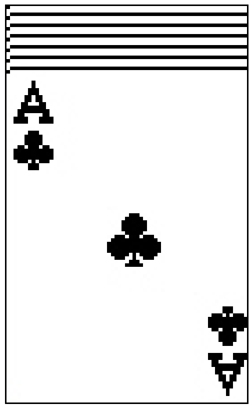
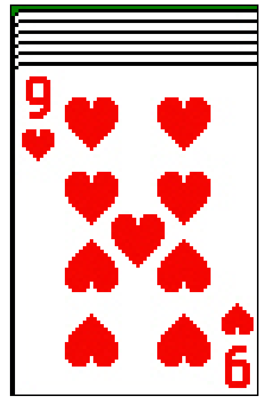
Das Rencontre-Problem

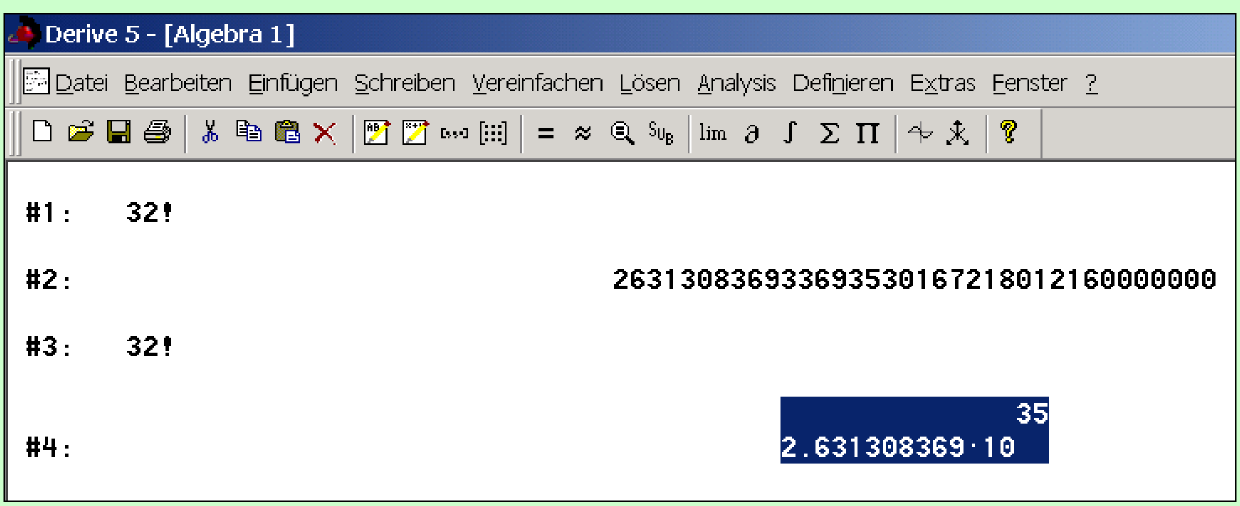




Anton und Brigitte vereinbaren das folgende Spiel:
Von zwei fabrikneuen identischen Sätzen Spielkarten zu je 32 Karten wird einer gründlich durchgemischt.
Beide Stapel werden verdeckt (d.h. mit dem Rücken nach oben) nebeneinander gelegt. Anschließend wird immer die jeweils oberste Karte des einen Stapels zusammen mit derjenigen des anderen Stapels aufgedeckt (d.h. mit dem Gesicht nach oben gedreht).

Brigitte wettet dass mindestens einmal zwei identische Karten erscheinen werden. Anton dagegen meint, dies sei doch ganz unwahrscheinlich und wettet dementsprechend dagegen. Wem gestehen Sie die besseren Chancen zu?

Bemerkung:
Die Anzahl der möglichen Reihenfolgen in die das Kartenspiel gebracht werden kann ist 32!



Simulationsprogramm zum Rencontreproblem

Weist man den Karten des ersten Stapels die Zahlen 1,...,32 zu, so stellen die Karten des 2. Stapels eine Permutation dieser Zahlen dar.

Die Frage nach einem Rencontre ist deshalb gleichbedeutend mit der Frage:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallspermutation der Zahlen 1 bis 32 mindestens einen Fixpunkt enthält.

Diese Permutation besitzt keinen Fixpunkt:

```
[25, 1, 6, 3, 10, 32, 26, 9, 23, 16, 22, 20, 28, 12, 21, 13, 7, 14, 18, 17, 4, 27, 31, 19,
  15, 30, 11, 2, 5, 29, 24, 8]
```

Diese Permutation besitzt genau 2 Fixpunkte, 5 und 9.

```
[21, 3, 25, 6, 5, 30, 26, 14, 9, 12, 2, 8, 18, 4, 24, 20, 1, 17, 32, 16, 10, 31, 13, 22,
  23, 29, 28, 27, 15, 7, 19, 11]
```

Erzeugen von Zufallspermutationen

```
procedure erzeuge_zufallspermutation(var p : permutation);
//A. Engel, Mathematisches Experimentieren mit dem PC, Klett 1991, S. 172
var i,r,hilf : integer;
begin
  for i:=1 to 32 do p[i]:=i;
  for i:=32 downto 2 do
   begin
     r:=1+random(i);
     hilf:=p[i]; p[i]:=p[r]; p[r]:=hilf;
   end;
end;
```

Derive Version dieses Algorithmus

Derive 5 - [Algebra 1 perm.dfw]

Datei Bearbeiten Einfügen Schreiben Vereinfachen Lösen Analysis Definieren Extras Fenster ?

```
       zperm_hilf(n, p, i, r, hilf) :=
         Prog
           p := VECTOR(k, k, 1, n)
           i := n
           Loop
             If i = 1
#1:             RETURN p
             r := 1 + RANDOM(i)
             hilf := p↓i
             p↓i := p↓r
             p↓r := hilf
             i := i - 1

#2:    zperm(n) := zperm_hilf(n, p, i, r, hilf)

#3:    Erzeugen einer Zufallspermutation der ersten 10 Zahlen:

#4:    zperm(10)

#5:                                 [4, 7, 3, 10, 1, 5, 9, 8, 6, 2]
```

Simulation des Rencontre-Problems in Derive:

```
      fixpunkte_hilf(perm, anz, i) :=
        Prog
          anz := 0
          i := 0
          Loop
#6:         If i = DIM(perm)
               RETURN anz
            i :+ 1
            If perm↓i = i
               anz :+ 1

#7:   fixpunkte(perm) := fixpunkte_hilf(perm, anz, i)

#8:   Anzahl der Fixpunkte einer Permutation:

#9:   fixpunkte([4, 7, 3, 10, 1, 5, 9, 8, 6, 2])

#10:                                                2

#11:  VECTOR(fixpunkte(zperm(32)), i, 1, 5)

#12:                                  [1, 1, 0, 1, 3]

#13:  AVERAGE(VECTOR(fixpunkte(zperm(32)), i, 1, 100))

#14:                                               1.09
```

Mit a(n) wird die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen aus n Elementen bezeichnet. Es wird eine Rekursionformel für a(n) aufgestellt:

Beispiel: n=5

Wie erhält man aus der Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von 4 Elementen die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen aus 5 Elementen?

1. Wähle eine beliebige fixpunktfreie Permutation aus 4 Elementen, z.B.

2	3	4	1	

Eine solche Wahl ist auf a(4) Weisen möglich.
Wähle eines der 4 Elemente aus (4 Möglichkeiten) und setze dieses an die 5. Position:

2		4	1	3

Fülle die entstandene Lücke mit dem 5. Element auf:

2	5	4	1	3

Insgesamt kann auf diese Weise auf 4*a(4) Arten eine fixpunktfreie Permutation aus 5 Elementen gewonnen werden.

2. Wähle eine Permutation aus 4 Elementen mit **genau einem** Fixpunkt. Dafür gibt es 4 * a(3) Möglichkeiten, z.B.

2	4	3	1	

Schreibe das Element des Fixpunktes an die 5. Stelle:

2	4		1	3

Ersetze die Lücke durch das 5. Element:

2	4	5	1	3

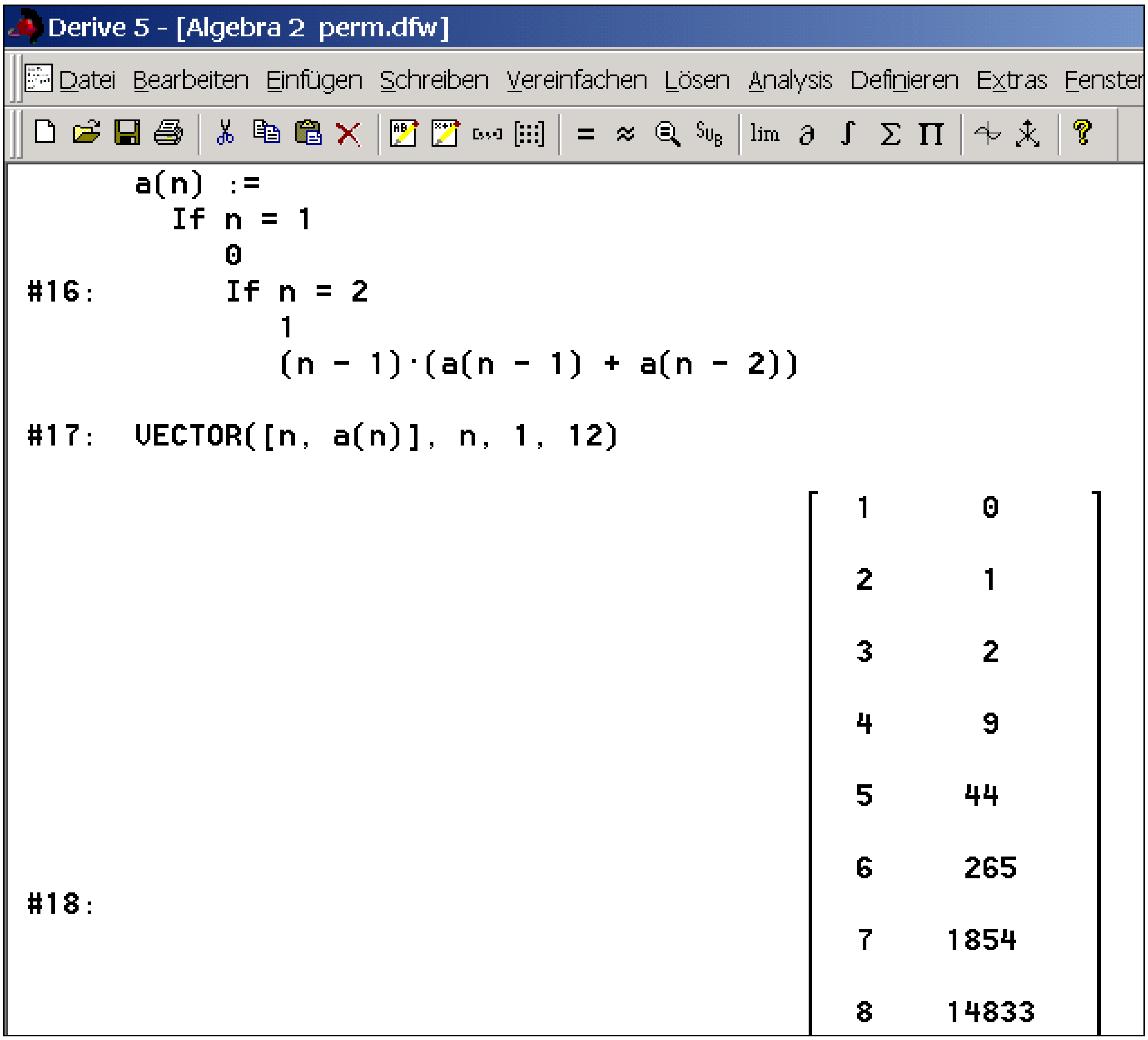
Auf 4 * a(3) Arten kann man auf diese Weise eine fixpunktfreie Permutation aus 5 Elementen erzeugen.

Damit ergibt sich: $a(5) = 4\,a(4) + 4\,a(3) = 4\,(\,a(4) + a(3)\,)$

bzw. $a(n) = (n-1)\,(\,a(n-1) + a(n-2)\,)$

Weil es keine fixpunktfreie Permutation aus einem Element gibt (a(1) = 0) und da es genau eine fixpunktfreie Permutation aus 2 Elementen gibt (a(2) = 1) ergibt sich als gesuchte Rekursionsformel:

a(1) = 0
a(2) = 1
a(n) = (n-1) (a(n-1) + a(n-2))



Derive Programm

Nach langer Rechenzeit kann mit dieser Formel die Wahrscheinlichkeit für eine Zufallspermutation mit mindestens einem Fixpunkt bestimmt werden:

#29: $a(32)$

#30: $96800425246141091510518408809597121$

#31: $$1 - \frac{96800425246141091510518408809597121}{32!}$$

#32: 0.6321205588

Eine explizite Formel für die Zahl der fixpunktfreien Permutationen

Betrachtet man zu jedem n die Zahl a(n), so fällt das starke Anwachsen der a(n)-Werte auf:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 9 \\ 5 & 44 \\ 6 & 265 \\ 7 & 1854 \\ 8 & 14833 \\ 9 & 133496 \\ 10 & 1334961 \\ 11 & 14684570 \\ 12 & 176214841 \end{bmatrix}$$

Ein solches rasches Wachstum ist von geometrischen Folgen bekannt, so dass es nahe liegt den Quotienten $\frac{a(n+1)}{a(n)}$ zu betrachten:

```
#33:  VECTOR(a(n + 1)/a(n), n, 2, 20)

#34:  [2, 4.5, 4.888888888, 6.022727272, 6.996226415, 8.000539374, 8.999932582, 10
      10.99999925, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]
```

Für große Werte von n unterscheiden sich die Quotienten $\frac{a(n+1)}{a(n)}$ kaum noch von den natürlichen Zahlen (n+1), so dass a(n+1) ≈ (n+1) a(n) gilt. Die linke und die rechte Seite dieser Ungefährbeziehung werden nebeneinander betrachtet:

```
#21:  VECTOR([a(n + 1), (n + 1)·a(n)], n, 2, 12)
```

#22:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 8 \\ 44 & 45 \\ 265 & 264 \\ 1854 & 1855 \\ 14833 & 14832 \\ 133496 & 133497 \\ 1334961 & 1334960 \\ 14684570 & 14684571 \\ 176214841 & 176214840 \\ 2290792932 & 2290792933 \end{bmatrix}$$

Man kann erkennen, dass sich die rechte von der linken Spalte abwechselnd um +1 oder um –1 unterscheidet:

```
#33:  VECTOR(a(n) - n·a(n - 1), n, 2, 10)

#34:                 [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
```

Rechnerischer Nachweis:

a(n) – n a(n-1) = (n-1) (a(n-1) + a(n-2)) – n a(n-1) = (n-1) a(n-2) – a(n-1)

= (-1) (a(n-1) – (n-1) a(n-2)) = ...$(-1)^{n-2}$ (a(2) – 2 a(1)) = .$(-1)^{n-2}$ = .$(-1)^{n}$.

Für die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen aus n Elementen gilt:

$a(1) = 0$
$a(n) = n\ a(n-1) + (-1)^n$

```
      b(n) :=
        If n = 1
#23:        0
            n·b(n - 1) + (-1)^n

#24:  VECTOR(b(n), n, 1, 12)

#25:            [0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833, 133496,
```

Aus der letzten Rekursionsformel kann eine explizite Form abgeleitet werden:

$a(1) =$	0	
$a(2) =$	$2\ a(1) + 1$	$\mid : 2!$
$a(3) =$	$3\ a(2) - 1$	$\mid : 3!$
$a(4) =$	$4\ a(3) + 1$	$\mid : 4!$
....		
$a(n) =$	$n\ a(n-1) + (-1)^n$	$\mid : n!$

$a(1) = 0$

$$\frac{a(2)}{2!} = \frac{a(1)}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$\frac{a(3)}{3!} = \frac{a(2)}{2!} - \frac{1}{3!}$$

$$\frac{a(4)}{4!} = \frac{a(3)}{3!} + \frac{1}{4!}$$

....

$$\frac{a(n)}{n!} = \frac{a(n-1)}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\frac{a(n)}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$a(n) = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$a(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$a(n) \approx n!\,e^{-1} = \frac{n!}{e}$$

$$\#26: \quad c(n) := n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

```
#27:  VECTOR([n, c(n)], n, 1, 12)
```

$$\#28: \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 9 \\ 5 & 44 \\ 6 & 265 \\ 7 & 1854 \\ 8 & 14833 \\ 9 & 133496 \end{bmatrix}$$

Als Wahrscheinlichkeit für eine fixpunktfreie Permutation ergibt sich damit:

$$\frac{a(n)}{n!} \approx e^{-1} \approx 0{,}3679$$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Fixpunkt ist dann: $1 - e^{-1} \approx 0{,}6321$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zahl der Fixpunkte

Die Zufallsgröße S_n gebe die Zahl der Fixpunkte in einer Zufallspermutation vom Umfang n an.

Gilt $S_n = s$, so gibt es s Fixpunkte und n-s Stellen die keine Fixpunkte sind.
Um die s Fixpunkte auszuwählen gibt es $\binom{n}{s}$ Möglichkeiten.
Die restlichen n-s Stellen müssen fixpunktfrei besetzt werden. Das geht auf
$(n-s)!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\ldots\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!})$ Arten.

Für das Ereignis $S_n = s$ gibt es also $\binom{n}{s}(n-s)!(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\ldots\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!})$
günstige Fälle.

Die Anzahl der möglichen Fälle ist n!.

Damit gilt:

$$P(S_n = s) = \frac{1}{s!}(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\ldots\frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!})$$

Als Näherungswert ergibt sich

$$P(S_n = s) \approx \frac{e^{-1}}{s!}.$$