

Stufen der Weiterentwicklung von Aufgabenstellungen auf der Grundlage von Lehrbuchaufgaben

Die folgenden Ausführungen, die von *Ferdinand Weber* für die Versuchsschulen zusammengestellt wurden, sollen Lehrerteams, die Aufgabenelemente aus dem BLK-Programm in ihren Unterricht einbeziehen und erproben wollen, unterstützen. Es wird gezeigt, dass derjenige, der die Qualität seines Unterrichts steigern möchte, sich nicht völlig umstellen muss. Man braucht nicht auf alles Bisherige zu verzichten und muss nicht völlig neu und anders anfangen.

In 9 Stufen werden Möglichkeiten der Veränderung von Aufgabenauswahl und -formulierung aufgezeigt. Die Stufen sind so gewählt, dass am Anfang möglichst eng an vorhandene Aufgaben in Lehrbüchern angeknüpft wird. Dies soll Mut machen und zeigen, dass man auch aus einfachen Anfängen heraus respektable Ziele erreichen kann. Bei den weiteren Stufen werden die Aufgabenstellungen immer anspruchsvoller und damit auch – zugegebenermaßen – die Anforderungen an die Lehrerinnen und Lehrer größer.

Die positiven Grunderfahrungen der am Versuch beteiligten Lehrerinnen und Lehrer, dass nämlich eine, wie auch immer geartete Öffnung der Übungen und Problemstellungen zu Veränderungen der Methode und des Lehrerverhaltens führt und motivierende Wirkung auf die meisten Schülerinnen und Schüler hat, werden auch schon bei den ersten der im Folgenden genannten Stufen greifbar.

Teil I

In der 1. bis 5. Stufe sind Veränderungen von Lehrbuchaufgaben beschrieben, die sich unter normalen Unterrichtsbedingungen realisieren lassen. Sie erfordern in der Vorbereitung einen vertretbaren Aufwand und lassen sich in der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit in die Übungsphasen integrieren.

1. Stufe: Außergewöhnliche Aufgaben in den Lehrbüchern stärker betonen

In Übungsphasen und in den Hausaufgaben werden neben Trainings- und Routineaufgaben auch öfter "außergewöhnliche" Aufgaben, wie sie in den Lehrbüchern zu finden sind, eingestreut; z.B.

Aufgaben zum Weiterdenken, zum Begründen, zum Knobeln. Solche Aufgaben sind in den Schulbüchern häufig in eigenen Unterabschnitten zusammengefasst oder durch ein Symbol als "ausgefallen" oder als anspruchsvoller gekennzeichnet. Sie werden von Unterrichtenden oft bei der Auswahl von Übungen bewusst als weniger geeignet eingestuft, weil sie nicht direkt der Festigung von Fertigkeiten dienen, und deshalb umgangen. Ein erster Schritt wäre, solche Aufgaben so in den Unterricht einzubeziehen, dass sie, auch in den Augen der Schülerinnen und Schüler, an Ansehen und Bedeutung gewinnen. Dabei kommt es, im Gegensatz zu *reinen* Trainingsaufgaben, nicht darauf an, dass diese Aufgaben schnell und vollständig gelöst werden. Lösungsansätze zählen, Vermutungen bezüglich eines Lösungswegs werden anerkannt, die Einsicht, warum ein bestimmter Weg nicht zum Ziel führen kann, gewürdigt. Empfehlenswert ist, die Schülerinnen und Schüler in einem Lernprotokoll ihre Gedanken und Fragen zur Sache, die sich während der Bearbeitung einstellen, beschreiben zu lassen.

2. Stufe: Aufgaben aus verschiedenen Stoffgebieten mischen

Schülerinnen und Schüler sind es gewohnt, dass in Übungen, Hausaufgaben und Klassenarbeiten nur Aufgaben gestellt werden, die zu dem gerade behandelten Thema passen und sich mit Hilfe einer Hand voll erlernter Regeln oder Strategien lösen lassen. Dies wird in Schulbüchern auch noch dadurch unterstützt, dass innerhalb eines Lehrbuchkapitels die Übungen noch einmal in Unterabschnitte mit entsprechenden Lösungshinweisen in den Überschriften eingeteilt werden. Die Schülerinnen und Schüler gehen davon aus, dass Wissen und Können aus einem Gebiet abgelegt werden dürfen, wenn ein neues Thema beginnt.

Will man dieser durch Erfahrung gewonnenen Einstellung der Schülerinnen und Schüler entgegenwirken, kann man regelmäßig Aufgaben aus zurückliegenden Themen in die Übungsphasen einflechten. Dabei sollte der Aufgabenstellung nicht unmittelbar zu entnehmen sein, welchem Gebiet die Aufgabe zuzuordnen ist und mit welchem Verfahren sie gelöst werden kann. Hat sich die Klasse erst einmal auf diese Situation eingestellt, können auch in Klassenarbeiten gebietsübergreifende Aufgaben einbezogen werden.

3. Stufe: Lehrbuchaufgaben durch zusätzliche Fragen erweitern

Oft sind Lehrbuchaufgaben so angelegt, dass sie genau eine Lösung besitzen und es genau einen Weg gibt, der zu dieser Lösung führt. Diese Aufgaben haben ihre Berechtigung. Sie sollten aber gelegentlich auch durch offenere Fragestellungen ergänzt werden. Als zusätzliche Teilaufgaben können weiterführende und tiefergehende Fragen angehängt werden; z.B. solche, die sich den geübten Routinen entziehen, in denen Begründungen verlangt werden oder Wissen neu organisiert werden muss, oder zu deren Lösung Kenntnisse aus anderen Stoffgebieten erforderlich sind.

Beispiel

Der Arbeitskreis "Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur" des ISB München bietet folgende Zusatzfragen zu einer Lehrbuchaufgabe an [6]:

Lehrbuchaufgabe:

In einem Trapez ABCD ist $a=10$ cm, $b=5$ cm, $c=4$ cm und $h_a = 3$ cm. Fertige eine Skizze an, und berechne die Länge der Seite d und die der Diagonalen e und f sowie den Flächeninhalt A des Trapezes!

Zusatzfragen:

- Durch ein Lot zur Trapezbasis $[AB]$ (Lotfußpunkt T) soll das Trapez in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden. Berechne \overline{AT} !
- Für $\overline{AT} = 6$ cm zerlegt die Strecke \overline{DT} das Trapez in zwei Teilflächen.
 - 1) Um wie viel Prozent ist die größere dieser beiden Flächen größer als die kleinere der beiden Teilflächen?
 - 2) Um wie viel Prozent ist die kleinere dieser beiden Flächen kleiner als die größere der beiden Teilflächen?
- Ist eine Zerlegung des Trapezes in zwei kongruente Flächenstücke möglich?
- Bei welchen besonderen Trapezarten wäre eine Zerlegung in zwei kongruente Flächenstücke leicht?

4. Stufe: Lehrbuchaufgaben durch zusätzliche Angaben erweitern

Um die Schülerinnen und Schüler zu selbstständigem Denken und Handeln anzuregen, kann man *eindeutig* lösbare Aufgaben in den Schulbüchern so verändern, dass die Aufgabenstellung überbestimmt ist bzw. Angaben redundant sind. Im Abschnitt "Dreieckskonstruktionen" zum Beispiel werden in der Regel drei geeignete Größen vorgegeben und verlangt, das entsprechende Dreieck zu konstruieren. Statt dessen kann man auch mehr als drei Größen des Dreiecks vorgeben und die Schülerinnen und Schüler auffordern, drei Stücke auszuwählen und zu entscheiden, ob aus diesen ein Dreieck eindeutig konstruiert werden kann. Werden jeweils Begründungen abverlangt, so werden auch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler gefordert.

Beispiel

Lehrbuchaufgabe:

Konstruiere ein Dreieck aus $a = 9,5$ cm, $c = 11$ cm, $s_c = 9,5$ cm und gib eine Konstruktionsbeschreibung an.

Offenere Aufgabenstellung:

Von einem Dreieck sind folgende Größen bekannt: $a = 9,5$ cm, $c = 11$ cm, $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $w_\beta = 8,5$ cm, $s_c = 9,2$ cm, $h_c = 8,9$ cm. Wähle aus diesen Größen drei aus und prüfe, ob damit das Dreieck konstruiert werden kann. Wenn ja, entscheide, ob das Dreieck eindeutig bestimmt ist. Begründe jeweils deine Antworten.

Schließlich kann man die Schülerinnen und Schüler (möglichst viele) Aufgaben mit je drei Größen in einem Dreieck erfinden lassen, aus denen sich ein Dreieck *gar nicht* oder *nicht eindeutig* konstruieren lässt.

Bei Sachaufgaben ist es recht einfach, vorgegebenen Aufgaben weitere, zur Lösung nicht benötigte Informationen hinzuzufügen, so dass die Schülerinnen und Schüler genau überlegen müssen, welche Aussagen sie berücksichtigen müssen und welche nicht.

Enthalten Sachaufgaben mehrere Teilfragen, so werden oft die für die Bearbeitung der Teilfragen notwendigen Informationen jeweils an Ort und Stelle angegeben. Man sollte statt dessen alle überhaupt benötigten Angaben in einem Aufgabenkopf zusammenstellen. Die Schülerinnen und Schüler müssen dann bei jeder Teilaufgabe überlegen, welche der Angaben sie für die Lösung der gerade bearbeiteten Teilaufgabe auswählen müssen.

5. Stufe: Kleinschrittige Fragen in den Lehrbuchaufgaben streichen

Häufig findet man in Lehrbüchern Aufgaben, die in zahlreiche Aufgabenteile gegliedert sind. In jeder Teilaufgabe wird nur eine ganz enge Frage gestellt, die auf ein ganz bestimmtes Ergebnis zielt. Zusätzlich werden vielfach Anleitungen gegeben oder Musterbeispiele vorgerechnet.

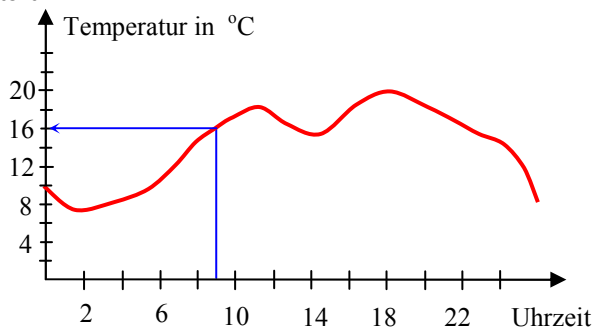
Die Autoren der Lehrbücher wissen, dass Lehrerinnen und Lehrer berechtigte Gründe haben, wenn sie solche eng geführten Aufgabenstellungen gutheißen.

Andererseits kann das Verzicht auf kleinschrittige Führung dort hilfreich sein, wo Schülerinnen und Schüler zu mehr Selbstständigkeit in der Bearbeitung von Problemstellungen geführt werden sollen. Um dies zu erreichen, muss man nicht neue Aufgaben erfinden oder vorhandene völlig umbauen. Es genügt häufig, die Fragen einfach wegzulassen und diese durch einen allgemeineren Auftrag zu ersetzen. Man kann auch die Schülerinnen und Schüler selbst Fragen erfinden lassen, z.B. zu vorgegebenen Texten, Daten, Grafiken oder Bildern. Dies führt zu unterschiedlichen Aufgabenstellungen und Lösungswegen.

Beispiel

Lehrbuchaufgabe:

Ein Temperaturschreiber hat den Graphen der Zuordnung "Zeit→Temperatur" aufgezeichnet. In der folgenden Grafik ist dies für 24 Stunden eines Tages dargestellt.



- a) Welche Temperaturen liest du um 2 Uhr, 8 Uhr, 11 Uhr, 13 Uhr, 16 Uhr, 22 Uhr ab? Trage die Werte in die Tabelle ein.

Anleitung: Um 9 Uhr betrug die Temperatur 16 °C. Dies kannst du an dem abgeknickten Pfeil ablesen.

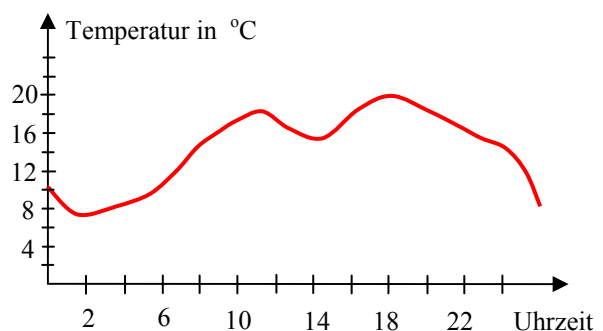
| | | | | | | | |
|------------|-----|--|--|--|--|--|--|
| Uhrzeit | 0 h | | | | | | |
| Temperatur | 10° | | | | | | |

- b) Wann betrug die Temperatur 15°C, 8°C, 0°C? Lies jeweils alle Zeitpunkte ab.

Anleitung: Zeichne abgeknickte Pfeile, deren Spitzen auf der horizontalen Achse liegen.

- c) Wie groß war die höchste (niedrigste) Temperatur des Tages? Wann wurden sie erreicht?

Offenere Aufgabenstellung:



Was kannst du aus der graphischen Darstellung alles über den Temperaturverlauf zwischen 0 Uhr und 24 Uhr erfahren?

Anregungen für Aufgaben, die den Schülerinnen und Schülern mehr Spielraum und Freiheit lassen, finden sich in den Aufgabenbeispielen dieses Hefts (Seite 48 ff.) und in [4].

Teil II

Durch die in der 6. bis 9. Stufe beschriebenen Veränderungen von Lehrbuchaufgaben entstehen umfangreichere und aufwändigere Arbeitsaufträge für die Schülerinnen und Schüler. In der Regel lassen sich diese Aufgaben nicht mehr nahtlos in die üblichen Übungsphasen einbinden. Vielmehr werden Schüleraktivitäten erwartet, für die in größerem Umfang Unterrichtszeit und Arbeitszeit außerhalb von Unterricht und Schule benötigt werden. Von Stufe zu Stufe nehmen die veränderten Aufgaben immer mehr projektartigen Charakter an.

6. Stufe: Informationen in den Lehrbuchaufgaben durch Schülerinnen und Schüler zusammentragen lassen

Auf der 5. Stufe wurde empfohlen, kleinschrittige Teilfragen aus den Lehrbuchaufgaben zu streichen. Auf der 6. Stufe wird jetzt angeregt, auch *Informationen* aus den Lehrbuchaufgaben herauszunehmen und notwendige Informationen zu dem angesprochenen Sachverhalt von den Schülerinnen und Schülern selbst zusammentragen zu lassen. Dies kann geschehen durch Beobachtungen, Befragungen, Sammeln von Zeitungsmeldungen, Nachschlagen in Lexika, Recherchen im Internet und anderes mehr.

In dem im Abschnitt "5. Stufe" dargestellten Beispiel könnte z.B. auf die Vorgabe des Graphen verzichtet werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen den Temperaturverlauf während eines Tages selbst beobachten und einen Graphen erstellen.

Die meisten Sachthemen, die in den Übungsteilen der Schulbücher angesprochen werden, eignen sich als Einstieg in Aufgabenstellungen, bei denen die Schülerinnen und Schüler selbstständig ihnen angemessen erscheinende Sachfragen aufstellen und zu deren Beantwortung gezielt recherchieren können.

7. Stufe: Informationen in den Lehrbuchaufgaben durch Handlungsaufträge ersetzen

Mit dieser Stufe ist die Ebene der Handlungsorientierung angesprochen, die von vielen Fachdidaktikern als eine wichtige Voraussetzung für ein auf Verständnis zielendes Lernen gesehen wird. In den Lehrbuchaufgaben sind oft Informationen verpackt, die auch durch die Schülerinnen und Schüler selbsttätig gefunden werden können.

Beispiele:

- Untersuchung von Zuordnungen durch
 - * Füllversuche mit verschieden geformten Glasgefäßen (Volumen → Höhe des Wasserstandes)
 - * Wiegen von kleinen gleichartigen Gegenständen (Anzahl → Gewicht)
 - * Ausmessen von zylindrischen Objekten (Radius → Umfang)

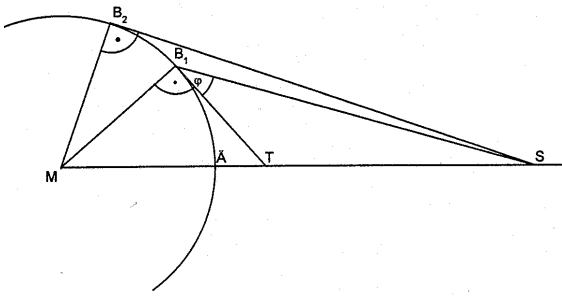
- Anwenden geometrischer Aussagen bei Vermessungsaufgaben im Gelände. Hierzu finden sich Anregungen in den Aufgabenbeispielen dieses Hefts (Seite 52)
- Entdecken geometrischer Beziehungen durch Arbeiten mit didaktischem Material, z.B. Legespiele, Geobrett
- Spielerisches Zeichnen und Konstruieren. Auch hierzu finden sich Anregungen in den Aufgabenbeispielen dieses Hefts (Seiten 25, 35, 42, 48)
- Exploratives Lernen mit einem Computerprogramm, z.B. Untersuchung der Parameter einer Funktionsgleichung, Beobachtung von Eigenschaften einer Figur bei Veränderung von Lage und Form.
Anregungen für das Arbeiten mit dem Geometrieprogramm EUKLID im Unterricht werden von den BLK-Versuchsschulen aus Rheinland-Pfalz ins Internet gestellt.

8. Stufe: Zusammenbinden von Aufgaben aus verschiedenen Themenbereichen unter einem gemeinsamen Sachthema

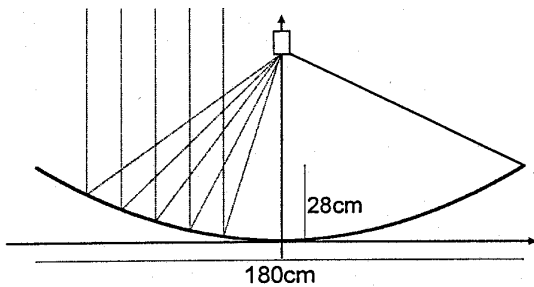
Auf der 8. und 9. Stufe rückt das Sachthema noch stärker in den Vordergrund. Auf der 8. Stufe geht es zunächst darum, Aufgaben zu erstellen, in denen zu *einem* Sachgebiet mehrere, ganz unterschiedliche Fragen gestellt werden. Deren Bearbeitung erfordert fachliche Kenntnisse aus sehr verschiedenen Themenbereichen des Lehrplans. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich also bei ein und derselben Aufgabe immer wieder neu überlegen, welche mathematischen Mittel sie einsetzen, um den jeweils nächsten Schritt zu bewältigen. Dies ist sicher eine Möglichkeit, am einfachen Fall Modellbildung erfahren zu lassen.

Der Arbeitskreis "Neue Schwerpunktsetzungen in der Aufgabekultur" des ISB München hat folgende Aufgabe vorgestellt (siehe [6]).

Fernseh- und Rundfunkempfang über Satellit
Ein Satellit, der in 35870 km Höhe über dem Äquator die Erde in östlicher Richtung umkreist, benötigt für einen Umlauf genau einen Tag, daher bewegt er sich relativ zur Erde nicht (sogenannte "geostationäre Bahn"). Der direkt sendende europäische Fernsehsatellit Astra 1A "steht" in diesem Sinne über dem Äquator auf 19° östlicher Länge.



- a) Unter welchem Winkel gegen die Erdoberfläche ist eine auf den Satelliten ausgerichtete Empfangsantenne in Hof (50,3° nördlicher Breite) zu neigen?
 Vernachlässige, dass Hof bei 11,9° östlicher Länge und damit nicht genau in der Ebene liegt, die der 19. Längengrad und der Satellit aufspannen.
- b) Bis zu welchem Breitengrad kann Astra 1A auf dem 19. Längengrad empfangen werden?
- c) Gängige Empfangsspiegel sind im Querschnitt parabelförmig und besitzen in Empfangsanlagen für eine größere Zahl von Teilnehmern beispielsweise den Durchmesser 1,8 m und die Tiefe 28 cm.



Welcher Funktionsterm beschreibt den skizzierten Querschnitt des Empfangsspiegels?

- d) Durch eine verbesserte Empfangselektronik ist es möglich, die Empfangsfläche um 40% zu reduzieren. Auf welchen kleineren Wert kann der Durchmesser des Empfangsspiegels dadurch verringert werden?
- e) Parabeln haben die Eigenschaft, parallel zur Symmetrieachse einfallende Strahlen im Brennpunkt der Parabel zu bündeln. Der Brennpunkt liegt bei der Parabel 72 cm über dem Scheitel. Überprüfe die folgende Aussage einer Formelsammlung:
 "Die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel hat bei einer Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2p}x^2$ den Wert $\frac{p}{2}$."

- f) Welche Länge muss der am Rand des Spiegels befestigte Haltebügel des im Brennpunkt der Parabel postierten Empfängers besitzen?
- g) Aktuelle Parabolspiegel für private Anwender sind als "Offset-Antennen" ausgeführt. Dabei wird nur ein kreisrunder, seitlich des Scheitels gelegener Teil des paraboloiden Reflektors verwendet. Welche Vorteile bietet diese Bauweise?

Solche Aufgaben findet man in der Literatur selten. Das hier aufgeführte Beispiel soll Lehrkräfte anregen, Aufgaben dieser Art zusammen mit Kolleginnen und Kollegen zu entwickeln.

9. Stufe: Ein Sachthema im Rahmen eines Projekts fächerverbindend angehen

Auf dieser Stufe hat die Mathematik eine dienende untergeordnete Funktion. Das Sachthema steht im Mittelpunkt und wird von vielen Seiten im Rahmen eines Projekts angegangen. Es ist nur so viel Mathematik relevant, wie zur Lösung sachinterner Fragen während der Arbeit im Projekt nötig ist. Der Anwendungsbezug von Mathematik wird auf diesem Weg von allen Schülerinnen und Schülern besonders intensiv erfahren. Andererseits werden vielfach nur elementare mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten gefragt sein. Anspruchsvollere Fachthemen, die die Grundlage für die Bearbeitung komplexerer Zusammenhänge bilden, bleiben in der Regel außen vor.

Beispiel

Im Folgenden werden zum Thema "Wasserverbrauch" eine Lehrbuchaufgabe und ein Projekt einander gegenübergestellt.

Lehrbuchaufgabe:

Zeichne zu folgenden Angaben ein Kreis- und ein Säulendiagramm.

Der tägliche Wasserverbrauch einer Person in einem Haushalt beträgt 125 Liter im Mittel.

Davon entfallen auf:

| | |
|-------------------------|-----|
| Baden und Waschen | 30% |
| Wohnungsreinigung | 5% |
| Toilettenspülung | 15% |
| Wasch- und Spülmaschine | 25% |
| Bewässern des Gartens | 5% |
| Kochen | 15% |
| Verschiedenes | 5% |

Stationen eines Projekts "Wasser sparen":

1. *Die Schülerinnen und Schüler recherchieren, welche Wassermengen wofür gebraucht werden. Sie experimentieren zu Hause mit Schöpf- und Füllgefäßen.*
2. *Es werden die Methoden besprochen, wie man Wasserverbrauch misst (Funktionsweise der Wasseruhr; Wasserrechnungen).*
3. *Die Schülerinnen und Schüler erkundigen sich nach offiziellen Angaben über den Wasserverbrauch.*
4. *Darstellungen des individuellen/bundesweiten Wasserbrauchs.*
5. *Wo lässt sich Wasser sparen? – Die Schülerinnen und Schüler experimentieren, zum Beispiel bei der Toilettenspülung. Sie informieren sich auch bei Firmen und Handwerkern.*
6. *Die Möglichkeiten Wasser zu sparen, werden verglichen, der Vergleich dargestellt.*

Heinz Böer hat ein entsprechendes Projekt mit Schülerinnen und Schülern durchgeführt. Eine ausführliche Darstellung findet man in [2].

Schlussbemerkung

Die neun Stufen bieten ein breites Spektrum der Möglichkeiten, ausgehend von Lehrbuchaufgaben den Unterricht durch eine Veränderung der Aufgabenkultur zu bereichern. Die Versuchsschulen haben die obigen Ausführungen zur Grundlage ihrer Entscheidungen gemacht. Dabei ergab sich, dass die Fachschaften der einzelnen Schulen unterschiedliche Stufen zum Einstieg in das BLK-Programm gewählt haben. Es kann nicht das Ziel sein, möglichst bald eine möglichst hohe Stufe zu erreichen. Es kommt vielmehr darauf an, sich in der Fachschaft unter den Bedingungen der jeweiligen Schule auf gemeinsame Ziele zu verständigen, zu reflektieren, welche Schritte angemessen sind, und auf der Basis dieser Entscheidungen die konkrete Arbeit in Kooperation anzugehen.

Literatur

- [1] Baumert, J. et al.: TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich – Deskriptive Befunde – Opladen: Leske + Budrich 1997
- [2] Böer, H.: Wasser sparen. – In: mathematiklehren H. 72 (1995), S. 12 – 16
- [3] Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK): Gutachten zur Vorbereitung des Programms "Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts". Heft 60 der BLK-Reihe "Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung" – Bonn 1997
- [4] Herget, W.; Scholz, D.: Die etwas andere Aufgabe. – Seelze: Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung 1998
- [5] Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz (Hrsg.): TIMSS – Die Diskussion um den Mathematikunterricht als Chance für seine Weiterentwicklung. PZ-Information 12/99 – Bad Kreuznach 1999
- [6] Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung (ISB) München: Neue Schwerpunktsetzung in der Aufgabenkultur. Zwischenbericht aus einem Arbeitskreis – München 1998