BLK-PROGRAMM

SINUS - Transfer

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

SINUS-TRANSFER – 2. Welle

in Rheinland-Pfalz

Anregungen und Vorschläge für offenere Aufgabenstellungen II

Serie 2

Die folgenden Beispiele wollen dazu anregen, offenere Aufgaben im Unterricht zu erproben. Im Gegensatz zu den "Anregungsmaterialien" der 1. Welle handelt es sich hier um "kleinere" Aufgaben, zu deren Lösung weniger Unterrichts- bzw. Arbeitszeit benötigt wird. Es ist deshalb möglich, solche Aufgaben öfter und regelmäßig einzusetzen. Durch die Art der Aufgaben und durch die Regelmäßigkeit des Einsatzes soll erreicht werden, dass der Erwerb allgemeiner mathematischer Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern kontinuierlich fortschreitet. Dadurch wird auch ein Beitrag zum Erreichen der Bildungsstandards geleistet.

Die Materialien sind nicht als "fertige Aufgaben" gedacht, die man direkt im Unterricht einsetzen kann. Vielmehr sollen die Lehrkräfte in Kooperation die Anregungen diskutieren, modifizieren und geeignete Arbeitsaufträge für die jeweilige Lerngruppe zusammenstellen. Zur Unterstützung dieser Arbeit werden methodische Hinweise gegeben. Die folgenden Beispiele können/sollen auch zur Entwicklung eigener offener Aufgaben und Übungseinheiten in der Fachgruppe anregen.

Die Anregungen wurden von den Set- und Landeskoordinator(inn)en erarbeitet:

Armin Baeger, Münstermaifeld
Ursula Bicker, Bad Kreuznach
Ralf Früholz, Traben-Trarbach
Volkhardt Fuhrmann, Worms
Sandra Gerhard, Mainz
Franz-Josef Göbel, Kobern-Gondorf
Ortrud Hohn, Idar-Oberstein
Michael Lamberty, Nieder-Olm
Barbara Mathea, Mainz
Paul Müller, Frankenthal
Ralf Nagel, Kobern-Gondorf
Hellen Ossmann, Ingelheim
Helga Schmidt, Kobern-Gondorf
Georg Schmitt, Trier
Claudia Steiert, Stromberg
Peter Staudt, Nieder-Olm
Ferdinand Weber, Mainz

Bearbeitung und Redaktion:

Sandra Gerhard
Barbara Mathea
Ferdinand Weber

Mainz, Oktober 2005

Inhaltsübersicht

Hinweise zu den Materialien

Was soll mit den Materialien erreicht werden?

Ein Ziel der SINUS-Dissemination in Rheinland-Pfalz ist es, den herkömmlichen Mathematikunterricht mit neuen Elementen anzureichern. Neben regelmäßigen Übungen zum Sichern von Grundwissen sollen schrittweise offenere Aufgaben und Übungsformen, die unterschiedliche Lösungswege ermöglichen, anwendungsorientierte Problemstellungen und ferner Maßnahmen, die die Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler fördern, in den Unterricht einbezogen werden. Die vorliegenden Materialien bieten dazu Anregungen.

Worin unterscheiden sich die Materialien von den Anregungsmaterialien der 1. Welle?

Die **Anregungsmaterialien der 1. Welle** (siehe Broschüre "SINUS-TRANSFER – Die Umsetzung des BLK-Programms in Rheinland-Pfalz", MBFJ Rheinland-Pfalz, 2004) enthalten zu bestimmten Themen (vor allem Inhalte des 7. Schuljahrs) ganz unterschiedliche Aufgaben- und Übungseinheiten, von denen jede vielseitige Impulse setzt, sich mit dem jeweiligen Anwendungsbereich auseinanderzusetzen. Die Vielfalt des Angebots innerhalb einer Einheit macht es erforderlich, dass die Lehrkräfte (möglichst im Team) die Vorlage bearbeiten und für den Einsatz in der/den eigenen Klasse(n) aufbereiten. Das heißt u. a., dass sie die Aufgabenstellung dem Anspruchsniveau der Klasse(n) anpassen, mögliche Lösungswege der Schülerinnen und Schüler simulieren, Hilfestellungen überlegen und vorbereiten, Möglichkeiten der Differenzierung reflektieren.

Die Zeit für die Bearbeitung einer solchen Aufgabe durch die Schülerinnen und Schüler beträgt mindestens eine Unterrichtsstunde. Deshalb können solche Aufgaben in einem normalen Klassenunterricht nur gelegentlich eingesetzt werden.

Die **Anregungsmaterialien der 2. Welle** sind ebenfalls offene Aufgaben. Sie tragen charakteristische Merkmale solcher Aufgaben, zum Beispiel lassen sie sich nicht nach einem eingeübten Algorithmus lösen, oft gibt es mehrere Lösungen, die als richtig anerkannt werden können, und häufig führen ganz verschiedene Lösungswege zum Ziel.
Im Gegensatz zu den Aufgaben aus der 1. Welle wird bei diesen Aufgaben aber die Voraussetzung dafür geschaffen, dass solche Aufgaben öfter in den Unterricht eingebracht werden. Dies wird erreicht, indem die Aufgaben vom Umfang her deutlich kleiner gehalten sind und somit von den Schülerinnen und Schülern in kürzerer Zeit bearbeitet werden können.

Wenn sich die Schülerinnen und Schüler häufiger und regelmäßig mit offeneren Aufgaben auseinander setzen und das veränderte Vorgehen beim Bearbeiten und Lösen solcher Aufgaben erfahren, erwerben sie nach und nach allgemeine mathematische Kompetenzen, wie sie z.B. in den Bildungsstandards beschrieben sind.

Wie können/sollen die Materialien im Unterricht eingesetzt werden?

Zuordnung zu einer Klassenstufe: Die Aufgaben lassen sich in der Regel nicht eindeutig einem bestimmten Thema der Schulmathematik und somit einer bestimmten Jahrgangsstufe zuordnen. Sie können deshalb weitgehend unabhängig von der Klassenstufe eingesetzt werden. Wenn zum Verständnis bzw. Lösen einer Aufgabe Vorkenntnisse erforderlich sind, ist dies bei der jeweiligen Aufgabe vermerkt.

Bezug zum laufenden Unterricht: Die Aufgaben sollen nicht zum Einüben eines gerade behandelten Stoffs benutzt werden. Vielmehr sollen sie eine Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler darstellen, sich ohne direkten Bezug zu dem Thema, mit dem sie sich im laufenden Unterricht beschäftigen, mit einer offenen mathematischen Fragestellung auseinanderzusetzen, bzw. ein Anwendungsproblem mit geeigneten mathematischen Mitteln zu lösen.

Häufigkeit des Einsatzes solcher Aufgaben: Die Aufgaben sollen nicht oasenartig, in größeren zeitlichen Abständen, als unübliche Besonderheiten in den Unterricht eingestreut werden, sondern häufiger, als ein Teil einer Unterrichtsstunde bzw. der Hausaufgaben erscheinen. Wenn sich die Schülerinnen und Schüler darauf einstellen, dass sie solche Aufgaben öfter und immer wieder bearbeiten sollen, werden bei ihnen Kompetenzen geweckt und gefördert, die über rein fachliche Kenntnisse und Fertigkeiten hinausgehen.

Arbeitsformen: Die meisten Aufgaben sind so gestaltet, dass sie sowohl in Einzel-, als auch in Partner- bzw. Gruppenarbeit gelöst werden können.
Einzelarbeit empfiehlt sich dann, wenn die Schülerinnen und Schüler befähigt werden sollen, allein auf sich gestellt allgemeine mathematische Kompetenzen anzuwenden. Dies ist bei allen üblichen Tests zu Vergleichsuntersuchungen (z.B. PISA) der Fall.

Partner- oder Gruppenarbeit ist angesagt, wenn die Lehrkräfte die Kompetenzen "Kommunizieren", "Präsentieren", "Dokumentieren" in den Vordergrund rücken wollen.
Wenn es bei der einen oder anderen Aufgabe erforderlich ist, den Aufgabentext oder den Aufgabenumfang der gewünschten Arbeitsform anzupassen, ist dies bei der jeweiligen Aufgabe vermerkt.

Wie können die Materialien einen Beitrag zur Erfüllung der Bildungsstandards leisten?

In dem Beschluss der KMK über Bildungsstandards im Fach Mathematik wird u. a. gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler mit dem Erwerb des Mittleren Schulabschlusses bzw. des Hauptschulabschlusses über folgende allgemeine mathematischen Kompetenzen verfügen:

(K1) Mathematisch argumentieren
(K2) Probleme mathematisch lösen
(K3) Mathematisch modellieren
(K4) Mathematische Darstellungen verwenden
(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
(K6) Kommunizieren

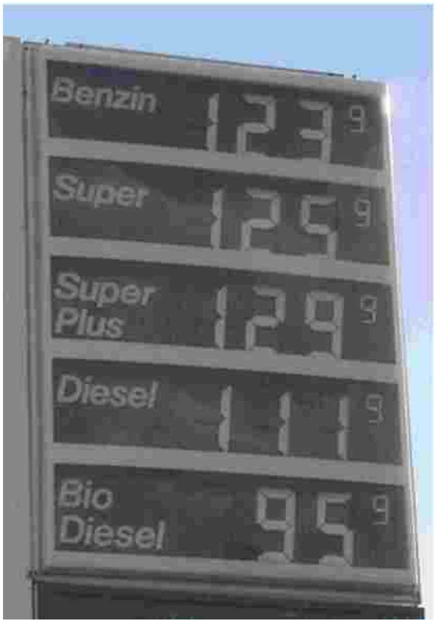
Der regelmäßige Einsatz der "Anregungsmaterialien" von SINUS-TRANSFEr Rheinland-Pfalz leistet einen Beitrag dazu, dass diese Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern erworben werden. Bei jeder der folgenden Aufgaben wird angegeben, welche der Kompetenzen durch die jeweilige Aufgabe in besonderer Weise gefördert werden.

Die Auswahl der Aufgaben aus den Anregungsmaterialien, die von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden sollen, ist den Lehrkräften freigestellt und kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen (Sachbezug, mathematischer Kontext, Schwierigkeitsgrad, ...). Ein weiteres Auswahlkriterium kann aber auch sein, dass die Lehrkräfte über einen gewissen Zeitraum hinweg gezielt einzelne Kompetenzen systematisch schulen wollen. Andere Kompetenzen würden dann zu einem anderen Zeitpunkt verstärkt in den Blick genommen. Der Hinweis bei den einzelnen Aufgaben, welche Kompetenzen durch die Aufgabe angesprochen werden, kann dann bei der Auswahl hilfreich sein.

Aufgabe 11: Tanktourismus

Aufgabentext

In zwei benachbarten europäischen Ländern unterscheiden sich die Benzinpreise deutlich. Bei den enormen Preisunterschieden haben Tankstellenpächter mit Umsatzeinbrüchen zu kämpfen. Für viele Autofahrer, die nicht weit entfernt von der Grenze wohnen, lohnt es sich, regelmäßig zum Tanken an eine billigere Tankstelle des Nachbarlandes zu fahren.
In deinem Land gelten die Preise, die auf der rechten Tafel angezeigt sind, im Nachbarland die auf der linken Tafel. Wie viele Kilometer würdest du fahren, um durch das Tanken Geld zu sparen?



Erforderliche Vorkenntnisse
Grundrechenarten, Funktionen, Dreisatz (proportionale Zuordnungen)

Hinweise zur Aufgabe

– Die Fragestellung ist bewusst offen gehalten, um den Schülerinnen und Schülern Überlegungen und Entscheidungen im Vorfeld, das heißt bevor gerechnet wird, zu ermöglichen.
– Bevorzugt die Lehrkraft – aus welchem Grund auch immer – eine weniger offen Aufgabenstellung, so könnte man zusätzliche Anregungen geben bzw. Vorgaben machen, zum Beispiel:
  - sich auf eine Kraftstoffsorte beschränken – z.B. auf Diesel,
  - von vorherein festlegen, wieviel Euro man auf jeden Fall sparen will, damit sich die Fahrt lohnt,
  - eine Entfernung von der Wohnung zur billigeren Tankstelle annehmen und prüfen, ob sich die Fahrt lohnt,
  - einen Schätzwert für den Kraftstoffverbrauch eines Autos zu Grunde legen,
  - die Betriebskosten in einer ersten Überschlagsrechnung nicht berücksichtigen.

– Die Aufgabe kann mit Hilfe einer Funktion gelöst werden. Jedoch reicht zum Lösen der Aufgabe der Dreisatz aus.

Eine mögliche Lösung

Entscheidungen und Annahmen:

– Die Berechnungen werden am Beispiel "Diesel" durchgeführt.
– Es werden an der Tankstelle 45 Liter getankt.
– Die Ersparnis soll wenigstens 10 Euro betragen.
– Der betrachtete PKW verbraucht im Durchschnitt 6 Liter auf 100 km.

Ergebnisse: (Sie können auf unterschiedlichen Rechenwegen erreicht werden.)

– Wenn 45 Liter getankt werden, beträgt die Ersparnis ungefähr 11 Euro.
– Da die Ersparnis 10 Euro betragen soll, dürfen die Benzinkosten für Hin- und Rückfahrt höchstens 1 Euro betragen.
– Kraftstoffkosten pro Kilometer: 0,06 • 0,865 Euro = 0,0519 Euro.
– Die Gesamtstrecke darf also nicht länger als (knapp) 20 km sein, das heißt, die Entfernung von der Wohnung zur Tankstelle darf höchstens 10 km betragen.

Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe

Die Aufgabe wird anspruchsvoller und zeitlich aufwändiger, wenn man folgende Punkte zusätzlich betrachtet:

– Betriebskosten des jeweiligen Fahrzeugs,
– Zeitaufwand für die Hin- und Rückfahrt,
– ökologische Aspekte.

Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler können eine Tabelle erstellen und eine Lösung der Aufgabe durch systematisches Probieren ermitteln.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

– Erkennen, dass für die hier zu treffende Entscheidung Überschlagsrechnungen mit Schätz- bzw. Näherungswerten angesagt sind. → (K2)

– die Vielfalt der zu berücksichtigenden Aspekte einschränken → (K3)

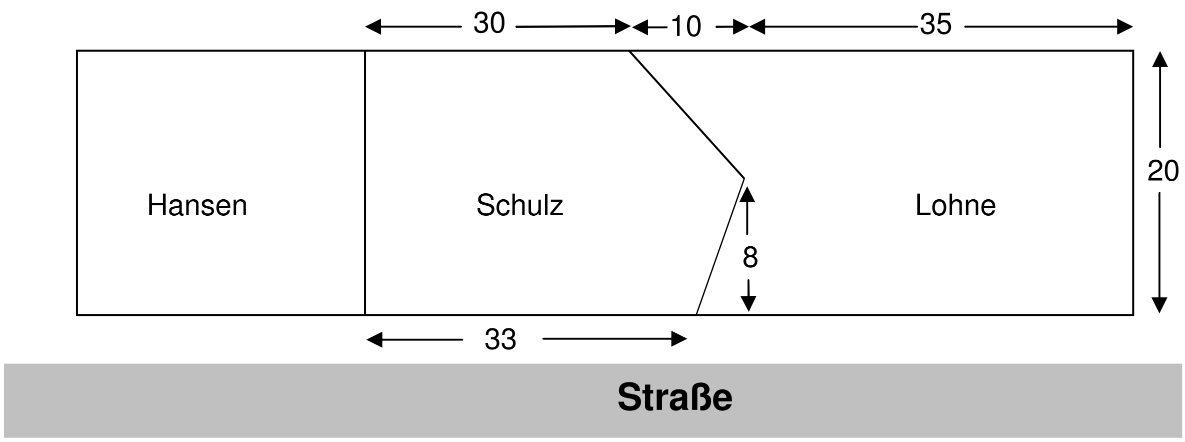
– Texte und Bilder zueinander in Beziehung setzen → (K4)

– Eigene Überlegungen und Entscheidungen verständlich erläutern, begründen und dokumentieren → (K1)

Aufgabe 12: Baugrundstücke

Aufgabentext

Die Baugrundstücke der Familien Hansen, Schulz und Lohne liegen nebeneinander.
Die Nachbarn Lohne und Schulz wollen die Grenzlinie zwischen den Grundstücken "begradigen". Zwei rechteckige Grundstücke der alten Größe sollen entstehen.
Die Straßenreinigung wird jährlich je „Frontmeter" abgerechnet. Für die gesamte Straßenfront der drei Grundstücke (120 m) verlangt die Stadtverwaltung 864 € pro Jahr.
Familie Hansen zahlt im Jahr 324 € Straßenreinigungsgebühr für ihr 900 m² großes Grundstück.



(Skizze nicht maßstabsgetreu, Maße in m)

Erforderliche Vorkenntnisse

Flächeninhalt von Rechtecken, Trapezen und/oder Dreiecken
Zuordnungen

Hinweise zur Aufgabe

Der Aufgabentext enthält keine Fragen. Für den Einsatz im Unterricht ist folgendes Vorgehen möglich:

- Man gibt der Klasse den Text in der hier vorgelegten Form. Die Schülerinnen und Schüler sollen selbst überlegen, welche Fragen sich zu der beschriebenen Situation ergeben können und diese bearbeiten.
- Man ergänzt den vorgelegten Text durch zwei naheliegende Fragen:
  a) Welche Maße haben die neuen Grundstücke?
  b) Wieviel müssen Familie Lohne und Familie Schulz nach der Grundstücksbereinigung jährlich mehr bzw. weniger bezahlen?

Zu Frage a):
Es eröffnen sich verschiedene Lösungswege, weil die Teilflächen unterschiedlich zerlegt werden können:

- Eine Lösungsmöglichkeit beruht auf der Zerlegung der Grundstücke Schulz oder Lohne in zwei Trapeze. Der Flächeninhalt des jeweils anderen Grundstückes kann dann z.B. durch Subtraktion vom Flächeninhalt des Gesamtrechtecks (Schulz + Lohne) bestimmt werden.

- Eine Zerlegung des Grundstückes Lohne in ein Rechteck und zwei Dreiecke führt ebenfalls zum Ziel.

Es ergibt sich: Grundstück Lohne: 788 m^2 ; Grundstück Schulz : 712 m^2

Aus diesen Werten werden die Längen der neuen Grundstücke (Rechtecke) berechnet:
Grundstück Lohne: 39,40m ; Grundstück Schulz: 35,60m.

Zu Frage b):
Der Aufgabentext enthält mehr Angaben, als zur Lösung notwendig sind.

- Die jährliche Straßenreinigungsgebühr von 7,20 € pro Meter Straßenfront kann ausgehend von der Länge der Straßenfront (120 m) und der dafür zu zahlenden Gebühr von 864 € pro Jahr berechnet werden.
- Ein zweiter Weg ist die Berechnung der Straßenfront des Grundstücks von Hansens (45m) über die Grundstücksgröße (900 m^2). Aus der jährlichen Straßenreinigungsgebühr der Familie Hansen kann man die jährliche Straßenreinigungsgebühr von 7,20 € pro Meter Straßenfront berechnen.

Zur Berechnung der Mehr- oder Minderkosten gibt es ebenfalls mehrere Möglichkeiten.

- Zum einen kann man die bisherige und die neue jährliche Straßenreinigungsgebühr von Familie Lohne berechnen (bisher 302,40 €, nun 283,68 €) und die Differenz bilden (18,72 €), oder die von Familie Schulz (bisher 237,60 €, nun 256,32 €).
- Es genügt aber auch, nur die Differenz der Längen der Grundstücke zu betrachten (2,60 m), um die Kostendifferenz von 18,72 € zu berechnen.

Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe:

Die Ausgangsflächen können verändert werden, für leistungsschwächere Gruppen z.B. jeweils in ein Trapez oder in Parallelogramme. Für leistungsstarke Gruppen können andere Formen gewählt werden.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

Mit dieser Aufgabe werden folgende allgemeine mathematische Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

- Einem Text gezielt benötigte Informationen entnehmen → (K3)
- Strategien zur mathematischen Problemlösung entwickeln (geeignete Flächenzerlegung) → (K2)
- Die Strategie erläutern, den gewählten Lösungsweg beschreiben, begründen und verständlich darstellen → (K1)
- Ist Partner- oder Gruppenarbeit angesagt, tauschen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse aus. → (K6)

Aufgabe 13: Wie dick ist die Frischhaltefolie?

Aufgabentext

Gebräuchliche Frischhaltefolie (Länge 50 m) hat eine mit üblichen Methoden nicht messbare Dicke. Schätze ab, wie dick die Folie ist! Gib einen Näherungswert an!

(Außenradius r_a = 2,1 cm; Innenradius r_i = 1,5 cm)

Erforderliche Vorkenntnisse
Je nach Lösungsweg: Kreisumfang, Volumen von Zylindern, Volumen von Prismen

Hinweis zur Aufgabe

– Wenn die erforderlichen Formeln im laufenden Unterricht noch nicht erarbeitet sind, wird die Benutzung einer Formelsammlung empfohlen.
– Der innere und der äußere Umfang des Zylinderrings (aufgewickelte Folie) können auch experimentell, z.B. mit Hilfe einer Schnur, bestimmt werden.

Hinweise zur Lösung:

Aufgrund der verschiedenen Lernvoraussetzungen bieten sich auch mehrere Lösungswege an, von denen einige im Folgenden näher beschrieben werden.

(1) Ermittlung eines Näherungswertes für die Dicke über den ***mittleren Radius bzw. mittleren Umfang***
Man betrachtet den Mittelwert r_m (1,8 cm) der Radien r_a und r_i und berechnet dann den mittleren Umfang $U_m = 2\pi\, r_m \approx 11{,}3$ cm.
Die Anzahl der Lagen n ergibt sich aus folgendem Ansatz: $n * U_m = 5000$ cm zu $n \approx 442$.

Aus der Anzahl der Lagen und der Differenz der Radien ra – ri = 0,6 cm ergibt sich für die Dicke d der Folie: $n*d = r_a - r_i = 0{,}6\ cm \Rightarrow d \approx 0{,}014$ mm.

An dieser Stelle kann auch auf Rundungsfehler und deren Fortpflanzung eingegangen werden!

(2) Ermittlung eines Näherungswertes für die Dicke durch ***Abschätzen nach unten und nach oben***

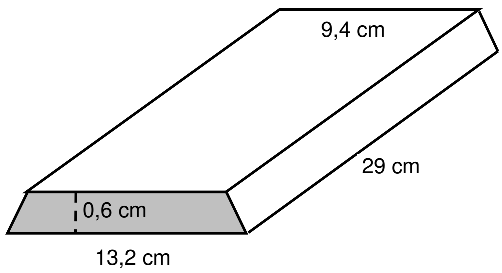
Man schätzt zunächst die Anzahl der Lagen n nach oben und unten ab.
Abschätzung nach oben: kleinster Umfang: $U_i = 2\pi\, r_i \approx 9{,}4$ cm
größte Anzahl der Lagen: $n_{max} * U_i = 5000\ cm \Rightarrow n_{max} \approx 532$
Abschätzung nach unten: größter Umfang: $U_a = 2\pi\, r_a \approx 13{,}2$ cm
kleinste Anzahl der Lagen: $n_{min} * U_a = 5000\ cm \Rightarrow n_{min} \approx 379$

Daran schließt sich eine Abschätzung für die Dicke der Folie d an:
Abschätzung nach unten: $n_{max} * d_{min} = 0{,}6\ cm \Rightarrow d_{min} \approx 0{,}0011\ cm = 0{,}011\ mm$
Abschätzung nach oben: $n_{min} * d_{max} = 0{,}6\ cm \Rightarrow d_{max} \approx 0{,}0016\ cm = 0{,}016\ mm$

(3) Ermittlung eines Näherungswertes für die Dicke über das **Volumen des Zylinderringes**
Unter der Annahme, dass die Folie sehr fest gewickelt ist, ist das Volumen der abgewickelten Folie gleich dem Volumen des Zylinderringes.
Abgewickelte Folie (Quader): Länge: 5000 cm (laut Verpackung), Breite: 29 cm (laut Verpackung),
Höhe: d (gesuchte Größe)

Volumen des Zylinderringes:
a) mit Hilfe der Formel: $V_{Zylinderring} = \pi* \left((2{,}1\ cm)^2 - (1{,}5\ cm)^2 \right) * 29\ cm$
Daraus ergibt sich für $d \approx 0{,}014$ mm.

b) durch Aufschneiden der gewickelte Folie:
Wenn man den Zylinderring an der Längsseite aufschneidet und auseinander faltet, erhält man ein ***Prisma mit einer trapezförmigen Grundfläche*** (grau).
Unter der Annahme, dass die Folie sehr fest gewickelt ist, ist das Volumen der abgewickelten Folie gleich dem Volumen des Prismas



$V_{Prisma} = \frac{13{,}2cm + 9{,}4cm}{2} \cdot 0{,}6cm \cdot 29cm$
Daraus ergibt sich für $d \approx 0{,}0135$ mm.

Hinweis zur Vereinfachung der Aufgabe

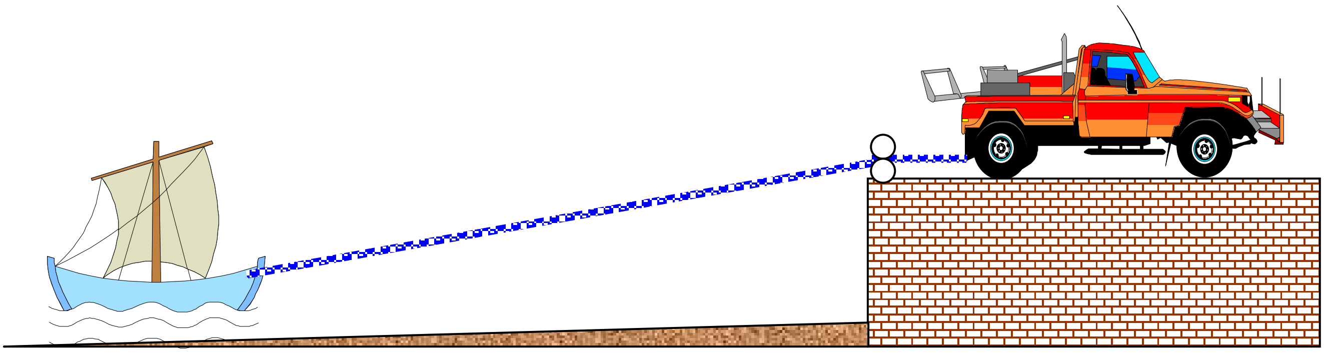
Für eine leistungsschwächere Lerngruppe kann es zur Veranschaulichung von Lösungsweg 3b) hilfreich sein, einen Zylinderring aus Schaumstoff tatsächlich an der Längsseite aufzuschneiden, damit die Schülerinnen und Schüler sehen, welcher Körper entsteht.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

- Eigene Überlegungen und Entscheidungen verständlich erläutern, begründen und dokumentieren. → (K1)
- Geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen auswählen und anwenden. → (K2)
- Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen. → (K4)
- Sich einschränkende Bedingungen bewusst machen. → (K3)

Aufgabe 14: Das Boot läuft ein



Aufgabentext
Ein Fahrzeug, das auf einer Kaimauer steht, zieht ein Boot an den Strand. Das Fahrzeug bewegt sich um 10 m. Ist die Strecke, um die das Boot herangezogen wird, ebenfalls 10 m, ist sie länger oder ist sie kürzer?
Begründe.

Erforderliche Vorkenntnisse
Je nach Vorkenntnissen kann die Aufgabe zeichnerisch, über die Dreiecksungleichung oder mit dem Satz des Pythagoras gelöst werden.

Hinweise zur Aufgabe

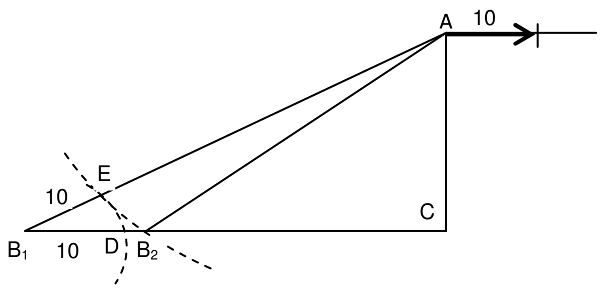
– Die Antwort auf die Frage in der Aufgabenstellung kann auf grundsätzlich unterschiedlichen Wegen gefunden werden:
  (1) durch mathematische Argumentationen an einer Zeichnung bzw. Skizze. Dieser Weg ist deutlich anspruchsvoller als der in (2) genannte.
  (2) bei Vorgabe weiterer Größen:
    - durch Berechnung der Strecke, um die das Boot herangezogen wird,
    - durch maßstabsgerechtes Zeichnen.

– Zur Bearbeitung der Aufgabe werden folgende Idealisierungen vorgenommen:
  - Wenn das Boot, wie in der Aufgabe beschrieben, an den Strand gezogen wird, wirkt auf das Boot sowohl eine Kraft, die es an den Strand zieht, als auch eine Kraft, die es anhebt (Parallelogramm der Kräfte). Bei einer hinreichend großen Entfernung von der Kaimauer kann das Anheben des Bootes vernachlässigt werden.
  - Außerdem wird davon ausgegangen, dass sich der Befestigungspunkt am Fahrzeug in Bodennähe befindet.

Mögliche Lösungen

Die Aufgabe lässt sich in unterschiedlichen Klassenstufen einsetzen. Aufgrund der verschiedenen Lernvoraussetzungen bieten sich auch mehrere Lösungswege an, von denen einige im Folgenden näher beschrieben sind.

Das Fahrzeug bewegt sich 10 m von der Kaimauer weg. Dann wird das Seilstück AB_1 von A zum Boot um 10 m kürzer. Der Kreis um A mit dem Radius $|AB_1|–10$ schneidet die Strecke B_1C im Punkt B_2. Das Boot hat die Strecke B_1B_2 zurückgelegt.



1. Lösung durch Argumentation

   1.1. Der Kreis um B_1 mit dem Radius 10 schneidet die Strecke B_1C im Punkt D. Da sich die Kreise in E berühren, ist $|B_1B_2|$ immer größer als 10.

   1.2. In dem Dreieck B_1B_2A ist:
   $|B_1B_2| + |B_2A| > |B_1A|$ (Dreiecksungleichung)
   $|B_1B_2| > |B_1A| – |B_2A|$
   $|B_1B_2| > |B_1A| – (|B_1A| – 10)$
   $B_1B_2 > 10$

2. Lösung durch Berechnung
   Für Berechnungen oder eine maßstabsgerechte Zeichnung müssen weitere Werte vorgegeben werden, zum Beispiel:
   Höhe der Kaimauer: 16 m, Länge des Seils: 34 m.

   Mit dem Satz des Pythagoras ist:
   in dem Dreieck B_1CA: $|B_1C|^2 + |CA|^2 = |B_1A|^2$; daraus folgt $|B_1C| = 30$ m,
   in dem Dreieck B_2CA: $|B_2C|^2 + |CA|^2 = |B_2A|^2$; daraus folgt $|B_2C| = 17{,}9$ m.
   $|B_1B_2| = |B_1C| – |B_2C| = 12{,}1 \text{ m} > 10$ m.

Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe

Für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler:
Die Lehrkraft kann - fachübergreifend (mit Physik) – Angaben über die aufzuwendenden Kräfte machen. Die Schülerinnen und Schüler sollen das Parallelogramm der Kräfte bei verschiedenen Abständen zur Kaimauer einzeichnen.

Für eine leistungsschwächere Lerngruppe:
Die Skizze kann mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

– Die Schülerinnen und Schüler müssen einen Lösungsweg finden, der zu ihrem Vorwissen passt, ihn beschreiben und begründen. → (K1, K2)
– Mithilfe der Eigenschaften geometrischer Figuren argumentieren. → (K1, K4)
– Sich vorgenommener Idealisierungen bewusst werden. → (K3)

Aufgabe 15: Mathe Odd-Set

Aufgabentext

Gut gewürfelt ist halb gewonnen!
Daniela und Felix haben sich ein verzwicktes Würfelspiel für die Projektwoche ausgedacht, mit dem sie ein paar Euro für ihre Klassenkasse einspielen wollen.
Daniela: „*Unser Spieler erzeugt durch dreimaliges Würfeln eine einstellige und eine zweistellige Zahl – und zwar so:*
Der 1. Wurf liefert die einstellige Zahl.
Der 2. Wurf liefert die Zehnerstelle und der 3. Wurf die Einerstelle der zweistelligen Zahl.

Zum Beispiel:  *Dann ist die einstellige Zahl 5 und die zweistellige 45".*

1. 2. 3.
Wurf

Felix: „*Und wann gewinnen wir?*“
Daniela: Die einstellige und die zweistellige Zahl werden miteinander multipliziert. Ist das Produkt gerade, gewinnen wir, ist es ungerade, gewinnt der Spieler! Im Beispiel hätte also der Spieler gewonnen, weil 5 ♦ 45 = 225 und diese Zahl ungerade ist.
Felix: *„Das ist ja blöd. Es gibt genau so viele gerade wie ungerade Zahlen auf dem Würfel, also kommen gerade und ungerade Produkte gleich oft vor. Dann nehmen wir doch nix ein!!!“*

Was meinst du dazu? Begründe deine Entscheidung!

Erforderliche Vorkenntnisse
Elementare Kenntnisse der Bruchrechnung.
Die Bestimmung der Chancen (Wahrscheinlichkeiten) setzt die Vorstellung der Wahrscheinlichkeit als „Quotient aus Anzahl der günstigen durch Anzahl aller möglichen Fälle“ intuitiv voraus.

Hinweise zur Aufgabe

Diese Aufgabe ist auch ohne Kenntnisse der elementaren Kombinatorik lösbar und deshalb bereits ab Klasse 6 einsetzbar.

Hinweise zur Lösung der Aufgabe

Lösungen über elementare Kombinatorik (2 verschieden Wege):
Die Anzahl aller Kombinationen von Produkten beträgt: $6 \cdot 36 = 216$

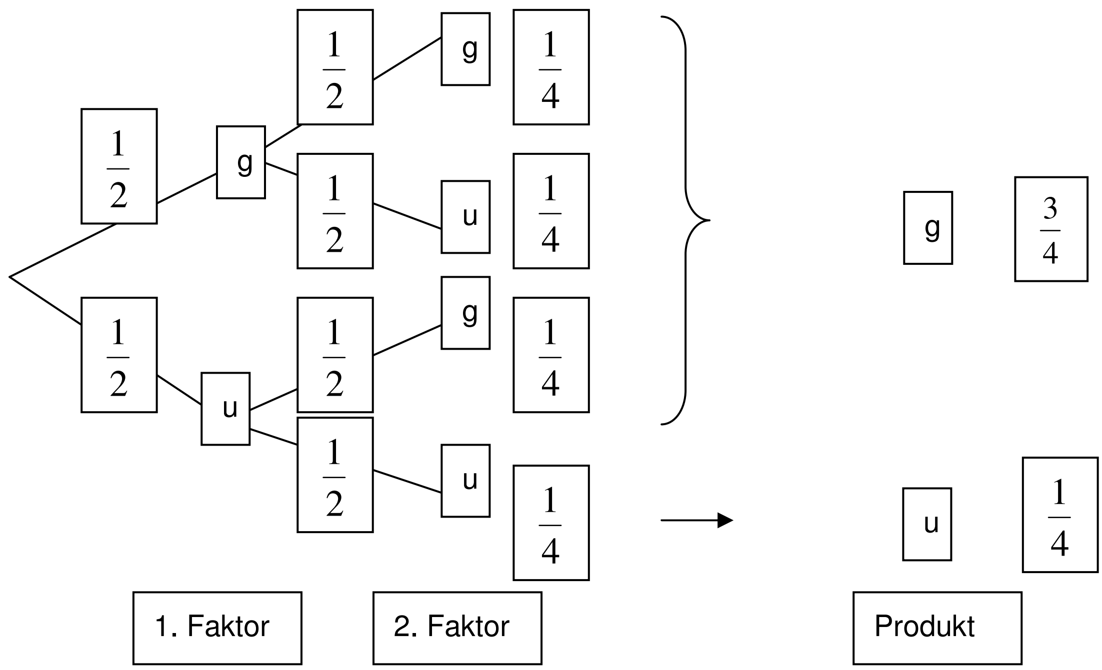
1. Weg: Ein Produkt ist genau dann ungerade, wenn beide Faktoren ungerade sind. Damit ergibt sich für die Anzahl aller Kombinationen ungerader Produkte: $3 \cdot 18 = 54$
Also in 54 von 216 Fällen gewinnt der Spieler; seine Gewinnchance beträgt 25 %.

2. Weg: Ein Produkt ist genau dann gerade, wenn mindestens ein Faktor gerade ist.

1. Faktor gerade	2. Faktor beliebig	$3 \cdot 36 = 108$
1. Faktor ungerade	2. Faktor gerade	$3 \cdot 18 = 54$
	Summe:	162

Also in 162 von 216 Fällen gewinnen Felix und Daniela; Gewinnchancen: 75%.

Lösungen über Baumdiagramme:



Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe:

Leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler:

- können zusätzlich den Fall betrachten, dass der Spieler gewinnt, wenn nur verschiedene Ziffern gewürfelt werden.
- können zusätzlich bestimmen, welche Einsätze bzw. Gewinnsätze gefordert werden müssten, damit das Spiel gerecht wäre.

Für eine leistungsschwächere Lerngruppe könnte das konkrete Würfeln eine Hilfe darstellen.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

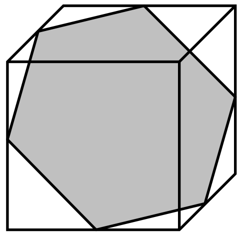
Mit dieser Aufgabe werden folgende allgemeine mathematische Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

- Strategien zur mathematischen Problemlösung entwickeln → (K2)
- Die Strategie erläutern, den gewählten Lösungsweg beschreiben, begründen und verständlich darstellen → (K1)
- Ist Partner- oder Gruppenarbeit angesagt, tauschen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse aus. → (K6)

Aufgabe 16: Schräg durch den Würfel

Aufgabentext

Ein Würfel wird so, wie in der Abbildung dargestellt, durchgeschnitten. Die Eckpunkte der Schnittfigur (graues Sechseck) liegen jeweils in der Mitte der Kanten des Würfels.



Zeichne ein passendes Netz zu diesem Würfel und markiere in dem Netz die Schnittlinien des Sechsecks.

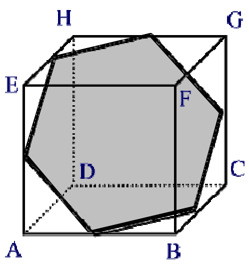
Erforderliche Vorkenntnisse

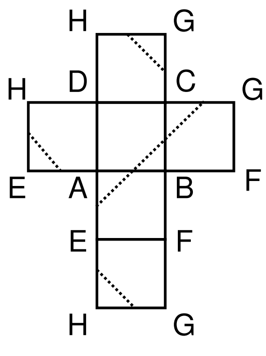
Würfelnetze

Hinweise zur Aufgabe

– Für Schülerinnen und Schülern bietet sich die Möglichkeit, das gesuchte Netz auf unterschiedliche Weise darzustellen. In das aufgezeichnete Netz können nach Belieben Markierungen gesetzt werden, die das richtige Einzeichnen der Schnittlinien erleichtern. Insbesondere wird empfohlen, zunächst die Ecken des Würfels mit Buchstaben zu kennzeichnen und die Buchstaben dann in das Netz zu übertragen.
– Als gute Vorübung zur Erinnerung an Würfelnetze wäre Aufgabe 2 aus der Aufgabenserie 1 denkbar, in der es darum geht, vorgegebene Pentominos durch ein zusätzliches Quadrat zu einem Würfelnetz zu ergänzen.
– Zur besseren Eigenkontrolle könnte man die Schülerinnen und Schüler die Aufgabe in Partnerarbeit lösen lassen.
– Sollte ausreichende Unterrichtszeit zur Verfügung stehen, ist eine Präsentation der unterschiedlichen Ergebnisse mit anschaulicher Begründung vorstellbar.

Eine mögliche Lösung:





Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe

Für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler:
- Ein nicht so leicht durchschaubares Würfelnetz vorgeben, in das die Schülerinnen und Schüler die Schnittlinien eintragen.
- Ein Würfelnetz mit einer (anderen) Schnittfigur vorgeben und in ein Schrägbild übertragen lassen.

Für eine leistungsschwächere Lerngruppe:
- Zur besseren Veranschaulichung könnte man den Schülerinnen und Schülern einen Würfel an die Hand geben oder ein Würfelnetz zum Ausschneiden und Falten zur Verfügung stellen.
- Wahl einer einfacheren Schnittfigur.

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

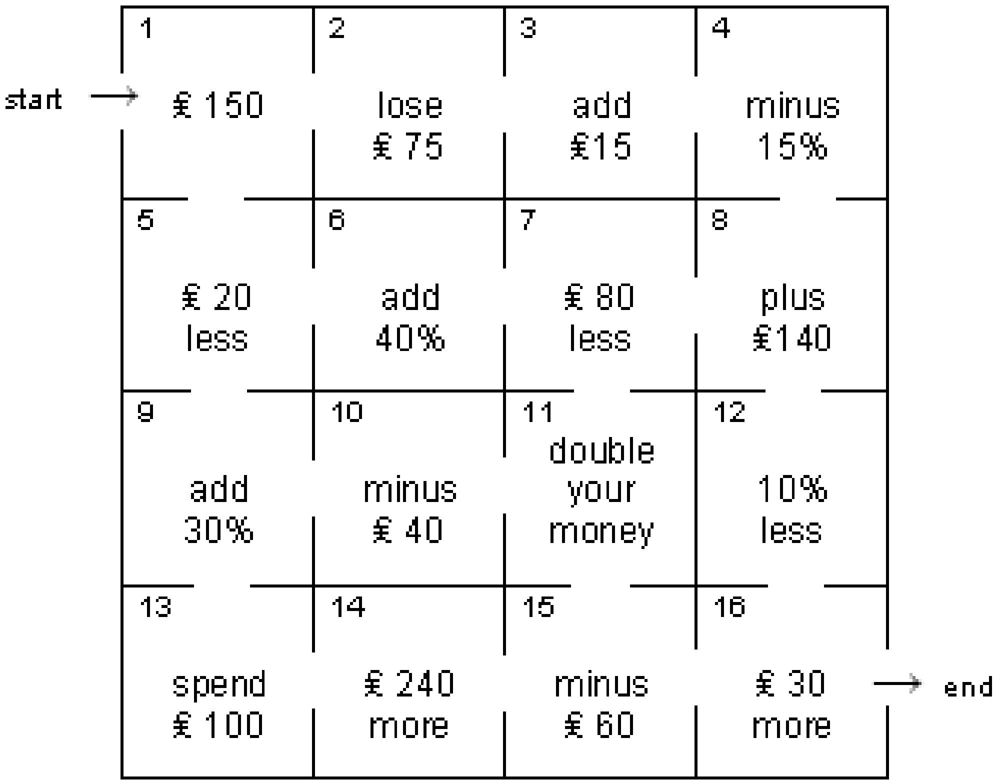
Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

- Der Umgang mit Netzen schult das räumliche Vorstellungsvermögen. Die Schülerinnen und Schüler müssen mathematische Objekte darstellen → (K4)
- In Partnerarbeit (und/oder in Präsentationen) tauschen die Schülerinnen und Schüler Ergebnisse eigener Überlegungen aus. → (K1, K6)

Aufgabe 17: Labyrinth[1]

Aufgabentext

Go through the maze, collecting and losing your money as you go. You may not go through any cell more than once, and can only go into a cell through a gap, for example, you may not go from 2 to 6, or from 7 to 3.



Which route gives you the highest return? How much is it?
Which route gives you the lowest return? How much is it?

Erforderliche Vorkenntnisse

elementare Kenntnisse der Prozentrechnung und Grundlagen der englischen Sprache

Hinweise zur Aufgabe

Dadurch dass lediglich Grundrechenfertigkeiten und elementare Kenntnisse der Prozentrechnung benötigt werden, kann die Aufgabe bereits in unteren Klassen eingesetzt werden. Ihr Reiz besteht unter anderem darin, dass hier eine Aufgabe zu lösen ist, die bereits erworbene Kennt-

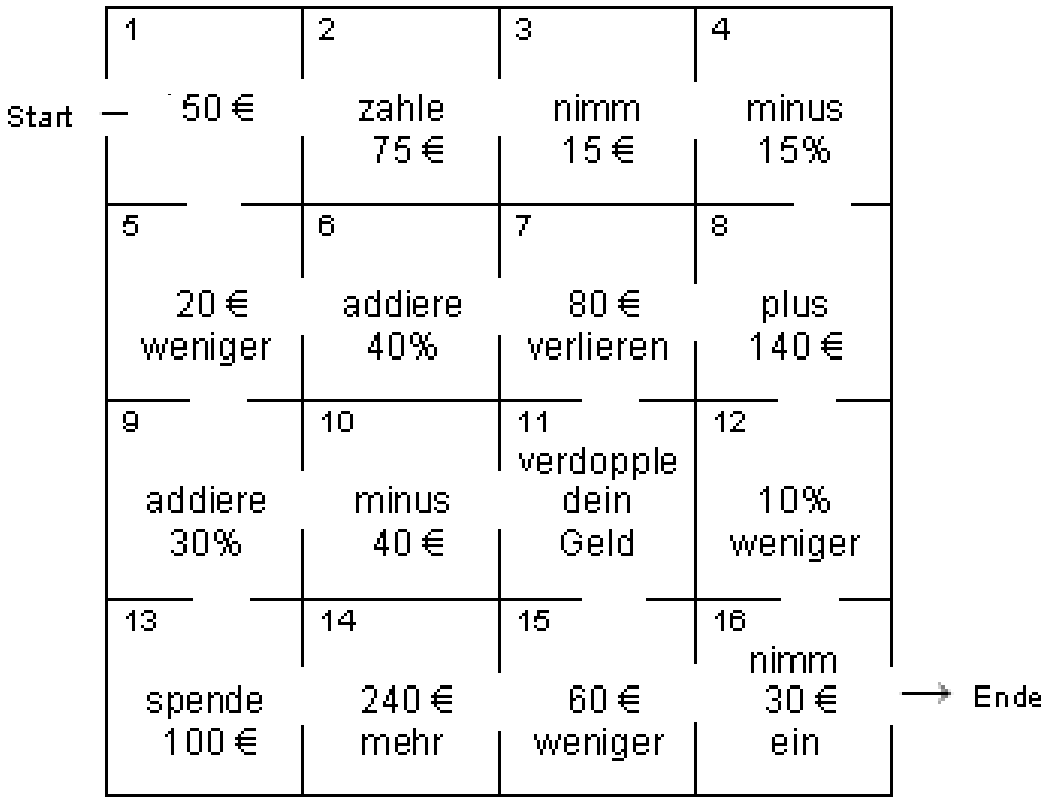
[1] Bearbeitet nach einer Idee von NRICH Primary Teacher Research Associate University of Cambridge Centre for Mathematical Science, http://nrich.maths.org/public, "The Money Maze", January 2005.

nisse in der Fremdsprache Englisch benötigt. Die erforderliche Mathematik geht über elementares Rechnen im Kopf nicht hinaus.
Das Labyrinth kann auf verschiedenen Wegen durchlaufen werden, wodurch sich unterschiedliche Ergebnisse und Lösungswege ergeben. Die Schülerinnen und Schüler werden durch den Wettbewerbscharakter motiviert, einen möglichst hohen (oder niedrigen) Betrag zu erreichen. Hierbei können ganz unterschiedliche Strategien angewandt werden.

Hinweise zur Erweiterung und zur Vereinfachung der Aufgabe
Für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler können der Startbetrag und die Zahlenwerte verändert werden. Wird mehr Wert auf die Prozentrechnung gelegt, können absolute Geldbeträge durch Prozentsätze ersetzt werden. Es ist auch denkbar, das Labyrinth zu erweitern.

Für eine leistungsschwächere Lerngruppe kann es hilfreich sein, die Aufgabe auf Deutsch zu stellen. Dadurch können sich die Schülerinnen und Schüler auf das Rechnen konzentrieren. Es kann auch hilfreich sein, die Felder, bei denen sich der Geldbetrag verringert, farblich zu hinterlegen oder für diese eine andere Schriftfarbe zu wählen.

Eine **deutsche Version** könnte lauten:
Du hast ein Startkapital von 150 €. Durchlaufe das Labyrinth und kassiere bzw. zahle die Beträge, die in den einzelnen Kästchen stehen. Du darfst durch jedes Kästchen nur einmal laufen und kannst nur durch Tore gehen. Von Kästchen 2 nach Kästchen 6 darfst du z.B. nicht gehen, weil es zwischen ihnen kein Tor gibt.



Welcher Weg führt dich zum höchsten Geldbetrag? Wie hoch ist er?
Welcher Weg führt dich zum kleinsten Geldbetrag? Wie hoch ist er?

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

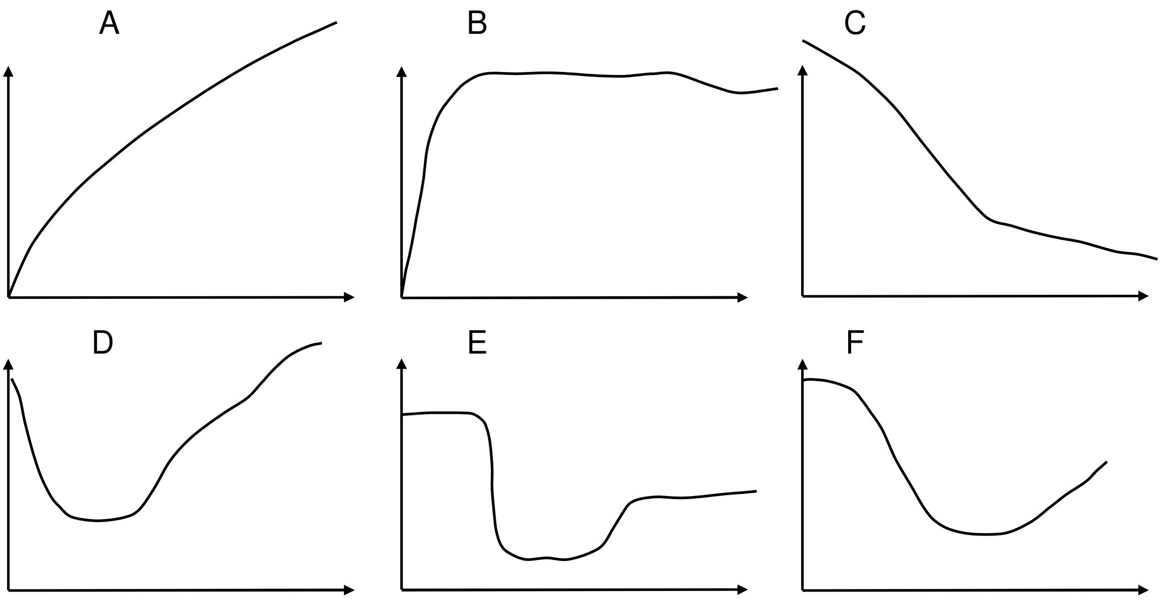
Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

- geeignete Strategien finden und anwenden → (K2)
- mit Zahlen in verschiedenen Darstellungsformen (rationale Zahl, Prozentsatz) umgehen → (K4)
- Den eigenen Lösungsweg und damit verbundene Überlegungen und Entscheidungen verständlich erläutern, begründen und dokumentieren → (K1, K6)

Aufgabe 18: Veränderungen an Graphen

Vorbemerkung
Es ist beabsichtigt, in jeder Serie der Anregungsmaterialien eine Aufgabe "Veränderungen an Graphen" aufzunehmen. Dies soll die Möglichkeit schaffen und dazu anregen, dass Lehrerinnen und Lehrer in ihrer Klasse regelmäßig Aufgaben dieser Art bearbeiten lassen, um kontinuierlich und nachhaltig die entsprechenden Fähigkeiten zu entwickeln.

Aufgabentext



a) Welcher Graph passt zu welcher Aussage? – Begründe deine Entscheidung!

(1) Nachdem der Inlinefahrer nach kurzer Zeit seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hat, kann er sie fast die ganze Zeit halten.

(2) Wenn doppelt so viel Teilnehmer mitfahren, muss jeder nur noch ungefähr die Hälfte bezahlen.

(3) Nachdem das Wasser aus dem Stausee zum Teil abgelassen wurde, stieg der Wasserspiegel nach den Regengüssen wieder an.

(4) Der Preis für Rohöl sank in den letzten Monaten drastisch ab, nachdem die Fördermenge reduziert wurde, stieg der Preis über das Anfangsniveau an.

(5) Das Flugzeug steigt mit annähernd gleichbleibender Geschwindigkeit.

(6) Das Fieber stieg und sank in den letzten Tagen immer wieder.

(7) Als der Fahrradfahrer den Berg hoch fuhr nahm seine Geschwindigkeit allmählich ab, bergabwärts ging es wieder schneller.

b) Ändere den Text in (3) und (7) so, dass die Lösung eindeutig wird.

Erforderliche Vorkenntnisse

Graphen im Koordinatensystem lesen und interpretieren

Hinweise zur Aufgabe

– In der Serie 1 der Anregungsmaterialien für die 2. Welle wurden die gleichen Graphen verwendet (Aufgabe 8). Die vorliegende Aufgabe unterscheidet sich von der in Serie 1 durch:
  • die größere Anzahl der zuzuordnenden Aussagen,
  • Aussagen, denen mehrere Graphen zugeordnet werden können,
  • eine Aussage, die keinem Graphen zugeordnet werden kann.

  Die Schülerinnen und Schüler sollen ihre Fähigkeiten, flexibel mit grafischen Darstellungen umzugehen und sie in unterschiedlichen Kontexten zu interpretieren, durch regelmäßiges Trainieren festigen und vertiefen.

  In den Aufgabensammlungen, die im Rahmen von SINUS und SINUS-TRANSFER in den Ländern erstellt wurden, in den meisten Schulbüchern und in vielen fachdidaktischen Veröffentlichungen können weitere Aufgaben dieser Art gefunden werden.

– Die Aufgabe eignet sich gut für Einzelarbeit. Die Schülerinnen und Schüler sollen dann ihre Begründungen schriftlich festhalten. Die Aufgabe ist aber auch für Partnerarbeit geeignet.

Lösungen

1. Aussage: Graph B
2. Aussage: Graph C
3. Aussage: Graph D, E oder F
4. Aussage: Graph D
5. Aussage: Graph A
6. Aussage: kein Graph vorhanden
7. Aussage: Graph D oder F

Allgemeine mathematische Kompetenzen – Zuordnung zu den Bildungsstandards

Mit dieser Aufgabe werden vor allem folgende allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert. Der Bezug zu den Bildungsstandards ist ausgewiesen.

– Graphen und Texte zueinander in Beziehung setzen → (K4)

– Eigene Überlegungen und Entscheidungen verständlich erläutern, begründen und dokumentieren → (K1)