Aufgabeneinheit 4: Gedankenlesen

Michael Lamberty / Paul Müller / Peter Staudt

4.1 Was hat sie sich gedacht?

Jeder in eurer Gruppe denkt sich eine Zahl und verdoppelt sie, addiert zum Ergebnis 5 und multipliziert dann das neue Ergebnis mit 5. Dann wird 3 addiert und das Ergebnis noch verzehnfacht. Nun werden nochmals 3 dazu addiert und schließlich wird vom Ergebnis 150 subtrahiert.

1. Ein Gruppenmitglied nennt sein Ergebnis. Wie können die Anderen errechnen, welche Zahl sich die Schülerin bzw. der Schüler ausgedacht hatte?

2. Wenn ihr einen Weg gefunden habt, probiert aus, ob euer Rezept auch bei den anderen Gruppenmitgliedern klappt.

3. Versucht einen möglichst einfachen Zusammenhang zwischen dem Ergebnis und der Startzahl zu entdecken.

4.2 Fritz, das Superhirn ...

Fritz hat eine Überraschung für euch.
Jeder denkt sich eine Zahl und multipliziert sie mit 6. Vom Ergebnis werden 12 subtrahiert und das Ergebnis dann noch verdoppelt. Das neue Ergebnis wird durch 3 dividiert. Nun wird das Vierfache der Ausgangszahl subtrahiert und zum Ergebnis nochmals 15 addiert.

1. Jeder nennt jetzt sein Ergebnis. – Ist das nicht verblüffend? – Könnt ihr das erklären?

2. Könnt ihr selbst ein solches Zahlenrätsel erfinden?

4.3 Taschengeld, wo gehst du hin?

Marion gibt in der 1. Woche des Monats ein Drittel ihres Taschengeldes aus, in der 2. und 3. Woche wiederum ein Drittel vom jeweiligen Rest. Danach hat sie noch 8 € zur Verfügung.

Methodische Hinweise

Zu 4.1 Was hat sie sich gedacht?

Die Rechenschritte können als Operatorkette notiert werden:

$$\xrightarrow{\cdot 2} \quad \xrightarrow{+5} \quad \xrightarrow{\cdot 5} \quad \xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{\cdot 10} \quad \xrightarrow{+3} \quad \xrightarrow{-150}$$

Da die unbekannte, gesuchte Ausgangszahl in den Rechenschritten nur einmal vorkommt, wird die Bestimmung der Ausgangszahl durch „Rückwärtsrechnen“ über die Gegenoperatoren möglich.

Beispiel: Es wird das Ergebnis 1533 genannt.

$$1533 \xrightarrow{+150} 1683 \xrightarrow{-3} 1680 \xrightarrow{:10} 168 \xrightarrow{-3} 165 \xrightarrow{:5} 33 \xrightarrow{-5} 28 \xrightarrow{:2} 14$$

Die gedachte Ausgangszahl war demnach 14.

Die unbekannte Zahl kann über die Angabe eines Zahlbereichs eingeschränkt werden. Besonders in leistungsschwächeren Gruppen bieten sich kleine natürlichen Zahlen an, die auch vorgegeben werden können. An den Taschenrechnereinsatz ist nicht gedacht.

Der in Aufgabenteil 3. geforderte möglichst einfache Zusammenhang zwischen Ergebnis und Startzahl wird gefunden, wenn man den Rechenweg durch einen Term beschreibt.
Beispiel: $[(2x + 5) \cdot 5 + 3] \cdot 10 + 3 - 150$. Der Term lässt sich vereinfachen: $100x + 133$.
Dies führt zu dem "Rezept": Zur Bestimmung der gedachten Zahl werden vom genannten Ergebnis 133 subtrahiert und anschließend wird durch 100 dividiert.

Leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler oder Gruppen können mit gezielt eingestreuten Hinweisen in einer Fragephase oder mit Hinweiskärtchen etc. auf die richtige Spur gebracht werden:
Beispiele:

- Nenne die gedachte Zahl x
- Erstelle einen Term
- Tabelliere Zahl und Wert des Terms
- Vereinfache den Term.

Eine Erhöhung des Schwierigkeitsgrades kann durch Verwenden negativer Zahlen erreicht werden.

Zu 4.2 Fritz, das Superhirn ...

Das Überraschende ist, dass, unabhängig von der gewählten Ausgangszahl, immer 7 als Ergebnis herauskommt. Wie ist das zu erklären?
Die unbekannte, gesuchte Zahl kommt im Gegensatz zu Aufgabenteil 4.1 im Rechenablauf mehrfach vor. So ist die Bestimmung der Ausgangszahl durch „Rückwärtsrechnen“ über die Gegenoperatoren wie bei 4.1 nicht möglich. Das Operatorschema oder die Termdarstellung

liefern eine Erklärung:

$x \xrightarrow{\cdot 6} 6x \xrightarrow{-12} 6x-12 \xrightarrow{\cdot 2} (6x-12)\cdot 2 \xrightarrow{:3} [(6x-12)\cdot 2]:3 \xrightarrow{-4x} [(6x-12)\cdot 2]:3-4x \rightarrow$

$\xrightarrow{+15} [(6x-12)\cdot 2]:3-4x+15$

Vereinfacht man den Term, so erhält man 7. Die Lösung ist unabhängig von der Wahl der Ausgangszahl x.

Zu 4.3 Taschengeld, wo gehst du hin?

Es gibt auch hier verschiedene Lösungswege: Aufbau eines Operatorschemas, Aufstellen eines Terms und Lösen einer Gleichung.

Eine einfache Lösung ohne großen Formalismus ergibt sich über eine **Operatorkette**. Das Aufstellen der Operatorkette und das „Rückwärtsrechnen“ mit den Gegenoperatoren erfordert dennoch eine große Denkleistung von den Schülerinnen und Schülern.

Taschengeld $\xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}}$ Resttaschengeld $\xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}}$ Resttaschengeld $\xrightarrow{\cdot\frac{2}{3}}$ Resttaschengeld.

$8 \xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}} 12 \xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}} 18 \xrightarrow{\cdot\frac{3}{2}} 27$

Die Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe eines **Terms** erfordert wahrscheinlich eine Visualisierung durch ein “Aufteilprinzip“ über ein Kreisdiagramm oder eine Rechteckdarstellung.
Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist x und verkörpert das Taschengeld.

Erste Woche: $\frac{1}{3}$ vom Rechteck wird abgeschnitten, damit ergibt sich: $x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$.

Zweite Woche: Von den verbleibenden $\frac{2}{3}x$, also dem Rest, wird wieder $\frac{1}{3}$ abgeschnitten; damit ergibt sich: $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\frac{2}{3}x = \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x = \frac{4}{9}x$.

Dritte Woche: $\frac{4}{9}x - \frac{1}{3}\frac{4}{9}x = \frac{4}{9}x - \frac{4}{27}x = \frac{8}{27}x$, woraus sofort folgt: $\frac{8}{27}x = 8$ und $x = 27$.

oder etwas allgemeiner:

Nach der 1. Woche: $x - \frac{1}{3}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}x$

Nach der 2. Woche: $(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{9}x$

Nach der 3. Woche: $(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3}[(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3}x)] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{27}x$