Vom rechten Seilspannen

Schule: Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern
Idee und Erprobung der Unterrichtseinheit: Gerhard Schenkel
(Literaturhinweis: A. M. Fraedrich: Die Satzgruppe des Pythagoras
P. Baptist: Pythagoras und kein Ende?)

Die folgende Unterrichtseinheit ist ein Beispiel für Problemstellungen zur Erarbeitung eines Themas, die von den am BLK-Programm beteiligten Fachlehrerinnen und Fachlehrern entwickelt wurden.

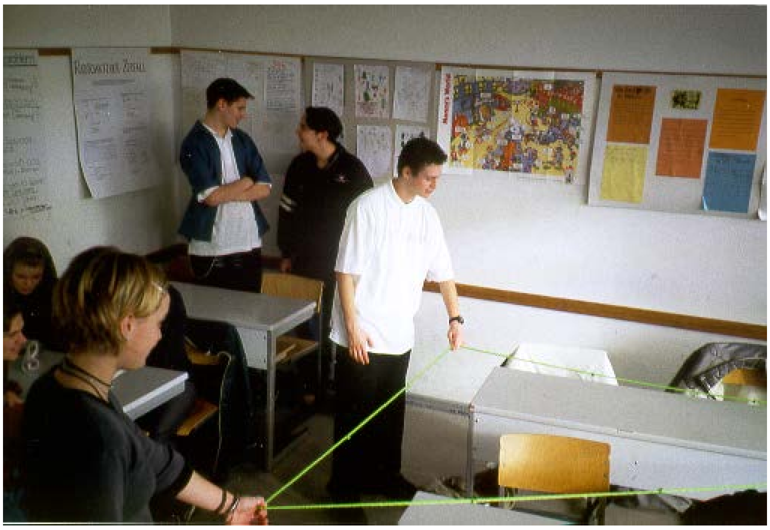
Stoffgebiet: Satz des Pythagoras

Intentionen:
- Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler
- Selbstständiges Entdecken der wesentlichen Schritte zum Satz des Pythagoras
- Offene Problemstellung
- Historische Bezüge

Stationen auf dem Weg zum Satz des Pythagoras

1. Einführung
   Den Schülerinnen und Schülern wird das Titelbild des Buches "Das Geheimnis des Orion" (von Robert Bauval / Adrian Gilbert) mit den drei deutlich sichtbaren Pyramiden von Gizeh gezeigt. Es wird kurz angesprochen, dass in der großen Pyramide (Cheops-Pyramide) in den letzten Jahren Schächte entdeckt wurden, die auf bestimmte Sternbilder zeigen; unter anderem, dass im südlichen Schacht der Königinkammer mit Hilfe des fahrbaren Roboters UPUAUT 2 (mit Videokamera) eine bis heute noch nicht geöffnete kleine Tür entdeckt wurde.
   Der Bau der regelmäßigen vierseitigen Pyramiden von Gizeh (quadratische Grundfläche) wird dann angesprochen, unter anderem die Vermessung der rechten Winkel der Grundflächen der Pyramiden. Zu der Vermessung von rechten Winkeln im alten Ägypten wird eine Folie auf dem Overhead-Projektor mit einem altägyptischen Motiv gezeigt, das sogenannte Seilspanner mit einem Knotenseil und den zugehörigen Spannpflöcken erkennen lässt.

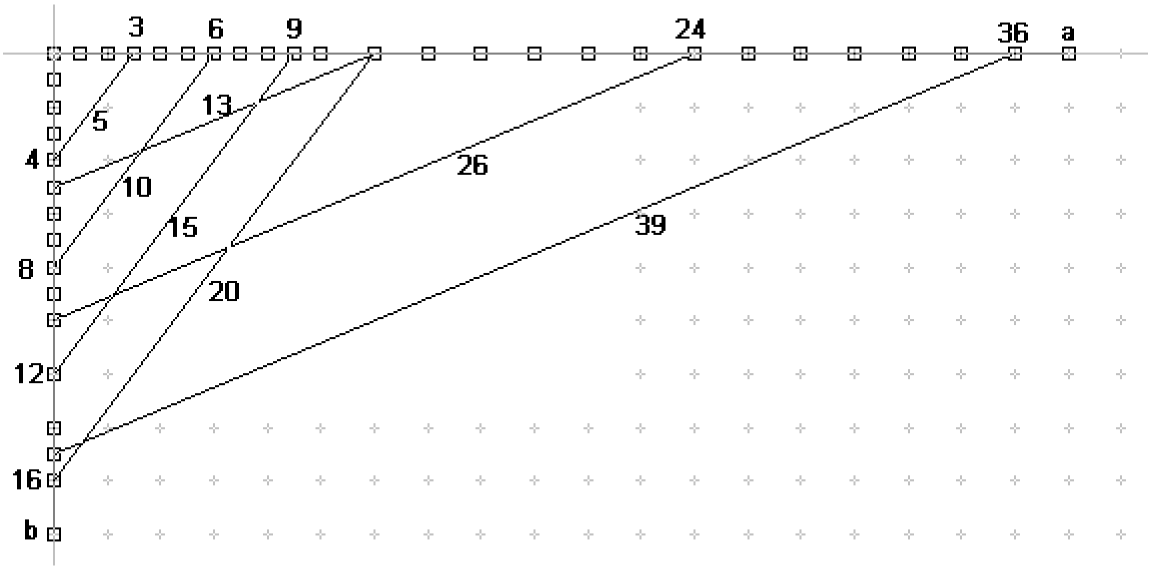
2. Arbeiten mit einem Knotenseil
   Mit Hilfe eines geschlossenen Knotenseils mit 12 Längeneinheiten (1 LE = 60 cm) soll ein rechter Winkel erzeugt werden, wobei das Knotenseil an 3 Stellen gespannt wird. (Geeignet dafür ist z.B. ein Seglerseil, das in einem Baumarkt erworben werden kann.) Drei Schülerinnen oder Schüler sollen versuchen, den Auftrag experimentell im Klassensaal zu realisieren, wobei sich die Klasse mit Vorschlägen und Kritik beteiligt. Die erzeugten Winkel können mit dem rechten Winkel eines Schülertischs verglichen werden.

   Ziel des Experiments: Auffinden des pythagoräischen Zahlentripels (3, 4, 5)

   Vorschlag für ein alternatives Vorgehen:
   Die Schülerinnen und Schüler basteln zu Hause aus Kordel Knotenseile mit 36 Einheiten. Sie erhalten den Auftrag, in Gruppen mit ihren Seilen rechte Winkel zu legen, wobei nicht immer die gesamte Länge des Seils benutzt werden muss. Auf diesem Weg können folgende pythagoräische Zahlentripel gefunden werden: (3, 4, 5);   (6, 8, 10);   (9, 12,15);   (12, 5, 13).

3. Arbeiten mit einem Suchdiagramm
   In Gruppen werden jetzt an einem rechtwinkligen Suchdiagramm weitere pythagoräische Zahlentripel gesucht:

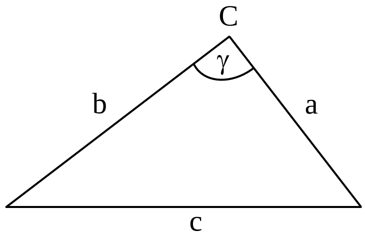


4. Mathematische Beschreibung der gefundenen Zahlentripel
   In Gruppen können die Schülerinnen und Schüler versuchen, eine Gesetzmäßigkeit für die Zahlentripel aufzuspüren. Sicher werden sie zunächst herausfinden, dass sich die Zahlentripel in zwei Gruppen einteilen lassen:

Gruppe 1	(3, 4, 5)	(6, 8, 10)	(9, 12, 15)	(12, 16, 20)
Gruppe 2	(12, 5, 13)	(24, 10, 26)	(36, 15, 39)	

Die Zahlentripel in einer Gruppe erfüllen folgende Gesetzmäßigkeit:
$(k \cdot 3,\ k \cdot 4,\ k \cdot 5)$ bzw. $(k \cdot 12,\ k \cdot 5,\ k \cdot 13)$.
Um zu der gruppenübergreifenden Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ zu kommen, werden möglicherweise Impulse der Lehrerin bzw. des Lehrers nötig sein, z.B. "Beschränkt euch bei der Suche nach einer Beziehung zwischen den Zahlen eines Tripels nicht nur auf die Grundrechenarten!"

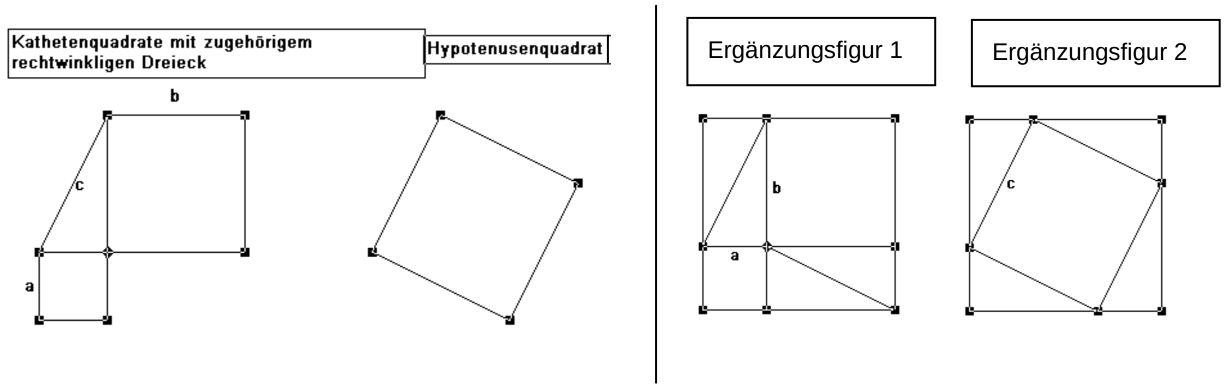
5. Vermutung zum Knotenseil:
   Gilt für die Seiten eines Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel ($\gamma = 90^0$). Dies ist die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.



6. Umkehrung der Vermutung: Der Satz von Pythagoras
   Für das Vorgehen in diesem Unterrichtsabschnitt bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:
   (1) Es wird ein kleiner Exkurs in die Aussagenlogik unternommen und die gewonnenen Einsichten auf die Vermutung zum Knotenseil übertragen.
   (2) Es wird zunächst an Konstruktionen überprüft, ob die Vermutung vom Knotenseil auch gilt, wenn a, b, c positive *rationale* Zahlen sind.
   "Wähle drei positive rationale Zahlen a, b, c mit $a^2 + b^2 = c^2$. Konstruiere dann ein Dreieck aus a, b, c und miss die Winkel".

   Anschließend werden ohne Vorgabe von Seitenlängen beliebige rechtwinklige Dreiecke gezeichnet und die Seitenlängen a, b, c gemessen. Es fällt auf, dass stets $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Ist das immer so?
   "Versuche ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, bei dem $a^2 + b^2 = c^2$ *nicht* gilt."

7. Beweis des Satzes von Pythagoras
   Es bietet sich zum Beispiel ein "Ergänzungsbeweis" an, weil die Schülerinnen und Schüler hierbei wieder aktiv in Gruppen arbeiten können. Ausgehend von der Pythagorasfigur werden zwei geeignete Ergänzungsfiguren gebastelt oder konstruiert, eine zu den beiden Kathetenquadraten (Ergänzungsfigur 1) und eine zum Hypothenusenquadrat (Ergänzungsfigur 2).



Beschreibung des Unterrichtsverlaufs

Die Unterrichtseinheit wurde am Hohenstaufen-Gymnasium Kaiserslautern durchgeführt. Eine sehr detaillierte Beschreibung des Unterrichtsverlaufs und der gewonnenen Erfahrungen ist auf der Homepage der Schule zu finden und steht zum Downloaden bereit: http://schulen.kaiserslautern.de/hsg – BLK-PROJEKT "SINUS" – UNTERRICHTSREIHE ZUM SATZ DES PYTHAGORAS