Aufgabeneinheit 3: Ich steck' mir einen Garten ab

Christine Berger / Hellen Ossmann / Paul Müller

Teilaufgabe „Dreieck"

Immobilienmakler *Pfiffig* hat für seine Kunden immer ein Schnäppchen parat:

> **Verbringen Sie Ihre Nachmittage im Dreieck!**
>
> Dreieckige Gartengrundstücke zum Selbstabstecken !!!
>
> Wir geben Ihnen…
> … 3 Pfähle und ein 60m langes Seil
> … und Sie geben uns…
> … 15 000 € !

Du willst einen Garten erwerben – wie steckst du ab?

Teilaufgabe „Viereck"

Makler *Neidisch* bemerkt den Run auf das Angebot seines Konkurrenten Pfiffig und schlägt den Kunden folgendes vor:

> **Relaxen Sie demnächst im eigenen Viereck!**
>
> Wir bieten Ihnen für den Festpreis von sage und schreibe
> 15 000 €
> viereckige Grundstücke.
> Die Form ihrer Grundstücksfläche bestimmen Sie!
>
> Wir geben Ihnen 4 Pfosten und ein Seil von 60 m Länge!
>
> Worauf warten Sie???

Du willst ein solches Grundstück erwerben – wie steckst du ab?

Hilfsmittel:

- Scheibe aus Kork (oder Styropor)
  3 bzw. 4 Stecknadeln
  zusammengeknotete Schnur (Maßstab 1:200 ; alle Schülerinnen und Schüler sollten wegen der Vergleichbarkeit eine Schnur derselben Länge erhalten).
  HAUPTSCHULE: Schülerinnen und Schüler der Hauptschule und leistungsschwächere Realschulklassen sind mit der Vorgabe „Maßstab 1:200“ in der Regel überfordert. In diesem Fall sollte stattdessen angegeben werden, dass 10 cm Schnurlänge in der Wirklichkeit 20 m entsprechen.
- Alternativ kann ein dynamisches Geometrieprogramm eingesetzt werden. Vorteil: Die Schülerinnen und Schüler können sich den Flächeninhalt als Maßzahl ausgeben lassen.

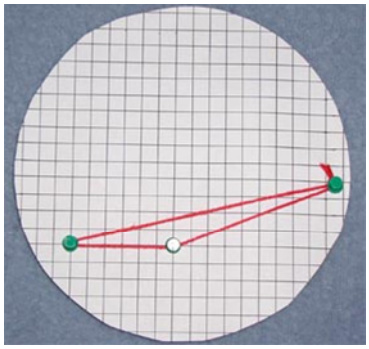
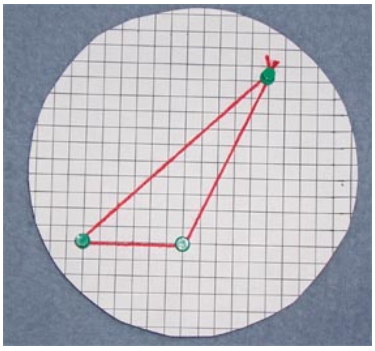
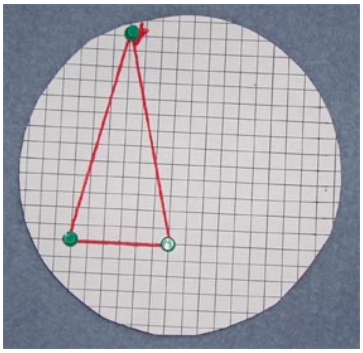
Methodische Hinweise zur Teilaufgabe „Dreieck“

Die Schülerinnen und Schüler stecken mit der Schnur unterschiedliche Dreiecke ab und müssen deren Flächeninhalte ermitteln. Die Schülerinnen und Schüler sollen selbst überlegen, auf welche Weise sie das tun. Eine nahe liegende Idee ist es, die Scheibe mit Karopapier zu überziehen und dann jeweils durch Auszählen der Kästchen den Flächeninhalt zu ermitteln.

HAUPTSCHULE: In der Hauptschule kann zur Vereinfachung von vornherein eine mit Karopapier überzogene Scheibe vorgegeben werden.

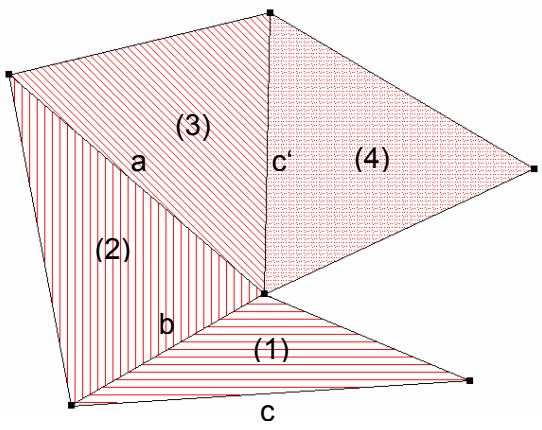
Entsprechend werden mit der dynamischen Geometriesoftware unterschiedliche Dreiecke mit festem Umfang gezeichnet und die Seitenlängen sowie der Flächeninhalt notiert.
Wenn die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks bereits bekannt ist, kann auch auf diese Weise der Flächeninhalt ermittelt werden.
So können die Schülerinnen und Schüler rein experimentell zu dem Ergebnis gelangen, dass offenbar unter allen Dreiecken mit gleichem Umfang das gleichseitige das mit dem größten Flächeninhalt ist.

Wenn über das Experimentieren hinaus die Schülerinnen und Schüler das Ergebnis auch argumentativ begründen sollen, ist es sinnvoll, die Problemstellung zunächst auf Dreiecke mit vorgegebener Grundseite einzuschränken, z.B. „Dein Gartengrundstück soll eine feste Straßenfront von 12 m haben.“

Auf diese Weise kommen die Schülerinnen und Schüler zu dem Ergebnis, dass von allen Dreiecken mit fester Grundseite das gleichschenklige den größten Flächeninhalt hat.

Zum gleichseitigen Dreieck führt dann die Überlegung, dass jede der drei Seiten als Grundseite betrachtet werden kann – wobei der Umfang natürlich fest bleibt.



- Über der vorgegebenen Grundseite c wird das gleichschenklige Dreieck (1) gezeichnet, das den größten Flächeninhalt hat.
- Nun wird b als Grundseite betrachtet. Dann hat Dreieck (1) nicht den maximalen Flächeninhalt, weil es nicht gleichschenklig ist. Den größten Flächeninhalt bei festem Umfang hat das gleichschenklige Dreieck (2).
- Die gleiche Überlegung auf Dreieck (2) angewendet ergibt ein neues gleichschenkliges Dreieck (3) über der Grundseite a, das wieder einen größeren Flächeninhalt als Dreieck (2) hat.

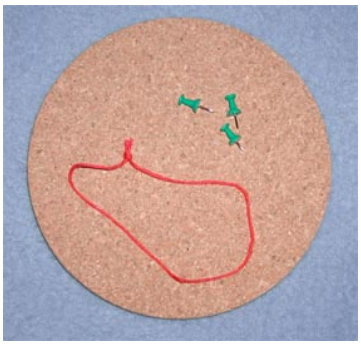
Diese Schritte werden weitergeführt und jeweils die Seitenlängen der Dreiecke notiert. Man erkennt, dass die Dreiecke sich immer mehr einem gleichseitigen Dreieck annähern.

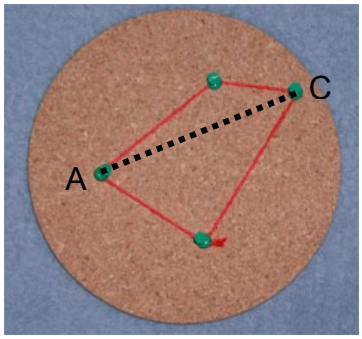
Dies führt zu folgender Überlegung: Man geht von dem Satz aus, dass von allen Dreiecken mit fester Grundseite das gleichschenklige den größten Flächeninhalt hat. Da aber jede Seite des Dreiecks als Grundseite betrachtet werden kann, hat *das* Dreieck den größten Flächeninhalt, das in jedem Fall gleichschenklig ist, egal welche Seite man als Grundseite wählt.

Methodische Hinweise zur Teilaufgabe „Viereck“

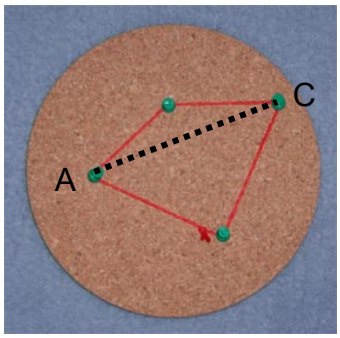
Auch in diesem Fall kann rein experimentell (durch Abstecken mit der Schnur und Auszählen der Kästchen oder mit einer dynamischen Geometriesoftware) der Flächeninhalt unterschiedlicher Vierecke mit festem Umfang ermittelt werden. So stellen die Schülerinnen und Schüler fest, dass unter allen Vierecken mit festem Umfang das Quadrat das mit dem größten Flächeninhalt ist.

Wenn die Schülerinnen und Schüler ihr Ergebnis auch begründen sollen, kann auf folgendes Ergebnis der Teilaufgabe „Dreieck“ zurückgegriffen werden: Von allen Dreiecken mit festem Umfang und fester Grundseite hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.
Durch mehrfaches Anwenden dieses Satzes auf die im Folgenden dargestellten Vierecke kann schrittweise begründet werden, dass von den Vierecken mit festem Umfang das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

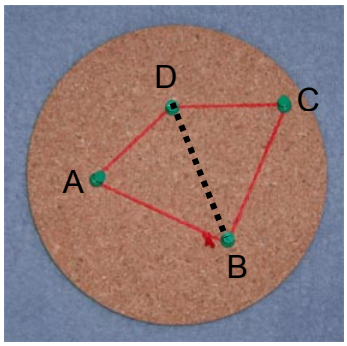




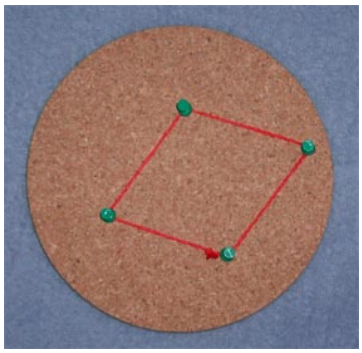
beliebiges konvexes Viereck



Drachenviereck

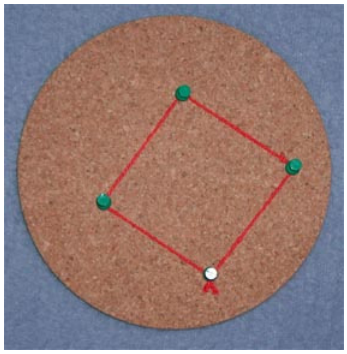


Drachenviereck



Raute

*



Quadrat

Anmerkung: In den Abbildungen ist die feste Grundseite der jeweils betrachteten Dreiecke folgendermaßen gekennzeichnet: ●┅┅┅●

* Für den letzten Schritt von der Raute zum Quadrat kann der o.g. Satz nicht mehr angewendet werden. Hier können z.B. übliche Methoden der Flächenzerlegung und –ergänzung oder Flächeninhaltsformeln herangezogen werden.

Ziel(e) der Aufgabe:

- Die Schülerinnen und Schüler sollen Strategien entwickeln, wie sie bei festem Umfang das Dreieck (Viereck) maximaler Fläche finden können, z.B.:

  Verbessern:
  Man geht von einem Dreieck (Viereck) aus und verbessert es so lange, bis man das Optimum gefunden hat.

  Sichern:
  Man vermutet das Optimum und zeigt, dass alle anderen „Konkurrenten“ schlechter sind! Diese Strategie liegt nahe, da zumindest einige Schülerinnen und Schüler vermuten werden, dass das gleichseitige Dreieck (das Quadrat) den größtmöglichen Flächeninhalt besitzt.

  Symmetrieprinzip:
  Diese Strategie kommt insbesondere bei der Teilaufgabe „Dreieck“ in Frage, wenn man eine feste Grundseite vorgibt. Man findet dann zwei Möglichkeiten für den Flächeninhalt 0 m^2, nämlich wenn die Spitze C des Dreiecks auf der Grundlinie AB liegt. Wandert C auf einem Bogen über der Grundlinie so wird der Flächeninhalt zuerst größer und dann wieder kleiner. Da es jeweils zwei zueinander symmetrische Dreiecke gibt, ist das flächenmäßig größte Dreieck das gleichschenklige.
  Wenn die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks bekannt ist, kann auch hiermit argumentiert werden: Wenn C von der Grundlinie aus wandert, wird die Höhe zuerst größer und dann wieder kleiner. Sie erreicht ihren größten Wert, wenn sie die Mittelsenkrechte der Grundlinie ist, d.h. beim gleichschenkligen Dreieck.

- Die Schülerinnen und Schüler sollen <u>begründen</u>, warum das von ihnen gefundene Dreieck (Viereck) den größtmöglichen Flächeninhalt besitzt.

- **HAUPTSCHULE:**
  Insbesondere in der Hauptschule bietet es sich an, mit der Teilaufgabe „Viereck“ einzusteigen und die Problemstellung zu nutzen, um zunächst die Berechnung des Flächeninhalts bei Rechteck und Quadrat zu wiederholen. Die Schülerinnen und Schüler können so den Vorteil einer Formel gegenüber dem Zählen der Kästchen erleben.
  Wenn anschließend auch die Teilaufgabe „Dreieck“ thematisiert wird, kann dies genutzt werden, um die Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms und ggf. des Dreiecks herzuleiten.