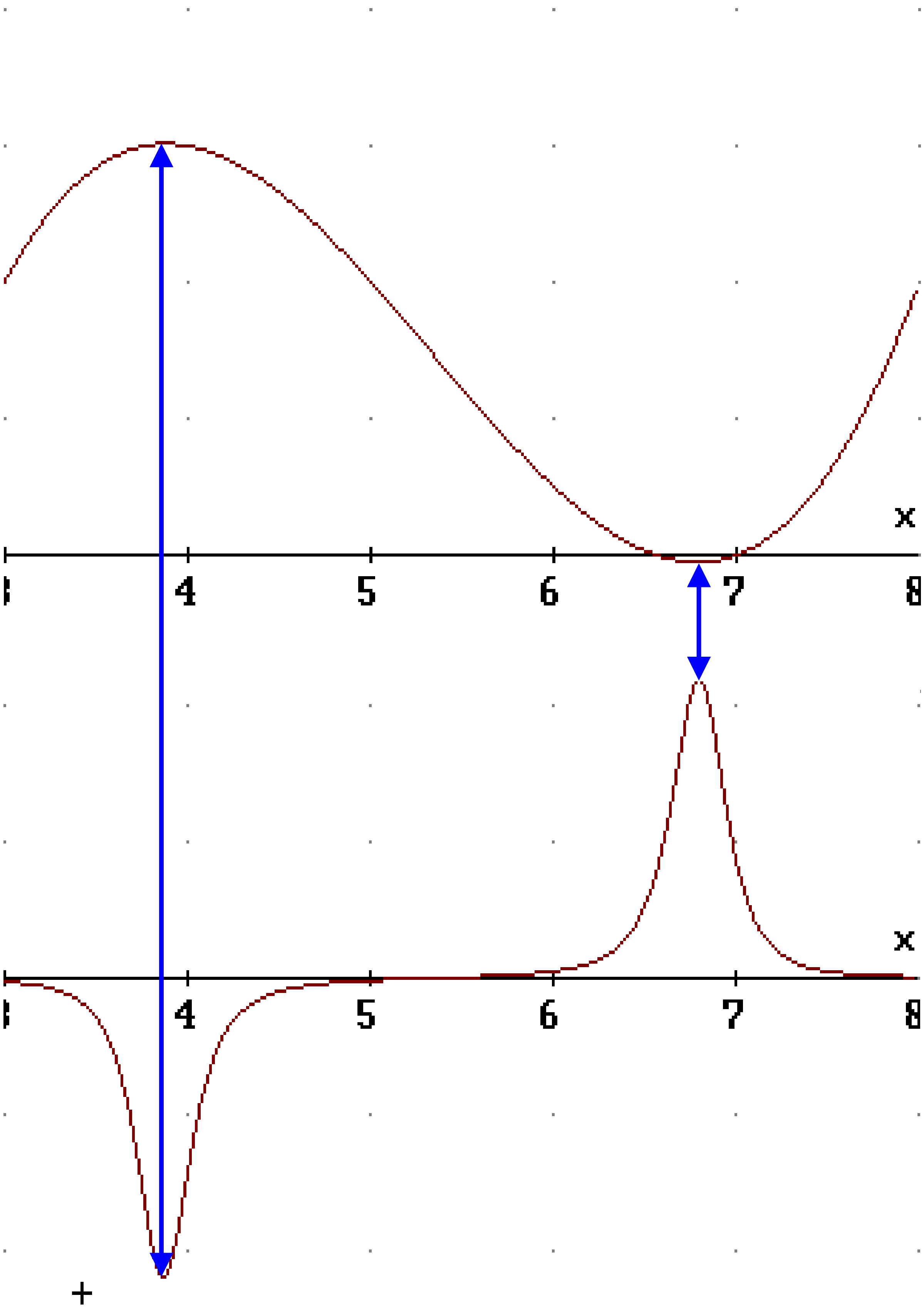
Als eigentliches Krümmungsmaß k bietet sich aber sinnvoller 1/r an.

$$\text{Also } k(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{1,5}} .$$

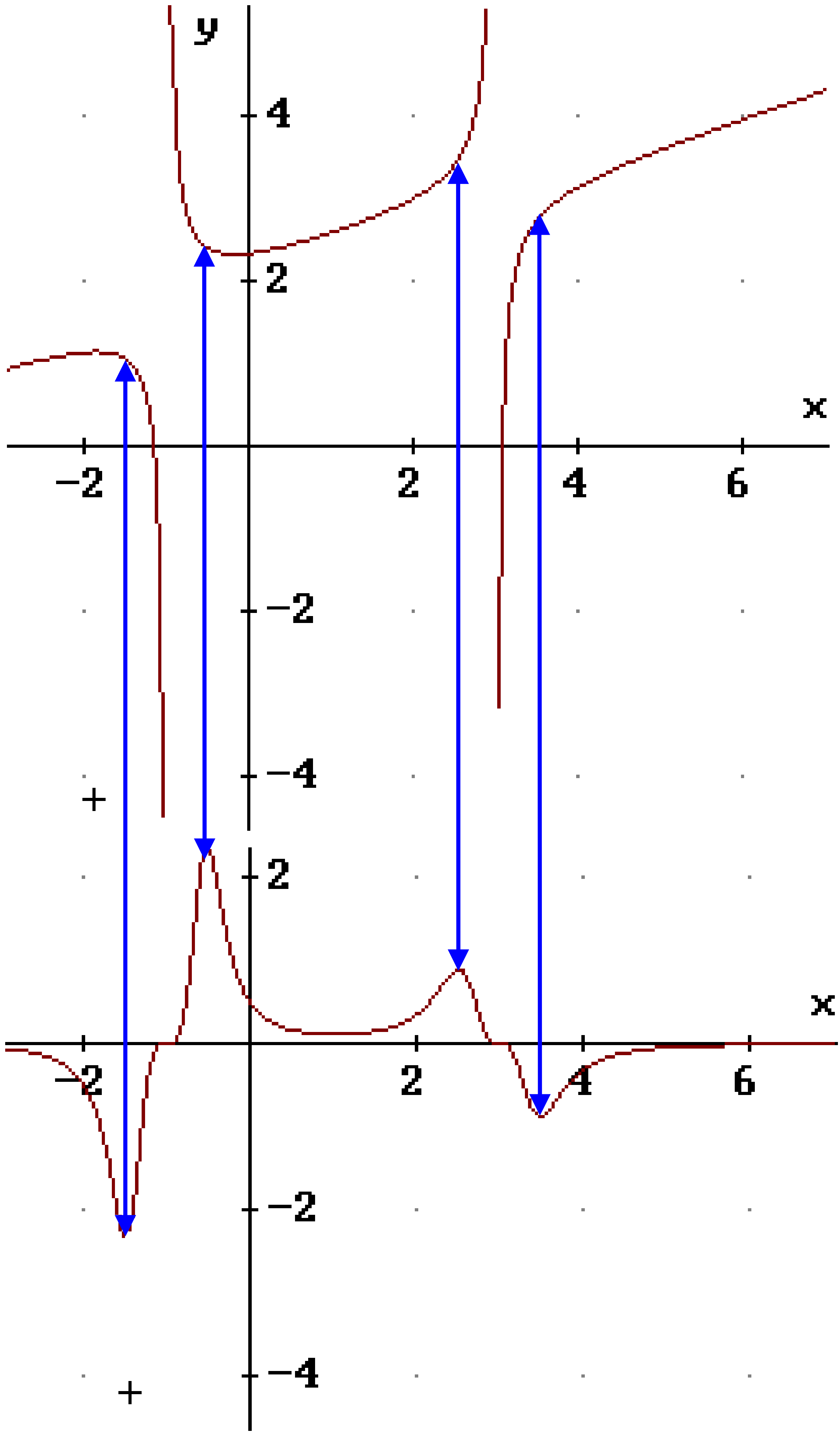
Vergleiche mit Gerade und Kreis liefern für die Gerade **r(x) = ∞,** was sinnvoll ist, und für den Kreis mit dem Radius r eben **r(x) = r** ; bzw. als Maß für die Krümmung **bei Geraden k(x)=0 und bei Kreisen k(x) = 1/r.**

Letzteres zeigt, dass das Krümmungsmaß größer wird, wenn der Krümmungsradius kleiner wird, die Kurve also stärker gekrümmt ist. Dies passt gut zu unserem Empfinden beim Durchfahren von Kurven!

Herr Neveling geht bei seiner Herleitung gleich von der Winkeländerung aus. (Siehe Anlage 1)



x
4
5
6
7
8
x
4
5
6
7
8



y
4
2
x
−2
2
4
6
−2
−4
2
x
−2
2
4
6
−2
−4

#1: $f1(x) := -(x-5)^2 + 8$

#2: $f2(x) := \frac{(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-8)}{2} + 4$

#3: $f3(x) := \frac{(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-8)\cdot(x-1)}{15} + 4$

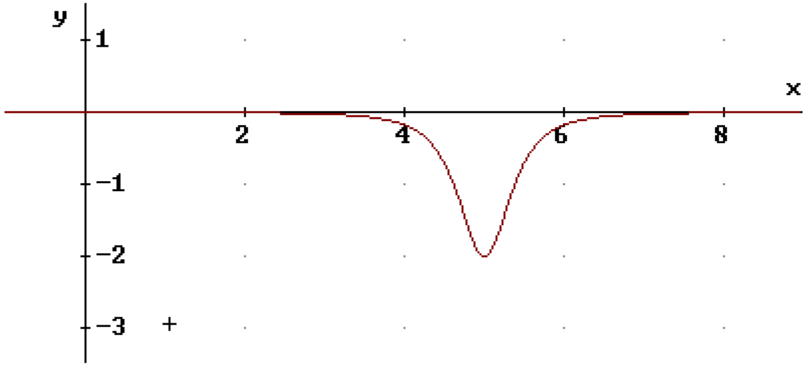
#4: $f4(x) := \frac{1}{3}\cdot x + 2 - \frac{1}{x^2 - 2\cdot x - 3}$

#5: $K(x) := \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{1.5}}$

Nun hole ich mit F3 die markierte Krümmungsformel K ins Algebrafenster und ergänze jeweils nach K und f mit 1.

#6: $-\frac{2}{(4\cdot x^2 - 40\cdot x + 101)^{3/2}}$

#7: $K1(x) := \frac{f1''(x)}{(1 + f1'(x)^2)^{1.5}}$



Jetzt könnten k2(x) für f2 usw. definiert werden.